ALGÈBRE. – *Une caractérisation des anneaux de Fatou faibles.*

Note (*) de **Christophe Reutenauer,** transmise par M. Marcel-Paul Schutzenberger.

On caractérise les extensions d'anneaux commutatifs intègres qui sont des extensions de Fatou, et en particulier les anneaux de Fatou faibles.

We characterise Fatou extensions of commutative entire rings, and in particular weak Fatou rings.

I. Introduction. – La notion d'anneau de Fatou et plus généralement d'extension de Fatou a été introduite par B. Benzaghou ([1]). Cahen et Chabert ont donné une caractérisation de ces anneaux ([2]). Dans le cas de plusieurs variables non commutatives, on distingue, d'après M. Fliess ([3]), les anneaux de Fatou forts, examinés par M. Fliess et par E. D. Sontag et Y. Rouchaleau ([5]), et les anneaux de Fatou faibles.

Nous établissons ici que les anneaux de Fatou faibles sont exactement ceux décrits par Cahen et Chabert.

II. Séries reconnaissables. – Soit X^* le monoïde libre engendré par un alphabet (fini non vide) X. Pour tout anneau commutatif unitaire A, on note A « X » la A-algèbre des séries formelles à coefficients dans A en les indéterminées non commutatives $x \in X$. Si $S \in A$ « X », on note (S, w) le coefficient de $w \in X^*$.

$S \in A$ « X » est dite A-*reconnaissable* s'il existe $n \geqq 1$, un homomorphisme $\mu : X^* \to \mathcal{M}_n(A)$, $\lambda \in \mathcal{M}_{1,\,n}(A)$ et $\gamma \in \mathcal{M}_{n,\,1}(A)$ tels que :

$$(\star) \qquad \forall w \in X^*, \quad (S, w) = \lambda \,.\, \mu w \,.\, \gamma.$$

On montre aisément qu'une série S est A-reconnaissable si et seulement s'il existe une A-algèbre unitaire $\mathfrak{M}$, qui est un A-module de type fini, un homomorphisme $\mu : X^* \to \mathfrak{M}$ et une forme linéaire $\varphi : \mathfrak{M} \to A$ tels que

$$\forall w \in X^*, \quad (S, w) = \varphi(\mu w).$$

III. Anneaux de Fatou faibles. – Si A a un corps de fractions K, on dit, avec M. Fliess [([3]), II . 2. *a*], que A est un *anneau de Fatou faible* si pour tout alphabet X, toute série K-reconnaissable sur X et à coefficients dans A est A-reconnaissable. Cahen et Chabert ([2]) ont étudié la propriété analogue lorsqu'on se restreint aux alphabets à une seule lettre. Rappelons que $x \in L$ (L un surcorps de K) est dit *quasi entier* sur A si A $[x]$ est contenu dans un A-module de type fini contenu dans L.

On a alors la caractérisation suivante :

Théorème 1. – A *est un anneau de Fatou faible si et seulement si tout* $x \in K$, *quasi entier sur* A, *est entier sur* A.

Ce résultat a déjà été établi dans le cas particulier des séries reconnaissables d'une variable par Cahen et Chabert. Nous prouvons donc que la même caractérisation vaut dans le cas général.

Preuve. – Soit $S \in A$ « X » une série K-reconnaissable.

D'après [([3]), th. 2 . 1 . 1] il existe $n \geqq 1$, un homomorphisme $\mu : X^* \to \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in \mathcal{M}_{n,\,1}(K)$, $\gamma \in \mathcal{M}_{n,\,1}(K)$ tels qu'on ait la relation $(\star)$ et $d \in A \setminus 0$ tel que : $d\mu X^* \subset \mathcal{M}_n(A)$.

Soit $\mathfrak{M}$ la A-algèbre engendrée par μX^*. On a : $d\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}_n(A)$. En vertu du lemme ci-dessous, pour tout $m \in \mathfrak{M}$, les coefficients du polynôme caractéristique de m sont quasi entiers sur A. Par suite, si A vérifie la condition de l'énoncé m est entier sur A. Or $\mathfrak{M}$, en tant que sous-anneau de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifie une identité polynômiale propre [(4), chap. 1, th. 5.2] et c'est une A-algèbre de type fini; d'après un théorème de I. A. Širšov [*voir* (4), chap. II, prop. 7.6, et (2) chap. VI, addendum th. 3] $\mathfrak{M}$ est un A-module de type fini donc d'après la dernière remarque du paragraphe II, S est A-reconnaissable.

La nécessité de la condition découle de (2). Comme cas particulier, on obtient le :

COROLLAIRE. – Si A est noetherien, A est un anneau de Fatou faible.

LEMME. – *Soient* $m \in \mathfrak{M}_n(K)$ *et* $d \in A \setminus 0$ *tels que pour tout entier* $k \geq 0$ *on ait* $dm^k \in \mathcal{M}_n(A)$; *alors les coefficients du polynôme caractéristique de m sont quasi entiers sur* A.

Preuve. – Soit $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[t]$ le polynôme caractéristique de m; soit $d' \in A \setminus 0$ un dénominateur commun aux a_i. Si λ est une valeur propre de m, alors $d'^n \lambda$ est entier sur A donc $B = A[d'^n \lambda]$ est un A-module de type fini. Le corps des fractions L de B contient λ donc il existe $q \in GL_n(L)$ tel que :

$$m' = q^{-1} m q = \begin{bmatrix} \lambda & x & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & X & & X \end{bmatrix}.$$

Soit $d'' \in B$ un dénominateur commun aux coefficients de q et q^{-1}. On a

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad (d''^2 d) m'^k = (d'' q^{-1})(dm^k)(d'' q) \in \mathcal{M}_n(B).$$

Par suite, $(d''^2 d) \lambda^k \in B$, donc $A[\lambda] \subset (d''^{-2} d^{-1}) B$. λ est donc quasi entier sur A. Il en est ainsi de toutes les valeurs propres de m et il suit de là et de [(2), cor. 1.5] que les coefficients de P sont quasi entiers que A.

IV. EXTENSIONS DE FATOU. – Soient $B \supset A$ deux anneaux commutatifs unitaires. B est *extension de Fatou* de A si pour tout alphabet X, toute série B-reconnaissable sur X et à coefficients dans A est A-reconnaissable. Le résultat suivant, inspiré de [(2), th. 4.3], caractérise les extensions de Fatou lorsque A et B sont intègres (ce que nous supposerons dans la suite; K est le corps des fractions de A).

THÉORÈME 2. – B *est extension de Fatou de* A *si et seulement si tout* $x \in K$, *entier sur* B *et quasi entier sur* A, *est entier sur* A.

La preuve s'inspire de celle du théorème 1. On a en particulier :

COROLLAIRE. – *Si* B *est entier sur* A, B *est extension de Fatou de* A.

(*) Séance du 19 juin 1978.

(1) B. BENZAGHOU, *Bull. Soc. math. Fr.*, 98, 1970, p. 209-252.
(2) P. J. CAHEN et J. L. CHABERT, *J. Algebra*, 36, 1975, p. 185-192.
(3) M. FLIESS, *J. Maths. pures appl.*, 53, 1974, p. 197-222.
(4) C. PROCESI, *Rings with Polynomial Identities*, Dekker, New York, 1973.
(5) E. D. SONTAG et Y. ROUCHALEAU, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 331.

Institut de Programmation, 4, *place Jussieu*, 75005 *Paris*.