UNE APPLICATION DE L'ALGEBRE DIFFERENTIELLE AUX SYSTEMES REGULIERS (OU BILINEAIRES)

Michel FLIESS
Laboratoire des Signaux et Systèmes
C.N.R.S. - E.S.E.
Plateau du Moulon
91190 - Gif-sur-Yvette, France

et

Christophe REUTENAUER
Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation
Institut de Programmation
Université Paris VI
4, Place Jussieu
75230 - Paris Cedex 05, France.

Résumé. On montre, par usage conjoint de l'algèbre différentielle et des séries génératrices non commutatives, que la sortie d'un système régulier (ou bilinéaire) satisfait une équation différentielle linéaire, dont les coefficients dépendent des entrées et de leurs dérivées.

Abstract. By the joint use of differential algebra and non-commutative generating power series, it is shown that the output of a regular (or bilinear) system satisfies a linear differential equation, the coefficients of which depend on the controls and their derivatives.

INTRODUCTION

Une part non négligeable de la commande adaptative (cf. Landau [7]) repose sur la mise en forme suivante des systèmes linéaires :

$$y(t) + \alpha_1\, y(t-1) + \ldots + \alpha_k\, y(t-k) = \beta_1\, u(t-1) + \ldots + \beta_\ell\, u(t-\ell) \quad \text{(temps discret)},$$

$$\overset{(k)}{y}(t) + \alpha_1 \overset{(k-1)}{y}(t) + \ldots + \alpha_k\, y(t) = \beta_0\, u(t) + \beta_1\, \dot{u}(t) + \ldots + \beta_\ell \overset{(\ell)}{u}(t) \quad \text{(temps continu)},$$

où les α_i et β_j sont des constantes. Il n'est pas impossible que certaines des méthodes puissent s'étendre au cas où les α_i sont aussi fonctions des entrées (cf. Svoronos, Stephanopoulos et Aris [11]). On obtient ainsi des systèmes entrée-sortie qu'il importe d'étudier. En temps discret, Sontag [9, 10] a montré qu'il y avait correspondance entre formes auto-régressives généralisées et systèmes à état affine. L'objet de cette communication est de prouver qu'en temps continu, les systèmes réguliers (ou bilinéaires) peuvent être traduits sous forme d'équations différentielles linéaires à coefficients dépendant des entrées.

La démonstration utilise en conjonction séries génératrices non commutatives et algèbre différentielle. Celle-ci, déjà intervenue pour les systèmes linéaires, semble apparaître pour la première fois en non linéaire. Comme le montre un autre travail des auteurs [4], cette rencontre n'est pas fortuite puisque la théorie de Galois différentielle permet une description précise de la sortie d'un système régulier.

I. ENONCE DES RESULTATS.

Rappelons qu'un système régulier (ou bilinéaire) a pour forme

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = (M_o + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, M_i)\, q(t) \\ \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases} \tag{1}$$

L'état q appartient à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel Q, de dimension finie m; l'état initial q(o) est donné. Les applications $M_o, M_1, \ldots, M_n : Q \to Q$, $\lambda : Q \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires. Les entrées (ou commandes, ou contrôles) $u_1, \ldots, u_n : [o, \infty[\to \mathbb{R}$ sont, en raison des nécessités de cet article, supposées C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivables.

Par la suite, nous rappellerons brièvement la théorie de la réalisation. Supposons donc la matrice de Hankel de la série génératrice de (1) de rang N, c'est-à-dire la réalisation réduite de (1) de rang $N (N \leq m)$. On peut alors énoncer :

Théorème 1. La sortie y du système (1), dont la série génératrice a une matrice de Hankel de rang N, satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre N

$$A_o \overset{(N)}{y} + A_1 \overset{(N-1)}{y} + \ldots + A_N\, y = 0,$$

où $A_o, A_1, \ldots, A_N$ sont des fonctions polynômiales des entrées $u_1, \ldots, u_n$ et de leurs dérivées. Aucune équation différentielle linéaire d'ordre inférieur à N n'est satisfaite par y.

Pour énoncer une réciproque, il faut supposer la sortie y fonctionnelle causale analytique, c'est-à-dire donnée par une série génératrice non commutative, ou, ce qui revient au même (cf. [3]), par une série de Volterra à noyaux analytiques.

Théorème 2. Soit y la sortie d'un système, fonctionnelle causale analytique des entrées $u_1, \ldots, u_n$. Supposons que y satisfasse l'équation différentielle

$$A_o \overset{(N)}{y} + A_1 \overset{(N-1)}{y} + \ldots + A_N\, y = 0$$

où $A_o, A_1, \ldots, A_N$ sont des fonctions polynômiales des $u_1, \ldots, u_n$ et de leurs dérivées. Alors, la série génératrice de la fonctionnelle est rationnelle et, par conséquent, la sortie y peut être considérée comme celle d'un système régulier.

II. RAPPELS SUR LES SERIES GENERATRICES.

a) Notion de série génératrice [1]

La formule de Peano-Baker donne le développement en série de la sortie de (1):

$$y(t) = \lambda[1 + \sum_{\nu\geq o} \sum_{j_o,\ldots,j_\nu=o}^{n} M_{j_\nu}\ldots M_{j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_o}]\ q(o)$$

L'intégrale itérée $\int_o^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_o}$ est définie par récurrence sur la longueur :

$$\xi_o(\tau) = \tau,\ \xi_i(\tau) = \int_o^\tau u_i(\sigma)\ d\sigma \quad (i = 1,\ldots,n)$$

$$\int_o^t d\xi_j = \xi_j(t) \quad (j=0,1,\ldots,n), \quad \int_o^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_o} = \int_o^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_o^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\ldots d\xi_{j_o}$$

(la dernière intégrale est de Stieltjes).

Introduisons l'ensemble fini $X = \{x_o,x_1,\ldots,x_n\}$. Soit X^* le monoïde libre engendré par X. Un élément de X^*, appelé mot, est une suite fini $x_{j_\nu}\ldots x_{j_o}$. Le produit est la concaténation :

$$(x_{j_\nu}\ldots x_{j_o}) \cdot (x_{k_\mu}\ldots x_{k_o}) = x_{j_\nu}\ldots x_{j_o} x_{k_\mu}\ldots x_{k_o}$$

La suite vide, appelée mot vide et notée 1, est l'élément neutre.

On désigne par $\mathbb{R}\langle X\rangle$ et $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ les $\mathbb{R}$-algèbres des polynômes et des séries formels, à coefficients réels, en les variables non commutatives $x_j \in X$.

A (2), on associe la série de $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$\lambda q(o) + \sum_{\nu\geq o} \sum_{j_o,\ldots j_\nu} \lambda M_{j_\nu}\ldots M_{j_o}\ q(o)\ \ x_{j_\nu}\ldots x_{j_o} \tag{3}$$

C'est une série rationnelle qui caractérise le comportement entrée-sortie de (1). Elle est dite série génératrice de (1).

De façon plus générale, une fonctionnelle causale analytique [3] est définie par une série génératrice, non nécessairement rationnelle : pour obtenir la valeur numérique, on remplace, sous réserve de convergence, tout mot $x_{j_\nu}\ldots x_{j_o}$ par l'intégrale itérée correspondante.

b) Matrices de Hankel et réalisation réduite [1, 2, 5].

Considérons une série de $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$

---

(1) On trouvera en [5] un cours sur les séries génératrices rationnelles et des éléments de bibliographie.

$$\underline{\underline{g}} = \sum_{w \in X^*} (\underline{\underline{g}}, w)\, w \qquad ((\underline{\underline{g}}, w) \in \mathbb{R})$$

On lui associe un tableau infini $\underline{H}(\underline{\underline{g}})$, la matrice de Hankel de $\underline{\underline{g}}$, dont les lignes et colonnes sont indexées par les mots de X^* : l'élément d'indice $(u,v) \in X^* \times X^*$ est le coefficient $(\underline{\underline{g}},uv)$. On montre que $\underline{H}(\underline{\underline{g}})$ est de rang fini ssi $\underline{\underline{g}}$ est rationnelle.

Si la matrice de Hankel de (3) est de rang N, la réalisation réduite de (1), unique à un isomorphisme près, est de dimension N.

A tout mot $w \in X^*$, associons les séries

$$\underline{\underline{g}} \circ w = \sum_{v \in X^*} (\underline{\underline{g}}, wv)\, v, \qquad w \circ \underline{\underline{g}} = \sum_{u \in X^*} (\underline{\underline{g}}, uw)$$

Si $p = \sum_{w \in X^*} \alpha_w w$ est un polynôme de $\mathbb{R}\langle X\rangle$ on pose, par linéarité,

$$\underline{\underline{g}} \circ p = \sum_{v \in X^*} [\sum_{w \in X^*} \alpha_w (g,wv)]v, \quad p \circ \underline{\underline{g}} = \sum_{u \in X^*} [\sum_{w \in X^*} \alpha_w (g,uw)]\, u$$

Les ensembles $\{\underline{\underline{g}} \circ p \mid p \in \mathbb{R}\langle X\rangle\}$ et $\{p \circ \underline{\underline{g}} \mid p \in \mathbb{R}\langle X\rangle\}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels Λ et Γ, canoniquement isomorphes aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels engendrés par les lignes et les colonnes de $\underline{H}(\underline{\underline{g}})$. Aussi peut-on énoncer :

<u>Théorème 3</u>. $\underline{\underline{g}}$ est rationnelle si, et seulement si, Λ (resp. Γ) est de dimension finie. Cette dimension est égale au rang de $\underline{H}(\underline{\underline{g}})$.

c) <u>Mélange</u>.

Il existe, sur $\mathbb{R}\langle X\rangle$ et $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$, un autre produit, dit <u>mélange</u> (ou produit de Hurtwitz, en anglais "shuffle product") et noté ω. le mélange de deux mots est défini par récurrence sur la longueur :

$$1 \;\omega\; 1 = 1;\ \forall\, w \in X^*,\ 1 \;\omega\; w = w \;\omega\; 1 = 1;$$

$$\forall\, x_j,\ x_k \in X,\ \forall\, u,\ v \in X^*$$

$$(x_j\, u)\ \omega\ (x_k\, v) = x_j\, [u\ \omega\ (x_k\, v)] + x_k\, [(x_j\, u)\ \omega\ v] \tag{4}$$

Par exemple, $x^{\mu}\ \omega\ x^{\nu-\mu} = \binom{\nu}{\mu} x^{\nu}$, et

$$x_o\, x_1\ \omega\ x_2 = x_o\, x_1\, x_2 + x_o\, x_2\, x_1 + x_2\, x_o\, x_1 .$$

Ce produit s'étend, par linéarité, à $\mathbb{R}\langle X\rangle$ et $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$\underline{\underline{g}}_1\ \omega\ \underline{\underline{g}}_2 = \sum_{w_1, w_2 \in X^*} (g_1, w_1)\ (g_2, w_2)\ w_1\ \omega\ w_2$$

Avec l'addition et le mélange, les ensembles des polynômes et des séries acquièrent une structure de $\mathbb{R}$-algèbres commutatives.

On montre (cf. [3]) que le mélange de deux séries rationnelles est encore une série rationnelle.

Considérons maintenant le produit d'intégrales itérées

$$\left(\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}\right) \quad \left(\int_0^t d\xi_{k_\mu} \ldots d\xi_{k_0}\right)$$

D'après la formule d'intégrations par parties, cette expression s'écrit :

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0}\right) \left(\int_0^\tau d\xi_{k_\mu} \ldots d\xi_{k_0}\right) + \int_0^t d\xi_{k_\mu}(\tau) \left(\int_0^\tau d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}\right) \left(\int_0^\tau d\xi_{k_{\mu-1}} \ldots d\xi_{k_0}\right) .$$

On retrouve ainsi la formule (4) et l'on peut énoncer (cf. [2, 3]) le résultat suivant dû, dans son essence, à Ree [8].

<u>Théorème 4</u>. Considérons des systèmes de mêmes entrées et de sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Si ce sont des fonctionnelles causales analytiques de séries génératrices $\underline{\underline{g}}_1$ et $\underline{\underline{g}}_2$, le système de sortie le produit $y_1(t)\ y_2(t)$ est encore une fonctionnelle causale analytique de série génératrice le mélange $\underline{\underline{g}}_1 \ \omega \ \underline{\underline{g}}_2$.

III. <u>LIENS AVEC L'ALGEBRE DIFFERENTIELLE</u>.

a) <u>Présentation</u>.

L'algèbre différentielle est avant tout la création du mathématicien américain J.F. Ritt. Il en existe une excellente introduction due à Kaplansky [6], qui suffit à nos besoins.

La dérivée par rapport au temps de l'intégrale itérée $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$ est

$$\frac{d}{dt} \int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} = \begin{cases} \int_0^t d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0} & \text{si} \quad j_\nu = 0 \\ u_i(t) \int_0^t d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0} & \text{si} \quad j_\nu = i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

De même, la dérivée de la série de Peano-Baker (2) est

$$\lambda(M_0 + \sum_{i=1}^n u_i(t)\ M_i)\ (1 + \sum_{\nu \geq 0}\ \sum_{j_0, \ldots j_\nu = 0}^n M_{j_\nu} \ldots M_{j_0} \int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0})\ q(o)$$

Nous allons formaliser cela pour les séries non commutatives. Introduisons la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}\{u\}$ des <u>polynômes différentiels</u> en les variables commutatives $u_1, \ldots, u_n$

avec les dérivées successives $\dot{u}_i$, $\ddot{u}_i$, $\ldots, u_i^{(k)}, \ldots (i = 1, \ldots, n)$. Considérons, sur $\mathbb{R}$, le produit tensoriel $\mathbb{R}\{u\} \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$, où $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ est l'algèbre relative au mélange. C'est encore une $\mathbb{R}$-algèbre commutative dont tout élément s'écrit comme somme finie

$$\alpha = \sum_k m_k \otimes s_k \quad ,$$

où $s_k \in \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$, et m_k est un monôme de $\mathbb{R}\{u\}$. Remarquons que les algèbres $\mathbb{R}\{u\}$ et $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ s'injectent canoniquement dans $R\{u\} \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Par définition, la dérivée $\dot{\alpha}$ de α est

$$\dot{\alpha} = \sum_k [\dot{m}_k \otimes s_k + m_k \otimes (s_k \circ x_o) + \sum_{i=1}^{n} (m_k u_i) \otimes (s_k \circ x_i)] \quad .$$

En particulier, si $\underline{\underline{g}} \in \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$, il vient :

$$\dot{\underline{\underline{g}}} = \underline{\underline{g}} \circ x_o + \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes (\underline{\underline{g}} \circ x_i) \quad .$$

Soit $\mathbb{R}(\{u\})$ le corps de fractions de $\mathbb{R}\{u\}$. C'est un corps différentiel canoniquement plongé dans le corps différentiel de fractions, noté $\underline{K}$, de $\mathbb{R}\{u\} \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$. Le rôle de ce corps $\underline{K}$ est capital.

b) Constante de $\underline{K}$.

Une constante, en algèbre différentielle, est un élément de dérivée nulle. L'ensemble des constantes d'un corps différentiel forme un sous-corps. Le lemme suivant, d'une grande importance technique, caractérise les constantes de $\underline{K}$.

Lemme 5. $\mathbb{R}$ est le corps des constantes de $\underline{K}$.

Démonstration (esquisse). (i) Si $\alpha \in \mathbb{R}(\{u\}) \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\dot{\alpha} = 0$, l'appartenance de α à $\mathbb{R}$ est évidente.

(ii) Soit $\alpha/\beta \in \underline{K}$, α, $\beta \in \mathbb{R}(\{u\}) \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ tel que $(\dot{\alpha/\beta}) = 0$. Comme $(\dot{\alpha/\beta}) = (\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta})/\beta^2$, on a $\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta} = 0$.

En vertu d'un isomorphisme canonique, on a :

$$\mathbb{R}(\{u\}) \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle \simeq \mathbb{R}(\{u\})\langle\langle X\rangle\rangle \quad ,$$

où le second nombre désigne les séries à coefficients dans $\mathbb{R}(\{u\})$.

Si α ou β était inversibles dans $\mathbb{R}(\{u\})\langle\langle X\rangle\rangle$, on serait ramené au cas (i). Considérons alors les polynômes homogènes p et q de degré minimal de α et β : $\alpha = p$ + termes de degré supérieur, $\beta = q$ + termes de degré supérieur. Nécessairement, on a

$$\dot{p}q - \dot{q}p = 0$$

Considérons un morphisme de $\mathbb{R}(\{u\})$- algèbres commutatives $\varphi_o : \mathbb{R}(\{u\})\langle X\rangle \to \mathbb{R}(\{u\})$. D'après Ree [8], ce morphisme peut être défini par une série exponentielle que nous prenons égale à $\exp \varepsilon_\nu x_{j_\nu} \ldots \exp \varepsilon_o x_{j_o}$ où $x_{j_\nu} \ldots x_{j_o}$ est un mot de coefficient non nul dans q et les ε des variables commutatives réelles indépendantes. Alors

$\varphi_o(q) = (q, x_{j_\nu} \ldots x_{j_o})\, \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_o$ + des termes où au moins un des ε apparaît à un degré ≥ 2.

Nous définissons φ_o en donnant aux ε des valeurs telles que le polynôme ci-dessus soit non nul.

Pour tout $P \in \mathbb{R}(\{u\})\langle X\rangle$, posons

$$P_{\varphi_o} = \sum_{w\in X^*} \Big(\sum_{w'\in X^*} (P, w\, w')\, \varphi_o(w') \Big)\, w$$

On vérifie qu'il y a équivalence entre les relations $\dot p q - \dot q p = 0$ et $\dot p_{\varphi_o} q - \dot q_{\varphi_o} p = 0$. Comme q_{φ_o} est inversible, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $p_{\varphi_o} = c\, q_{\varphi_o}$, d'où $p = c\, q$ et, enfin, $\alpha = c\, \beta$.

Le lemme va nous servir à trouver le corollaire suivant qui est conséquence d'un résultat classique d'algèbre différentielle (cf. Kaplansky [6]).

Corollaire 6. Soient $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des éléments non tous nuls de $\underline{K}$. Alors, l'équation différentielle linéaire

$$\alpha_o \overset{(N)}{\eta} + \ldots + \alpha_N \eta = 0$$

possède au plus N solutions $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes dans $\underline{K}$.

IV. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1 ET 2.

Ce qui précède montre que les théorèmes 1 et 2 sont équivalents à l'énoncé suivant :

Théorème 7. Soit r une série rationnelle de $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ dont la matrice de Hankel a pour rang N. Alors $r, \dot r, \ldots, \overset{(N-1)}{r}$ sont $\mathbb{R}(\{u\})$-linéairement indépendantes et r vérifie une équation différentielle de la forme

$$\overset{(N)}{r} + A_1 \otimes \overset{(N-1)}{r} + \ldots + A_N \otimes r = 0 \tag{5}$$

où $A_1, \ldots, A_N$ appartiennent à $\mathbb{R}(\{u\})$. Réciproquement, si une série de $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ vérifie une équation de la forme précédente, elle est rationnelle.

Démonstration. (i) Soit $r \in \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ une série rationnelle dont la matrice de Hankel a pour rang N. Supposons qu'elle vérifie

$$B_1 \otimes \overset{(N-1)}{r} + \ldots + B_N \otimes r = 0 \tag{6}$$

où $B_1, \ldots, B_N \in \mathbb{R}(\{u\})$. L'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$, $s \mapsto p \circ s$ ($p \in \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$), se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{R}(\{u\})$-linéaire de $\mathbb{R}(\{u\}) \otimes \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ par la formule

$$p \circ \left(\sum_k m_k \otimes s_k \right) = \sum_k m_k \otimes (p \circ s_k) ,$$

et commute à la dérivation. On peut donc l'appliquer à (6) :

$$B_1 \otimes \overset{(N-1)}{(p \circ r)} + \ldots + B_N \otimes (p \circ r) = 0 \quad .$$

D'après la propoposition 3, il existe N séries linéairement indépendantes de la forme $p \circ r$. Le corollaire 6 montre que les B_i doivent être tous nuls.

(ii) D'après la proposition 3, la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $r \circ \mathbb{R}\langle X\rangle$ est N, qui est aussi celle du $\mathbb{R}(\{u\})$ - espace vectoriel

$$V = \mathbb{R}(\{u\}) \otimes (r \circ \mathbb{R}\langle X\rangle) .$$

V contient toutes les dérivées de r. Comme $r, \dot{r}, \ldots, \overset{(N-1)}{r}$ sont, en vertu de ce qui précède, $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, elles constituent une base de V. Ainsi, $\overset{(N)}{r}$ s'exprime comme combinaison $\mathbb{R}(\{u\})$ -linéaire de $r, \ldots, \overset{(N-1)}{r}$.

(iii) Supposons que $s \in \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ vérifie une équation de la forme (5). Comme précédemment, pour tout $p \in \mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$, $p \circ s$ satisfait aussi cette équation. Le corollaire 6 montre que $\mathbb{R}\langle X\rangle \circ s$ est de dimension finie, ce qui, d'après la proposition 3, prouve la rationalité de s.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. FLIESS, Matrices de Hankel, J. Math. Pures Appl., 53, 1974, p. 197-222.

[2] M. FLIESS, Un outil algébrique : les séries formelles commutatives, in "Mathematical Systems Theory", (G. Marchesini and S.K. Mitter, eds), Lect. Notes Econom. Math. Syst. 131, p. 122-148, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] M. FLIESS, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France, 109, 1981, p. 3-40.

[4] M. FLIESS et C. REUTENAUER, Théorie de Picard-Vessiot des systèmes réguliers (ou bilinéaires), Actes Colloque Nat. C.N.R.S.-RCP 567 Méthodes et Outils Mathématiques en Automatique, Analyse de Systèmes et Traitement du Signal, Belle-Ile, Sept. 1982, p. 171-183.

[5] G. JACOB, Réalisation des systèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries génératrices non commutatives, in "Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal" (I.D. Landau, réd.), Vol. 1, p. 325-357, CNRS, Paris, 1981 .

[6] I. KAPLANSKY, An Introduction to Differential Algebra, Hermann, Paris, 1957.

[7] Y.D. LANDAU, Adaptative control, Marcel Dekker, New York, 1979.

[8] R. REE, Lie elements and an algebra associated with shuffles, Ann. of Math., 68, 1958, p. 210-220.

[9] E.D. SONTAG, Polynomial Response Maps, Lect. Notes Contr. Informat. Sci. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[10] E.D. SONTAG, Realization theory of discrete-time nonlinear systems : part I - the bounded case, IEEE Trans. Circuits Systems, 26, 1979, p. 342-356.

[11] S. SVORONOS, G. STEPHANOPOULOS et R. ARIS, On bilinear estimation and control, Internat. J. Control, 34, 1981, p. 651-684.