INFORMATIQUE THÉORIQUE. — *Une caractérisation de la finitude de l'ensemble des coefficients d'une série rationnelle en plusieurs variables non commutatives.* Note (*) de **Christophe Reutenauer**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On démontre qu'une représentation du monoïde libre X^* engendré par l'alphabet fini X, par des $N \times N$ matrices à éléments dans un corps commutatif k, est d'image finie si et seulement si sa restriction à toute partie de X^* de la forme $f' f^* f''$ (avec $f, f', f'' \in X^*$) est d'image finie, et on donne des applications aux séries rationnelles.

We prove that any representation μ *of the free monoid* X^* *(X finite) into the set of* $N \times N$ *matrices on a field, has a finite range if and only if the restriction of* μ *to each set* $f' f^* f''$ $(f, f', f'' \in X^*)$ *has a finite range, and we present applications to rational series.*

I. Les séries rationnelles en variables non commutatives, introduites par M. P. Schützenberger [*cf.* (7)] ont des propriétés arithmétiques voisines de celles en une variable [*cf.* (2)]. Nous présentons ici une technique qui permet d'étendre au cas de plusieurs variables des propriétés classiques des séries rationnelles en une variable.

Soient X un ensemble fini non vide, X^* le monoïde libre engendré par X, et k un corps commutatif. Nous commençons par caractériser les représentations $\mu : X^* \to \mathcal{M}_N(k)$ dont l'image est finie, et ensuite, utilisant un théorème de M. P. Schützenberger, qui fait le lien entre représentations et séries, nous passons au cas des séries.

II. Nous dirons que la représentation $\mu : X^* \to \mathcal{M}_N(k)$ est irréductible, s'il n'existe pas de sous-espace propre de k^N stable sous tous les $\mu f\,(f \in X^*)$. L'image μX^* de μ engendre alors dans $\mathcal{M}_N(k)$ une k-algèbre $\mathfrak{M}$ irréductible : on sait que sur $\mathfrak{M}$ la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est non dégénérée.

PROPOSITION 1. — *Soit* μ *une représentation irréductible* $X^* \to \mathcal{M}_N(k)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) μX^* *est fini;*

(ii) $\forall f \in X^*$, $\{ \mu f^k \mid k \in N \}$ *est fini;*

(iii) $\{ \mathrm{Tr}(\mu f) \mid f \in X^* \}$ *est fini.*

Cette proposition est une extension d'un théorème de Schützenberger [(8), p. 99]

Preuve. — (i) $\Rightarrow$ (ii) est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $f \in X^*$, et λ une valeur propre de μf. Alors $\{ \lambda^k \mid k \in N \}$ est fini, donc λ est soit nul, soit une racine de l'unité. Alors λ appartient à un ensemble fini indépendant de f. (L'ensemble des racines de l'unité qui sont valeur propre d'un élément d'un semi-groupe de type fini de matrices, est fini [*cf.* (4) ou (5)].)

Donc $\{ \mathrm{Tr}(\mu f) \mid f \in X^* \}$ est fini.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $\mathfrak{M}$ la k-algèbre engendrée par les $\mu f\,(f \in X^*)$, et $(\mu f_j)_{1 \leq j \leq N'}$ une base du k-espace vectoriel $\mathfrak{M}$.

Soit R la relation d'équivalence sur X^* définie par

$$f' R f'' \iff \forall j, \quad \mathrm{Tr}(\mu f_j f') = \mathrm{Tr}(\mu f_j f'').$$

Par hypothèse, R est d'indice fini; de plus, si $f' \, R \, f''$, alors :

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \qquad \mathrm{Tr}(A.(\mu f' - \mu f'')) = 0.$$

D'après une remarque précédente, on a alors : $\mu f' = \mu f''$; donc μX^* est fini.

PROPOSITION 2. — *Soit* μ *une représentation* $X^* \to \mathcal{M}_N(k)$, *de la forme* $\mu = \begin{pmatrix} \mu' & \nu \\ 0 & \mu'' \end{pmatrix}$ *où* μ' *et* μ'' *sont des représentations d'image finie. On suppose* k *de caractéristique nulle. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) μX^* *est fini;*

(ii) $\forall f, f', f'' \in X^*$, $\{ \mu f' f^k f'' \mid k \in \mathrm{N} \}$ *est fini.*

M. P. Schützenberger démontre cette proposition en ([8]) (p. 100) pour $k = \mathrm{Q}$, mais la preuve s'étend immédiatement.

Disons qu'une représentation μ *vérifie* (P) si elle s'écrit :

$$\text{(P)} \qquad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix}.$$

COROLLAIRE. — *Soit* μ *une représentation* $X^* \to \mathcal{M}_N(k)$ *vérifiant* (P). *On suppose* k *de caractéristique nulle, et que tous les* μ_i *sont d'image finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) μX^* *est fini;*

(ii) $\forall f, f', f'' \in X^*$, $\{ \mu f' f^k f'' \mid k \in \mathrm{N} \}$ *est fini.*

La preuve est immédiate, par récurrence sur n.

PROPOSITION 3. — *Soit* μ *une représentation* $X^* \to \mathcal{M}_N(k)$, *de la forme* $\mu = \begin{pmatrix} \mu' & \nu \\ 0 & \mu'' \end{pmatrix}$, *où* μ' *et* μ'' *sont d'image finie. On suppose* k *de caractéristique non nulle. Alors* μ *est d'image finie.*

Preuve. — Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$. On a alors la relation

$$\nu(x_1, x_2 \ldots x_p) = \sum_{1 \leq i \leq p} \mu'(x_1 \ldots x_{i-1}) . \nu x_i . \mu''(x_{i+1} \ldots x_p).$$

Donc νX^* est contenu dans l'espace vectoriel engendré par l'ensemble fini $\mu' X^* . \nu X . \mu'' X^*$ sur le corps premier de k. Celui-ci étant fini, νX^* est fini, donc μ est d'image finie.

COROLLAIRE. — *Soit* μ *une représentation* $X^* \to \mathcal{M}_N(k)$, *vérifiant* (P). *On suppose* k *de caractéristique non nulle, et que tous les* μ_i *sont d'image finie. Alors* μ *est d'image finie.*

La preuve est immédiate, par récurrence sur n.

Nous appellerons rayon une partie de X^* de la forme $f' f^* f''$ ($f', f'' \in X^*$, $f \in X^+$).

THÉORÈME 1. — *Soit* μ *une représentation* $X^* \to \mathcal{M}_N(k)$. *Alors* μ *est d'image finie si et seulement si sa restriction à tout rayon est d'image finie.*

Preuve. — On se ramène, en réduisant μ selon des sous-espaces stables sous μX^*, à la forme (P), avec des μ_i irréductibles. Supposons que la restriction de μ à tout rayon soit d'image finie. La proposition 1 implique alors que tous les μ_i sont d'image finie. On conclut alors en appliquant le corollaire à la proposition 2 si la caractéristique est nulle, et le corollaire à la proposition 3 si elle ne l'est pas.

III. Soit S une série k-rationnelle sur X^*. D'après (7) (p. 261) ou (3) il existe $N \in \mathbf{N}$, une représentation $\mu : X^* \to \mathcal{M}_N(k)$, $f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N \in X^*$, 2 N matrices $A_{ij} \in \mathcal{M}_N(k)$, φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_N(k)$, tels que :

$$\forall h \in X^*, \quad S(h) = \varphi(\mu h) \tag{1}$$

et

$$\forall h \in X^*, \quad \mu h = \sum_{i,j} A_{ij} . S(f_i h g_j). \tag{2}$$

Si la restriction de S à tout rayon est d'image finie, la relation (2) montre qu'il en est de même pour μ. Du théorème 1 et de la relation (1), on déduit alors que S est d'image finie. D'où le :

THÉORÈME 2. — *Une série k-rationnelle sur* X *est d'image finie si et seulement si sa restriction à tout rayon est d'image finie.*

IV. Donnons quelques applications de ce théorème.

COROLLAIRE 1. — *Si les coefficients non nuls d'une série* Z-*rationnelle* S *sont des nombres premiers, alors elle est d'image finie.*

Preuve. — Soient $f, f', f'' \in X^*$. Alors la série en une variable t, $T = \sum_{n > 0} S(f' f^n f'').t^n$ est Z-rationnelle. En effet, avec les notations de III, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S(f' f^n f'') = \varphi(\mu f' \, \mu f^n \, \mu f'');$$

donc la suite $S(f' f^n f'')$ vérifie une relation de récurrence linéaire, déterminée par le polynôme caractéristique de μf. Comme les coefficients non nuls de T sont des nombres premiers, d'après un théorème de Borel, T est d'image finie. Donc la restriction de S à $f' f^* f''$ est d'image finie, et ceci pour tous f, f', f''. Donc S est d'image finie.

COROLLAIRES 2 et 3. — *Si l'image d'une série* Z-*rationnelle est contenue dans* $\{ n! \mid n \in \mathbf{N} \} \cup \{ 0 \}$, *alors elle est d'image finie.*

— *Si pour un* $m \in \mathbf{N}$, *chaque coefficient d'une série* Z-*rationnelle n'admet pas plus de* m *diviseurs, alors elle est d'image finie.*

Preuve. — Le premier résultat est bien connu pour les séries rationnelles en une variable [*cf.* (6)], le second est démontré en (1). On raisonne alors comme dans la démonstration précédente.

(*) Séance du 14 mars 1977.

(1) J. Berstel, *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 693.
(2) S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, A, Acad. Press, New York, 1974.
(3) M. Fliess, *J. Math. Pures Appl.*, 53, 1974, th. 2.1.1, p. 206.
(4) G. Jacob, *I.H.P. Séminaire Dubreil*, 19e année, 1975-1976, n° 29, lemme 3.1., p. 12.
(5) I. Kaplansky, *Fields and Rings* (*Chicago Lectures in Math.*, lemma 5, p. 104).
(6) G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätzen aus der Analysis*, 2, Springer-Verlag, Berlin.
(7) M. P. Schützenberger, *Information and Control*, 4, 1961, p. 245-270.
(8) M. P. Schützenberger, *Information and Control*, 5, 1962, p. 91-107.

Institut de Programmation,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, *place Jussieu,*
75230 *Paris Cedex* 05.