

ALGÈBRES DE HOPF DE TABLEAUX

STÉPHANE POIRIER ET CHRISTOPHE REUTENAUER

RÉSUMÉ. Nous montrons que les deux structures duales d'algèbre de Hopf introduites dans [8] sur le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}S$ de base l'ensemble S de toutes les permutations, sont libres, comme algèbres associatives. Par restriction aux classes plaxiques, nous obtenons deux structures duales d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}T$, le \mathbb{Z} -module de base l'ensemble T de tous les tableaux standards. L'une d'elles est libre, comme algèbre associative. Nous étudions plusieurs homomorphismes entre ces structures et les algèbres des descentes, des fonctions symétriques et quasi-symétriques; en particulier, l'évacuation est un anti-automorphisme pour ces structures, la fonction qui envoie une permutation sur son tableau gauche (dans l'algorithme de Robinson-Schensted) est un homomorphisme, et l'algèbre des fonctions symétriques est plongée dans $\mathbb{Z}T$. Nous décrivons tous ces produits et coproduits avec le jeu de taquin.

ABSTRACT. We show that the two dual Hopf algebra structures introduced in [8] on $\mathbb{Z}S$, the \mathbb{Z} -module with basis the set S of all permutations, are free, as associative algebras. Passing to plactic classes, we define two dual Hopf algebra structures on $\mathbb{Z}T$, the \mathbb{Z} -module with basis the set T of standard Young tableaux. One of them is shown to be free as an associative algebra. We study several homomorphisms between these structures and the algebras of descents, of symmetric and quasi-symmetric functions; in particular, evacuation of tableaux is an anti-automorphism of these structures, the function which maps a permutation to its left tableau (in the Robinson-Schensted algorithm) is a homomorphism, and the symmetric functions are embedded in $\mathbb{Z}T$. We describe all these products and coproducts with the "jeu de taquin".

1. Introduction. La théorie des caractères du groupe symétrique, *i. e.* des fonctions symétriques, s'est depuis longtemps nourrie de la combinatoire des tableaux de Young, comme l'algorithme de Robinson-Schensted, le jeu de taquin et l'évacuation. Dans cet article, nous définissons des structures algébriques sur les tableaux, autres que celle du monoïde plaxique, où ces constructions combinatoires induisent des produits, coproduits et homomorphismes.

Nous partons de deux structures d'algèbre de Hopf sur le \mathbb{Z} -module de base les permutations, à la fois duales et conjuguées l'une de l'autre, introduites naturellement dans [8] à partir de la dualité entre algèbre des descentes et fonctions quasi-symétriques

Reçu le 11 avril 1994 et, sous forme définitive, le 5 avril 1995.

Recherche subventionnée par l'ISM (Montréal) et le CRSNG (Canada)

(voir aussi [3]); par restriction aux classes plaxiques (classes de Knuth), on obtient deux structures d'algèbre de Hopf sur le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}T$ de base les tableaux de Young standards.

Nous montrons que $\mathbb{Z}S$ avec ces deux produits, et $\mathbb{Z}T$ avec l'un d'eux, est une algèbre associative libre. On obtient donc un exemple de bigèbre très fortement non commutative et non co-commutative. Nous étudions divers homomorphismes de ces structures: en particulier, l'évacuation est un anti-automorphisme, et la fonction qui à une permutation associe son tableau gauche (dans l'algorithme de Robinson-Schensted) est un homomorphisme. Finalement, nous décrivons tous ces produits et coproduits par jeu de taquin.

2. Algèbre de Hopf sur les permutations. Nous notons $\mathbb{Z}S$ le \mathbb{Z} -module libre engendré par $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$, la réunion disjointe des groupes symétriques; en particulier, $S_0 = \{\varepsilon\}$, et les éléments de S_n sont notés comme des mots sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, n\}$.

En [8] ont été introduites deux structures d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}S$. Nous rappelons comment. Pour $\alpha \in S_n, \beta \in S_p$, nous notons $\bar{\beta}$ le mot obtenu de la manière suivante: si $\beta = j_1 \cdots j_p$, alors $\bar{\beta} = (j_1 + n) \cdots (j_p + n)$. Alors $\alpha * \beta = \alpha \sqcup \bar{\beta}$, le mélange (shuffle) des mots α et $\bar{\beta}$. Pour un mot u sur $\{1, 2, \dots\}$, sans répétition de lettres, $st(u)$ désigne la permutation standardisée de u , c'est-à-dire la permutation de longueur égale à la longueur de u obtenue en appliquant à u l'unique fonction injective croissante de l'ensemble des lettres de u sur $\{1, 2, \dots, |u|\}$. Alors $\delta(\alpha) = \sum_{\alpha=uv} st(u) \otimes st(v)$ (uv désigne dans cet article le concaténé des mots u et v). Par exemple, $12 * 21 = 12 \sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312$ et $\delta(2413) = \varepsilon \otimes 2413 + st(2) \otimes st(413) + st(24) \otimes st(13) + st(241) \otimes st(3) + 2413 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 2413 + 1 \otimes 312 + 12 \otimes 12 + 231 \otimes 1 + 2413 \otimes \varepsilon$.

Le produit $*'$ et le coproduit δ' sont définis de la manière suivante: $\alpha *' \beta = \sum uv$, où la somme est sur tous les mots u et v tels que $st(u) = \alpha, st(v) = \beta$ et que le mot concaténé uv est une permutation dans S_{n+p} . On note α_I le mot obtenu en effaçant dans α les lettres en dehors de $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Alors $\delta'(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_{\{1, \dots, i\}} \otimes st(\alpha_{\{i+1, \dots, n\}}) \in \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S$. Par exemple, $12 *' 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$ et $\delta'(3124) = \varepsilon \otimes 3124 + 1 \otimes st(324) + 12 \otimes st(34) + 312 \otimes st(4) + 3124 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 3124 + 1 \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes 1 + 3124 \otimes \varepsilon$.

Le produit $*$ et le coproduit δ (resp. $*'$ et δ') font de $\mathbb{Z}S$ une algèbre de Hopf graduée. Ces deux algèbres de Hopf sont duales l'une de l'autre, pour le produit scalaire \langle, \rangle sur $\mathbb{Z}S$ pour lequel S est une base orthonormale. On a donc, pour tous x, y, z dans $\mathbb{Z}S$

$$(2.1) \quad \langle x * y, z \rangle = \langle x \otimes y, \delta'(z) \rangle,$$

$$\langle x *' y, z \rangle = \langle x \otimes y, \delta(z) \rangle.$$

Par ailleurs, soit θ l'involution linéaire de $\mathbb{Z}S$ qui envoie la permutation α sur son inverse. Alors les deux algèbres de Hopf sont conjuguées sous $\theta, i. e.$

$$(2.2) \quad \theta(x * y) = \theta(x) *' \theta(y),$$

$$(\theta \otimes \theta) \circ \delta(x) = \delta' \circ \theta(x).$$

Pour ces résultats, voir [8] (où les symboles $*$, $*'$ et δ, δ' sont échangés).

Nous appellerons *permutation connexe* une permutation $\alpha \in S_n$, $n \neq 0$, qui ne préserve aucun sous-intervalle de la forme $\{1, \dots, i\}$, $i < n$; autrement dit, α n'est dans aucun sous-groupe de Young propre de S_n . Plus généralement, le *type de connexité* $\tau(\alpha)$ est le k -uplet (i_1, \dots, i_k) tel que le sous-groupe de Young minimum de S_n contenant α soit $S_{i_1} \times \dots \times S_{i_k}$. Les types de connexités sont ordonnés par l'ordre d'inclusion des sous-groupes de Young. Définissons un produit associatif \square sur S par: $\alpha \in S_n, \beta \in S_p$, $\alpha \square \beta = \alpha\bar{\beta} \in S_{n+p}$. Il est clair que S avec \square est un monoïde librement engendré par les permutations connexes.

Théorème 2.1. *L'algèbre associative $\mathbb{Z}S$ est librement engendrée par les permutations connexes, pour chacun des produits $*$ et $*'$.*

Nous avons besoin du

Lemme 2.2. *Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ des permutations connexes et $\alpha = \sigma_1 \square \dots \square \sigma_k$. Alors $\sigma_1 * \dots * \sigma_k = \alpha +$ des permutations de type de connexité plus grand que celui de α .*

Preuve. Par définition du mélange, chaque permutation $\neq \alpha$ apparaissant dans le produit $\sigma_1 * \dots * \sigma_k$ s'obtient à partir de α par une chaîne de transformations élémentaires du type $uijv \rightarrow ujiv$, $i < j$, où de plus la première transformation de la chaîne satisfait à: (*) $uijv = \beta \square \gamma$, $|\beta| = ui$ et $|\gamma| = |jv|$. Il suffit donc de montrer que $\tau(uijv) \leq \tau(ujiv)$, avec inégalité stricte si (*) est satisfaite.

Or ceci découle des deux remarques suivantes:

- (i) si $xijv$ est connexe et $i < j$, alors $xjiv$ l'est aussi.
- (ii) si xi et jv sont connexes, alors $xjiv$ est connexe. \square

Preuve du théorème 2.1. En vertu de (2.2), il suffit de démontrer ce résultat pour $*$, car l'inverse d'une permutation connexe est connexe. Or toute permutation α s'écrit de manière unique $\alpha = \sigma_1 \square \dots \square \sigma_k$, où les σ_i sont connexes. Alors $\sigma_1 * \dots * \sigma_k = \alpha +$ des permutations de types plus grand que α . On en déduit, par triangularité, que les $\sigma_1 * \dots * \sigma_k$ forment une base de $\mathbb{Z}S$, i. e. que les permutations connexes engendrent librement $\mathbb{Z}S$. \square

3. Algèbres de Hopf sur les tableaux de Young. Soit T l'ensemble des tableaux de Young standards (nous dirons tableau), et $\mathbb{Z}T$ le \mathbb{Z} -module de base T . Nous allons munir $\mathbb{Z}T$ de deux structures d'algèbre de Hopf, duales entre elles, pour le produit scalaire \langle, \rangle qui fait de T une base orthonormale.

Soit $\alpha \mapsto (tg(\alpha), td(\alpha))$ la transformation de Robinson-Schensted, qui associe à chaque permutation une paire de tableaux de même forme. Rappelons que, si A est un alphabet totalement ordonné, la *congruence plaxique* [7] sur le monoïde libre A^* est engendrée par les relations: $bac \sim bca$, $acb \sim cab$, $baa \sim aba$, $bba \sim bab$, où $a < b < c$, $a, b, c \in A$. D'après le théorème de Knuth [5], on a $tg(\alpha) = tg(\beta)$ si et seulement si $\alpha \sim \beta$. À chaque tableau t , nous pouvons associer sa classe plaxique $c(t)$, i. e. l'ensemble des permutations α telles que $tg(\alpha) = t$; nous identifions $c(t)$ avec la somme de ses éléments dans $\mathbb{Z}S$; notons C l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}S$ ainsi obtenus et $\mathbb{Z}C$ le sous-module de $\mathbb{Z}S$ de base C .

Théorème 3.1. *Le sous-module $\mathbb{Z}C$ de $\mathbb{Z}S$ est une sous-algèbre de Hopf pour le produit $*$ et le coproduit δ .*

En vertu de l'isomorphisme linéaire évident $\mathbb{Z}C \simeq \mathbb{Z}T$ (à chaque tableau est associée sa classe plaxique), nous obtenons ainsi une première structure d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}T$, notée $*$ et δ .

Preuve. D'après un théorème de Lascoux et Schützenberger [7], le mélange de deux classes plaxiques sur des alphabets A et B satisfaisant à: $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$, est une somme de classes plaxiques. Ceci implique immédiatement, vu la définition du produit $*$, que $\mathbb{Z}C$ est une sous-algèbre de $\mathbb{Z}S$.

Soit c une classe plaxique de permutations; si $uv \in c, u \sim u'$ et $v \sim v'$, alors $uv \sim u'v'$ et par suite $u'v' \in c$. Comme la somme $\sum_{uv \in C} u \otimes v$ est sans multiplicité, elle est une somme de $c_1 \otimes c_2$, où c_1, c_2 sont des classes plaxiques. Enfin, comme $u \mapsto st(u)$ consiste à renommer les lettres de u de manière croissante, $\delta(\sum_{\alpha \in C} \alpha) = \sum_{uv \in C} st(u) \otimes st(v)$ est dans $\mathbb{Z}C \otimes \mathbb{Z}C$. \square

Nous dirons qu'un tableau est *connexe* si dans sa classe plaxique toutes les permutations sont connexes. Plus généralement, le type de connexité d'un tableau t est l'unique k -uplet (i_1, \dots, i_k) tel que t soit la classe plaxique d'une permutation de ce type, et que (i_1, \dots, i_k) soit la composition la plus fine possible (*i.e.* le sous-groupe de Young $S_{i_1} \times \dots \times S_{i_k}$ est le plus petit possible). Le fait que ce type soit bien défini découle de l'observation suivante: si α, β (resp. α', β') sont des mots multilinéaires sur les alphabets $\{1, \dots, p\}, \{p+1, \dots, p+q+r\}$, (resp. $\{1, \dots, p+q\}, \{p+q+1, \dots, p+q+r\}$) et si $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$, alors ces deux derniers mots sont encore plaxiquement équivalents à $\alpha\gamma\beta'$, où γ est multilinéaire sur l'alphabet $\{p+1, \dots, p+q\}$; d'après [7], la congruence plaxique est en effet compatible aux restrictions d'intervalles, donc par projection sur l'intervalle $\{1, \dots, p+q\}$, nous obtenons $\alpha' \sim \alpha\gamma$, où γ est la projection de β . Par conséquent, si $\alpha \sim \beta$ et si $\alpha \in H, \beta \in G$ (G, H sous-groupes de Young), il existe $\gamma \in H \cap G$ tel que $\alpha \sim \gamma \sim \beta$.

Théorème 3.2. *L'algèbre $\mathbb{Z}T$ est librement engendrée par les tableaux connexes.*

Soient $t = tg(\alpha), t' = tg(\alpha')$. Définissons $t \square t' =$ le tableau gauche de $\alpha \square \alpha'$. D'après le théorème de Knuth, ceci définit un produit sur T , qui devient un monoïde librement engendré par les tableaux connexes. Le théorème est alors conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soient t_1, \dots, t_k des tableaux connexes et $t = t_1 \square \dots \square t_k$. Alors $t_1 * \dots * t_k = t$ plus des tableaux de type de connexité plus grand que celui de t .*

Preuve. Nous notons c_1, \dots, c_k, c les classes plaxiques correspondantes. Alors c_i ne contient que des permutations connexes. Donc dans $\mathbb{Z}S$,

$$\begin{aligned} c_1 * \dots * c_k &= \sum_{\alpha_i \in c_i} \alpha_1 * \dots * \alpha_k \\ &= \sum_{\alpha_i \in c_i} \alpha_1 \square \dots \square \alpha_k + x, \end{aligned}$$

où x est d'après le lemme 2.2 une somme de permutations dont le type de connexité est plus grand (i. e. la composition est moins fixe) que celui de $\alpha_1 \square \cdots \square \alpha_k$. Ces derniers ont tous même type de connexité τ , et sont plaxiquement équivalents, dans la classe c . Donc $c_1 * \cdots * c_k = c+$ des classes dont toutes les permutations ont un type plus grand que τ , ce qui démontre le lemme. \square

Nous décrivons maintenant l'autre structure d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}T$. Nous la construisons comme quotient de $(\mathbb{Z}S, *, \delta')$.

Théorème 3.4. *Le sous-module I de $\mathbb{Z}S$ engendré par les éléments $\alpha - \beta$, $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \sim \beta$, est un idéal et un co-idéal de $(\mathbb{Z}S, *, \delta')$. L'algèbre de Hopf quotient $\mathbb{Z}S/I$ est canoniquement en dualité avec $\mathbb{Z}C$, dont la base des classes $(c)_{c \in C}$ admet la base duale $(\alpha_c \text{ mod. } I)_{c \in C}$, pour tout choix des α_c dans c .*

Preuve. Visiblement, I est l'orthogonal dans $\mathbb{Z}S$ pour \langle, \rangle de $\mathbb{Z}C$. C'est un fait général que l'orthogonal d'une sous-algèbre de Hopf est un idéal et un co-idéal de l'algèbre de Hopf duale. Du reste, on vérifiera sans peine ce fait ici, car $\alpha \sim \beta$ implique que:

- (i) $\alpha *' \gamma - \beta *' \gamma$ et $\gamma *' \alpha - \gamma *' \beta$ sont chacun somme de $u - v$, $u \sim v$, et
- (ii) $\delta'(\alpha - \beta)$ est une somme de $(u - v) \otimes w$ et de $w \otimes (u - v)$, avec $u \sim v$.

La première condition exprime que I est un idéal, et la seconde que $\delta'(I) \subseteq I \otimes \mathbb{Z}S + \mathbb{Z}S \otimes I$, i. e. I est un co-idéal.

Le reste du théorème en découle. \square

Comme on a l'isomorphisme de \mathbb{Z} -modules $\mathbb{Z}T \simeq \mathbb{Z}S/I$ (à chaque tableau t est associé $\alpha \text{ mod. } I$, où α est choisi quelconque dans la classe plaxique de t), on obtient une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}T$, notée $*'$ et δ' .

Remarque. $\mathbb{Z}T$ avec le produit $*'$ n'est ni commutative, ni une algèbre associative libre. On a en effet dans $\mathbb{Z}S$: $312 *' 1 = 3124 + 4123 + 4132 + 4231$ et $1 *' 312 = 4312 + 3412 + 2413 + 1423$ et ces deux éléments ne sont pas égaux mod. I . De plus, on a $1 *' 21 = 132 + 231 + 321 \equiv 312 + 213 + 321 \pmod{I} = 21 *' 1$. Si $\mathbb{Z}S/I$ était une algèbre associative libre, il faudrait d'après le théorème de Bergman [1] que 1 et 21 mod. I soient dans une sous-algèbre monogène de $\mathbb{Z}S/I$. Mais ceci n'est pas possible, parce que $\mathbb{Z}S/I$ est gradué, que $1 *' 1 = 12 + 21$ et que $12 \not\equiv 21 \pmod{I}$.

4. Homomorphismes. Soit α dans S_n . Désignons par w_n l'élément $n \dots 21$ de S_n . Nous notons $\alpha \circ \beta$ le produit dans le groupe symétrique S_n .

Théorème 4.1. *L'application linéaire $\alpha \mapsto \alpha \circ w_n$ (resp. $\alpha \mapsto w_n \circ \alpha$), $\alpha \in S_n$, est un automorphisme pour $*$ et δ' (resp. $*'$ et δ) et un anti-automorphisme pour $*'$ et δ (resp. $*$ et δ'). En particulier, $\alpha \mapsto w_n \circ \alpha \circ w_n$ est un anti-automorphisme pour les deux structures d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}S$.*

On notera que $\alpha \circ w_n$ est (en mot) l'image miroir de α , alors que $w_n \circ \alpha$ est obtenu en remplaçant dans le mot α chaque i par $n + 1 - i$.

Preuve. D'après (2.1) et (2.2), comme θ échange les deux applications et que chacune d'elles est sa propre adjointe pour \langle, \rangle , il suffit de montrer que la première (soit φ) est un automorphisme pour $*$ et un anti-automorphisme pour δ .

On a $\varphi(\alpha * \beta) = \varphi(\alpha \sqcup \bar{\beta}) = \varphi(\alpha) \sqcup \varphi(\bar{\beta})$ (puisque l'image miroir est un automorphisme pour le mélange) $= \varphi(\alpha) \sqcup \overline{\varphi(\beta)} = \varphi(\alpha) * \varphi(\beta)$. Soit τ l'application qui échange les facteurs dans $\mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S$. Alors $\tau\delta\varphi(\alpha) = \sum_{uv=\varphi\alpha} st(v) \otimes st(u) = \sum_{\alpha=xy} st(\varphi x) \otimes st(\varphi y) = \sum_{\alpha=xy} \varphi st(x) \otimes \varphi st(y) = (\varphi \otimes \varphi)\delta(\alpha)$, ce qui prouve que φ est un anti-automorphisme pour δ . \square

Nous allons voir que l'évacuation des tableaux, définie par Schützenberger [11], est un anti-automorphisme pour les structures d'algèbre de Hopf de $\mathbb{Z}T$. Rappelons par un exemple comment est définie la *promotion* d'un tableau sur $\{1, \dots, n\}$: on définit la *traînée*, et l'on fait glisser vers le bas les éléments dans la traînée, en remplaçant le dernier par $n+1$; on obtient alors un tableau sur $\{2, \dots, n+1\}$, qu'on standardise: voir figure 4.1.

$$\begin{array}{ccc} 8 & & 8 & & 7 \\ \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{7} & \longrightarrow & 4 & 7 & 9 & \xrightarrow{st} & 3 & 6 & 8 \\ \textcircled{1} & 3 & 5 & 6 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

Figure 4.1

La k -promotion d'un tableau t sur $\{1, \dots, n\}$, $k \leq n$, est l'opération qui consiste à appliquer la promotion à son sous-tableau sur $\{1, \dots, k\}$. L'évacuation de t est l'opération qui consiste à appliquer successivement la n -promotion, puis la $(n-1)$ -promotion etc, jusqu'à la 1-promotion. Notons $ev(t)$ le tableau évacué de t , et $tr(t)$ le tableau transposé de t . Les deux opérations sont involutives [11].

Théorème 4.2. *L'automorphisme linéaire $t \mapsto tr(t)$ de $\mathbb{Z}T$ est un automorphisme pour $*$ et δ' et un anti-automorphisme pour $*'$ et δ . L'automorphisme linéaire $t \mapsto ev(t)$ de $\mathbb{Z}T$ est un anti-automorphisme pour ces deux structures d'algèbre de Hopf.*

Preuve. Comme $\mathbb{Z}C$ est une sous-algèbre de Hopf de $\mathbb{Z}S$, stable sous $\alpha \mapsto \alpha \circ w_n$ (puisque l'image miroir d'une classe plaxique est une classe plaxique), le théorème 4.1 montre que cette application induit un automorphisme pour $*$ et un anti-automorphisme pour δ . De plus, d'après un théorème de Schensted [10], $tg(\alpha \circ w_n) = tr(tg(\alpha))$. On déduit l'assertion pour $*$ et δ . Celle pour $*'$ et δ' en découle par dualité.

Démontrons la seconde pour $(\mathbb{Z}T, *, \delta)$: le reste découlera par dualité. Il est facile de voir que $\alpha \mapsto w_n \circ \alpha \circ w_n$ transforme une classe plaxique en une classe plaxique (voir la remarque qui suit le théorème 4.1). Donc la restriction de cette application à $\mathbb{Z}C$ est un anti-automorphisme de cette algèbre de Hopf, d'après le théorème 4.1. Mais un théorème de Schützenberger [11] affirme que $tg(w_n \circ \alpha \circ w_n)$ est le tableau obtenu par évacuation du tableau $tg(\alpha)$. Le théorème en découle. \square

Notons $p(\alpha)$ la *composition de descentes* de α et $F_{p(\alpha)}$ la fonction quasi-symétrique associée, avec les notations de Gessel [4]; $QSym$ désigne l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques, Λ l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques, et Σ l'algèbre de Hopf des descentes.

L'application $\alpha \mapsto F_{p(\alpha)}$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf de $(\mathbb{Z}S, *, \delta)$ dans $QSym$; l'application adjointe est l'injection canonique de Σ dans $\mathbb{Z}S$:

c'est un homomorphisme injectif d'algèbre de Hopf de Σ dans $(\mathbb{Z}S, *, \delta')$. Pour ces résultats voir [8].

Théorème 4.3.

- (i) L'application linéaire $(\mathbb{Z}T, *, \delta) \rightarrow \Lambda$ qui envoie un tableau t de forme λ sur la fonction de Schur s_λ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf.
- (ii) L'application linéaire $\Lambda \rightarrow (\mathbb{Z}T, *, \delta')$ qui envoie la fonction de Schur s_λ sur la somme des tableaux de forme λ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Hopf.
- (iii) L'application linéaire $(\mathbb{Z}T, *, \delta) \rightarrow (\mathbb{Z}S, *, \delta)$ qui envoie un tableau t sur $\sum_{tg(\alpha)=t} \alpha$ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Hopf.
- (iv) L'application linéaire $(\mathbb{Z}S, *, \delta') \rightarrow (\mathbb{Z}T, *, \delta')$ qui envoie une permutation α sur $tg(\alpha)$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf.

Ces applications et quelques autres sont schématisées dans la figure 4.2. Pour d'autres propriétés de la fonction $\Sigma \twoheadrightarrow \Lambda$, voir [12], [4], [2].

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}S, *, \delta & \twoheadrightarrow & QSym & & \mathbb{Z}S, *, \delta' & \longleftarrow & \Sigma \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}T, *, \delta & \twoheadrightarrow & \Lambda & & \mathbb{Z}T, *, \delta' & \longleftarrow & \Lambda
 \end{array}$$

Figure 4.2

Preuve. (i) Cette application est la restriction à $\mathbb{Z}C$ (isomorphe à $\mathbb{Z}T$ avec $*$ et δ) de l'application $\mathbb{Z}S \rightarrow QSym$ décrite avant le théorème. Le fait que t est envoyé sur s_λ , i. e. que $s_\lambda = \sum_{tg(\alpha)=t} F_{p(\alpha)}$ est démontré dans [13].

(ii) Cette application est l'adjointe de la précédente.

(iii) et (iv) sont des reformulations de la définition des structures d'algèbres de Hopf de $\mathbb{Z}T$. \square

5. Description par jeu de taquin des produits et coproduits. Pour le jeu de taquin, introduit et étudié par Schützenberger, nous renvoyons à [9].

a. Le produit $*$. Soient t_1, t_2 deux tableaux sur $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, p\}$. Alors $t_1 * t_2$ est la somme de tous les tableaux t obtenus de la manière suivante: pour toute partition $\{1, \dots, n+p\} = I \cup J$, $|I| = n$, $|J| = p$, on note t'_1 (resp. t'_2) le tableau à entrées dans I (resp. J) qu'on obtient en appliquant à t_1 (resp. t_2) l'unique application injective croissante $\{1, \dots, n\} \rightarrow I$ (resp. $\{1, \dots, p\} \rightarrow J$). On place t'_1 au-dessus et à gauche de t'_2 de manière à obtenir un tableau gauche. Puis on applique le jeu de taquin à ce tableau gauche, et le tableau normal obtenu est t .

On sait en effet, d'après Schützenberger, que l'unique tableau normal ainsi obtenu est $tg(uv)$, si $tg(u) = t'_1$, et $tg(v) = t'_2$. Ceci montre que la règle précédente ne fait que traduire le produit dans $\mathbb{Z}S/I$. Voir figure 5.1.

b. Le coproduit δ' . Soit t un tableau sur $\{1, \dots, n\}$. Alors $\delta'(t)$ est la somme de tous les $t_1 \otimes t_2$ obtenus de la manière suivante: pour tout $i = 0, \dots, n$, t_1 est le sous-tableau

de t des entrées dans $\{1, \dots, i\}$ et t_2 s'obtient en redressant par jeu de taquin le tableau gauche sur $\{i + 1, \dots, n\}$ et en standardisant le tableau normal obtenu.

On sait en effet que la congruence plaxique est compatible aux restrictions d'intervalles. De plus, il en est ainsi du jeu de taquin: par suite, le redressé du sous-tableau de $tg(\alpha)$ correspondant à un sous-intervalle I de $\{1, \dots, n\}$ est $tg(\alpha')$, où $\alpha' = \alpha_I$. La règle ci-dessus ne fait donc que traduire la définition de δ' dans $\mathbb{Z}T/I$. Voir figure 5.2.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} 12 \\ 34 \end{array} + \begin{array}{c} 13 \\ 24 \end{array} + \begin{array}{c} 14 \\ 23 \end{array} + \begin{array}{c} 23 \\ 14 \end{array} + \begin{array}{c} 24 \\ 13 \end{array} + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \\ = & \begin{array}{c} 1 \\ 234 \end{array} + \begin{array}{c} 13 \\ 24 \end{array} + \begin{array}{c} 14 \\ 23 \end{array} + \begin{array}{c} 23 \\ 14 \end{array} + \begin{array}{c} 24 \\ 13 \end{array} + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \\ = & 1234 + \begin{array}{c} 3 \\ 124 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 123 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ 134 \end{array} + \begin{array}{c} 24 \\ 13 \end{array} + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \end{aligned}$$

le produit $12 *' 12$

Figure 5.1

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \otimes \varepsilon + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \otimes 5 + \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} + 1 \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 25 \end{array} + \varepsilon \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \\ = & \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \otimes \varepsilon + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \otimes 1 + \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \otimes 12 + 12 \otimes 123 + 1 \otimes \begin{array}{c} 2 \\ 134 \end{array} + \varepsilon \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \end{aligned}$$

le coproduit $\delta' \left(\begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \right)$

Figure 5.2

c. Le produit $*$. Le produit $t_1 * t_2$ est égal à la somme de tous les tableaux t obtenus de la manière suivante: si $|t_1| = n$, on augmente chaque entrée de t_2 de n , et on note $\overline{t_2}$ le tableau obtenu; soit λ la forme de t_1 . On déforme $\overline{t_2}$ par jeu de taquin, de toutes les manières possibles, jusqu'à obtenir un tableau gauche t'_2 de forme extérieure λ ; on recolle alors t'_2 sur t_1 , pour obtenir t .

La validité de cette règle se déduit par dualité de celle pour δ' . Elle est aussi implicite dans [6] et nous a été expliquée par A. Lascoux. Voir figure 5.3.

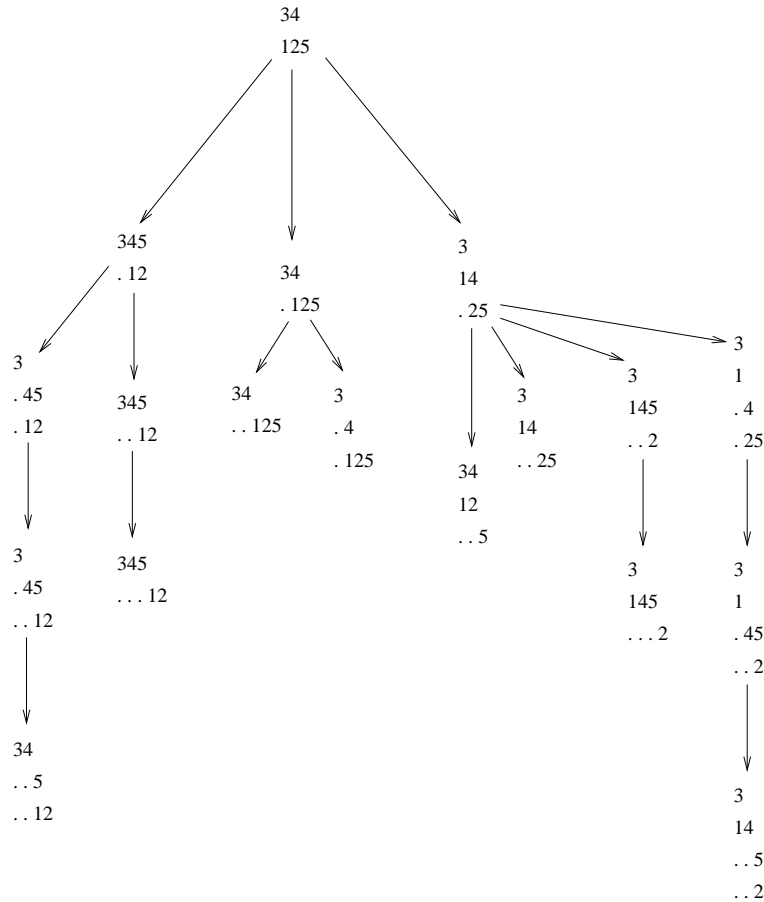
$$\begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} * \begin{array}{c} 123 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ 12456 \end{array} + \begin{array}{c} 34 \\ 1256 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 35 \\ 126 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 1256 \end{array}$$

Le produit $*$

Figure 5.3

d. Le coproduit δ . On déforme t de toutes les manières possibles par jeu de taquin, de manière à obtenir un tableau gauche formé de deux sous-tableaux t_1 et t_2 , avec t_1 en-haut et à gauche de t_2 ; $\delta(t)$ est alors la somme de tous les $st(t_1) \otimes st(t_2)$.

On obtient cette règle par dualité à partir de celle pour $*$ '. Voir figure 5.4.



$$\delta \left(\begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \right) = \begin{array}{l} \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} + 1 \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} + 12 \otimes \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} + 123 \otimes 12 + 12 \otimes 123 \\ + 1 \otimes \begin{array}{c} 3 \\ 124 \end{array} + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \otimes 1 + \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} \otimes 12 + \begin{array}{c} 2 \\ 134 \end{array} \otimes 1 + \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Le coproduit δ

Figure 5.4

e. Le produit \square . Le tableau $t \square t'$ s'obtient en remplaçant d'abord chaque i dans t' par $i + |t|$, puis en faisant glisser horizontalement les lignes du tableau $\overline{t'}$ obtenu vers la gauche, de manière à obtenir un tableau.

On vérifie en effet, que si on place t en haut et à gauche de $\overline{t'}$, on peut simuler l'opération ci-dessus par jeu de taquin. Donc, si t, t' correspondent à α, α' , le tableau obtenu correspond à $\alpha \square \alpha'$. Voir figure 5.5.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 5 \\ 46 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} 7 \\ 35 \\ 1246 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 3 \\ 12 \\ 7 \\ 5 \\ 46 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} 3 \\ 127 \\ 5 \\ 46 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} 37 \\ 125 \\ 46 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} 7 \\ 35 \\ 1246 \end{array}
 \end{array}$$

Le produit $\begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \square \begin{array}{c} 4 \\ 13 \end{array}$

Figure 5.5

6. Applications.

Théorème 6.1. *Soit t un tableau de forme λ sur $\{1, \dots, k\}$. Le nombre de permutations dans S_n ayant t comme sous-tableau de leur tableau gauche est $\frac{n!}{k!} f_\lambda$ si $n \geq k$.*

Ici, f_λ désigne le nombre de tableaux de forme λ . On remarquera que ce résultat peut aussi se démontrer directement à partir de l’algorithme de Robinson-Schensted.

Preuve. Nous travaillons dans l’algèbre complétée de $(\mathbb{Z}S, *)$, par rapport à sa graduation. Elle contient le complété de $\mathbb{Z}C \simeq \mathbb{Z}T$. Soit T la somme de tous les tableaux, T' la somme de tous les tableaux ayant t comme sous-tableau. La description du produit $*$ en 5.c montre qu’on a $T' = t * T$; il faut remarquer que ce produit est sans multiplicité, car si t'' apparaît dans $t * t'$, on retrouve t'' par projection de t' sur un intervalle et jeu de taquin. Si nous écrivons l’équation précédente dans $\mathbb{Z}S$, nous obtenons $S' = c * S$, où S est la somme de toutes les permutations, c la somme des permutations dont le tableau gauche est t et S' la somme des permutations dont le tableau gauche contient t .

Appliquons à cette dernière équation l’homomorphisme qui envoie un tableau de poids n sur $x^n/n!$. Nous obtenons $\sum_n a_n x^n/n! = (f_\lambda x^k/k!) 1/(1-x)$, où a_n est le nombre cherché. Par suite, $a_n = f_\lambda n! / k!$, si $n \geq k$. \square

Le fait que S et T soient des monoïdes libres implique que leurs séries génératrices $\sum_{n \geq 0} n! x^n$ et $g = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ($b_n =$ nombre de tableaux, ou involutions) sont de la forme $(1 - \sum_{n \geq 1} a_n x^n)^{-1}$, où les a_n sont des entiers naturels. Dans le deuxième cas, a_n est le nombre de tableaux connexes, ou d’involutions connexes. Par ailleurs, si les nombres α_n et c_n sont définis par $\prod_{n \geq 1} (1/1 - x^n)^{\alpha_n} = g$ et $\sum_{n \geq 1} c_n x^n = xg'/g$, alors ces nombres sont aussi des entiers naturels, pour la même raison. Le calcul expérimental (voir figure 6.1) montre que $c_n = a_{n+2}$. Si l’on admet cette relation, on trouve:

$$\begin{aligned}
 xg'/g &= \sum_{n \geq 1} c_n x^n \\
 &= \sum_{n \geq 1} a_{n+2} x^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{-2} \left(\sum_{n \geq 1} a_{n+2} x^{n+2} \right) \\
 &= x^{-2} \left(\sum_{n \geq 1} a_n x^n - a_1 x - a_2 x^2 \right) \\
 &= x^{-2} (1 - g^{-1} - x - x^2),
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'équation différentielle satisfaite par la série génératrice *ordinaire* g des involutions:

$$g(1 - x - x^2) = 1 + x^3 g'.$$

Cette équation différentielle se démontre en utilisant la formule de récurrence bien connue $b_n = b_{n-1} + (n - 1)b_{n-2}$, donnant le nombre d'involutions. Nous donnons en figure 6.1 la table des nombres a_n, b_n, c_n, α_n dans le cas des tableaux.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n (tableaux)	1	1	2	4	10	26	76	232	764	2620	9496
a_n (tableaux connexes)		1	1	1	3	7	23	71	255	911	3535
c_n		1	3	7	23	71	255	911	3535	13903	57663
α_n		1	1	2	5	14	41	130	439	1544	5759

Figure 6.1

Remerciements. Les auteurs remercient Alain Lascoux pour une discussion téléphonique éclairante sur le mélange des classes plaxiques.

Extended english abstract. Let $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ the disjoint union of all symmetric groups and $\mathbb{Z}S$ the free \mathbb{Z} -module over S . If $\alpha \in S_n$ and $\beta \in S_p$, let $\overline{\beta}$ be the word obtained by adding \overline{n} to each digit in the word β ; then $\alpha * \beta$ is by definition the shuffle product $\alpha \sqcup \overline{\beta}$. For a word u on $\{1, 2, \dots\}$, without repeated letters, denote by $st(u)$ the word on $\{1, 2, \dots, |u|\}$ obtained by applying to the letters in u the unique injective mapping from the set of letters in u onto $\{1, 2, \dots, |u|\}$. Then by definition $\delta(\alpha) = \sum st(u) \otimes st(v)$, where the sum is over all u, v such that α is the concatenation uv . Then $*$ and δ as above define a product and a coproduct on $\mathbb{Z}S$, which give to it a structure of graded bialgebra [8].

We also define another product $'$ and coproduct δ' . They may also be defined by Eq. (2.1), or Eq. (2.2).

In Th. 2.1, we assert that $\mathbb{Z}S$, with either product, is a free associative algebra, freely generated by the connected permutations, *i. e.* permutations which do not belong to a proper Young subgroup.

Let T be the set of standard Young tableaux. We know that two permutations α, β have the same left tableau in the Robinson-Schensted, if and only if $\alpha \sim \beta$, where

\sim is the plactic congruence, generated by the Knuth relations. Thus we may identify a tableau with the sum in $\mathbb{Z}S$ of the corresponding plactic class. Then $\mathbb{Z}T$, the free \mathbb{Z} -module on T , is a submodule of $\mathbb{Z}S$.

In Th. 3.1, we assert that $\mathbb{Z}T$ is a sub-bialgebra of $\mathbb{Z}S$. In Th. 3.2, we show that $\mathbb{Z}T$ is a free associative algebra, freely generated by connected tableaux, which are tableaux whose plactic class have only connected permutations.

In Th. 3.4, we assert that the differences $\alpha - \beta$, $\alpha \sim \beta$, span a submodule I of $\mathbb{Z}S$ which is an ideal for $*$ ' and a co-ideal for δ' . Hence, by taking quotient, we obtain a second structure of bialgebra on $\mathbb{Z}T$, which is dual to the previous one.

Th. 4.2 asserts that evacuation is an anti-automorphism for these two bialgebra structures on $\mathbb{Z}T$. In Th. 4.3, we describe several homomorphisms, involving descent algebra and symmetric and quasi-symmetric functions. In Sect. 5, we describe these products and coproducts on $\mathbb{Z}T$ by jeu de taquin.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. M. Cohn, *Free rings and their relations*, Academic Press, London, 1985.
2. A. Garsia and C. Reutenauer, *A decomposition of the Solomon descent algebra*, Adv. Math. **77** (1989), 189–262.
3. I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh and J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, à paraître dans Adv. Math.
4. I. Gessel, *Multipartite P -partitions and inner product of skew Schur functions*, Contemp. Math. **34** (1984), 289–301.
5. D. E. Knuth, *Permutation matrices and generalized Young tableaux*, Pacific J. Math. **34** (1970), 709–727.
6. A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, *The plactic monoid*, manuscrit disponible chez A. Lascoux (1980).
7. A. Lascoux et M.-P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics (A. de Luca, ed.), CNR, Roma, 1981, pp. 129–156.
8. C. Malvenuto, C. Reutenauer, *Duality between the Solomon descent algebra and quasi-symmetric functions*, à paraître dans J. Algebra.
9. B. Sagan, *The symmetric group: representations combinatorial algorithms and symmetric functions*, Wardsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1991.
10. C. Schensted, *Longest increasing subsequences*, Canad. J. Math. **13** (1961), 179–191.
11. M.-P. Schützenberger, *Quelques remarques sur une construction de Schensted*, Math. Scand. **12** (1963), 117–128.
12. L. Solomon, *A Mackey formula in the group ring of a finite Coxeter group*, J. Algebra **41** (1976), 255–268.
13. G. P. Thomas, *Frames, Young tableaux and Baxter sequences*, Adv. Math. **26** (1977), 275–289.

S. POIRIER ET C. REUTENAUER
 UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 CASE POSTALE 8888, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
 MONTRÉAL QC H3C 3P8
 CANADA