Theoretical Computer Science 9 (1979) 363-375

SUR LES SERIES ASSOCIEES A CERTAINS SYSTEMES DE LINDENMAYER

Christophe REUTENAUER

Institut de Programmation et LITP, Université Pierre et Marie Curie, 75230 Paris Cedex 05, France

Communiqué par Arto Salomaa
Reçu juillet 1978
Revisé septembre 1978

1. Introduction

Récemment, de nombreux travaux ont eu pour objet l'étude de systèmes de réécriture en parallèle (cf. [14, 12]). Ces travaux ont été notamment motivés par l'interprétation biologique qui leur a été donnée par Lindenmayer [6], d'autre part la réécriture en parallèle correspond, dans le cas des 0L systèmes, à un procédé naturel en combinatoire du monoïde libre, à savoir l'application itérée d'une ou de plusieurs substitutions.

Les connaissances les plus détaillées ont été obtenues pour la famille particulière des D0L-systèmes et des langages qu'ils définissent. L'usage de méthodes mathématiques classiques, en particulière des séries rationnelles, a permis de résoudre la plupart des problèmes liés à la croissance des mots de tels langages [14, chap. III § 7 et 8]. Pour les DT0L-systèmes, qui sont définis par application itérée de plusieurs morphismes (cf. [14, chap III § 7]), la croissance est décrite par certaines séries rationnelles en plusieurs variables non commutatives.

Les travaux récents de Johansen [5] et Ochsenschläger [8] décrivent des propriétés fines des mots d'un D0L-langage. Ces auteurs montrent que les séries comptant le nombre d'occurences d'un mot fixe comme sous-mot du $n$ième mot d'un D0L-langage, sont rationnelles. Nous nous proposons ici d'étendre ce résultat aux DT0L-langages. Pour cela, nous nous plaçons dans un cadre plus général, en considérant un DT0L-système G comme une application qui associe à une série S sur un alphabet X une autre série $T=G(S)$ sur un alphabet Y. Notre résultat principal (Théorème 2) affirme que si S est une séries rationnelle à croissance polynômiale alors T est une série rationnelle. Les séries considérées par Johansen et Ochsenschläger s'obtiennent comme cas particulier de cette construction générale. Nous prouvons également que toutes ces constructions sont effectives. Nous démontrons encore un résultat sur les T0L-systèmes (Théorème 3): il montre que le langage sur Y associé par un T0L-système à un langage rationnel sur X est également rationnel.

Le résultat principal annoncé plus haut est prouvé en Section 4. Sa preuve repose sur un résultat préliminaire qui est intéressant en lui-même et qui est établi en Section 3; (Théorème 1): ce théorème décrit comme suit la structure des séries $\mathbb{N}$-rationnelles à croissance polynomiale. Toute série de cette nature est combinaison linéaire de séries simples (Lemme 2), qui sont intimemement liées aux séries binomiales attachées aux coefficients binomiaux d'Eilenberg [3, chap. VIII § 10].

On obtient ainsi l'analogue d'un résultat bien connu d'algèbre, selon lequel tout polynôme est combinaison linéaire de polynômes coefficients binomiaux. Cette décomposition d'une série à croissance polynômiale est effective. Pour le prouver, une étude détaillée des représentations de ces séries est necessaire. Cette étude, qui reprend des résultats déjà prouvés par Schützenberger [17] et qui est assez technique est donnée dans la dernière section.

2. Préliminaires

Les notions considérées ici sont développées dans le traité de Eilenberg [2] et celui de Salomaa et Soittola [14].

Soit A un *semi-anneau commutatif* avec zéro et élément unité, X un alphabet et X^* le monoïde libre engendré par X. Son élément neutre le mot vide, est noté ε. Une *série formelle* sur X à coefficients dans A est une application $X^* \to A$. L'ensemble des séries formelles est noté $A\langle\langle X\rangle\rangle$ Si $S \in A\langle\langle X\rangle\rangle$, on écrit: $S = \sum_{w\in X^*} (S, w)w$, où (S, w) est l'image de w par S. Une *polynôme* (non commutatif) est une série de support fini, i.e. n'ayant qu'un nombre fini de coefficients non nuls. L'ensemble des polynômes est noté $A\langle X\rangle$.

Définition 1. $S \in A\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite *A-reconnaissable* s'il existe un entier $n \geq 1$, un homomorphisme multiplicatif $\mu : X^* \to \mathcal{M}_n(A)$, $\lambda \in \mathcal{M}_{1,n}(A)$, $\gamma \in \mathcal{M}_{n,1}(A)$ tels que: $\forall w \in X^*$, $(S, w) = \lambda.\mu w.\gamma$.

($\mathcal{M}_{i,j}(A)$ désigne le A-module des matrices de dimension (i, j) à coefficients dans A et $\mathcal{M}_n(A) = \mathcal{M}_{n,n}(A)$).

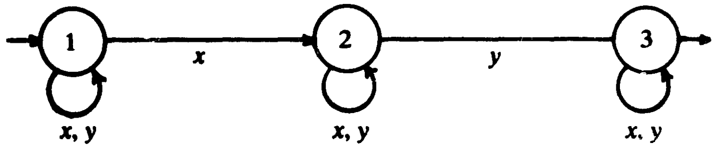
Dans ces conditions, on dit que (λ, μ, γ) est une *représentation de S* et que μ *reconnaît S*. La *dimension* de (λ, μ, γ) ou de μ est n.

Comme le montre Eilenberg [2, chap. VI § 6] la notion de représentation est équivalente à celle de A-X-automate.

Exemple 1. $X = \{x, y\}$, $A = \mathbb{N}$:

$$\mu x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = (1, 0, 0), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A la représentation μ est associée le $\mathbf{N}$-X-automate décrit par:



Nous avons besoin pour la suite d'une caractérisation des séries reconnaissables, plus générale que la Définition 1. Auparavant, remarquons que la donnée d'une structure de $A\langle X\rangle$*-module* à droite sur un ensemble $\mathfrak{M}$ équivaut à la donnée simultanée d'une structure de A*-module* et d'une structure de X^**-module à droite* (i.e. X^* opère à droite sur $\mathfrak{M}$), avec la condition de compatibilité suivante: pour tout $w \in X^*$, l'application $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $m \mapsto m.w$ est A-linéaire.

La proposition bien connue qui suit n'est qu'une reformulation de la Définition 1. Elle a l'avantage d'être indépendante d'un système de générateurs. Nous donnons sa démonstration parce que ce résultat ne se trouve pas exactement sous cette forme dans la littérature. On pourra le comparer au *module sériel* de Fliess [4, p. 207] ou à [14, chap. II, th. 3.1].

Proposition 1. *Soit $S \in A\langle\langle X\rangle\rangle$. S est A-reconnaissable si et seulement s'il existe un $A\langle X\rangle$-module à droite $\mathfrak{M}$, qui est de type fini en tant que A-module, une application A-linéaire $\varphi: \mathfrak{M} \to A$ et m_0 $\mathfrak{M}$ tels que $\forall w \in X^*$, $(S, w) = \varphi(m_0.w)$.*

Preuve. Si S est A-reconnaissable, soit (λ, μ, γ) une représentation de S. $\mathcal{M}_n(A)$ devient alors un X^*-module à droite: $(m, w) \mapsto m.\mu w$. D'après la remarque qui précède l'énoncé, $\mathcal{M}_n(A)$ est donc un $A\langle X\rangle$-module à droite, et clairement un A-module de type fini. On prend $\varphi(m) = \lambda.m.\gamma$ et $m_0 = \mu\varepsilon$. Réciproquement, soient S, $\mathfrak{M}$, φ, m_0 comme dans l'énoncé. Soient $m_1, \ldots, m_n$ des générateurs du A-module $\mathfrak{M}$. Pour tout $x \in X$ et tout i, il existe des $a_{ijx} \in A$ tels que $m_i.x = \sum_j a_{ijx} m_j$. Soit $\mu: X^* \to \mathcal{M}_n(A)$ définie par $\forall x \in X$, $\mu x = (a_{ijx})$, $1 \leq i, j \leq n$. On vérifie par récurrence sur la longueur de w que: $\forall w \in X^*$, $\forall i$, $m_i.w = \sum_j (\mu w)_{ij} m_j$.

Soient $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(A)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,1}(A)$ tels que $m_0 = \sum \lambda_i \cdot m_i$ et $\varphi(m_j) = \gamma_j$.

Alors (λ, μ, γ) est une représentation de S.

Remarque 1. La preuve montre que si l'on sait exprimer, pour tous i et x, $m_i \cdot x$ comme combinaison A-linéaire des m_j, ainsi que m_0, si de plus on connaît $\varphi(m_0)$ pour tout j, alors on peut déterminer de manière effective une représentation de S. Cette remarque nous servira dans la preuve du Théorème 2.

Rappelons que d'après le théorème de Kleene–Schützenberger (cf. [2, chap. VII, th. 5.1] une série est reconnaissable si et seulement si elle est *rationnelle* Nous utiliserons indifféremment ces deux termes dans la suite.

3. Séries N-rationnelles à croissance polynômiale

Dans ce paragraphe, nous allons établir que le N-module $\mathcal{M}_n$ engendré par les séries N-rationnelles à croissance polynômiale et de rang $\leq n$, est de type fini. Ce résultat peut être rapproché de plusieurs faits bien connus: il est essentiellement l'analogue du fait que les polynômes en plusieurs variables à coefficients non négatifs et de degré borné forment un N-module de type fini.

Nous allons donner explicitement un système fini de générateurs de $\mathfrak{M}_n$ et montrer que tous les calculs sont effectifs. En particulier, toute série $S \in \mathfrak{M}_n$ peut s'écrire effectivement comme combinaison linéaire de ces générateurs.

Définition 2. Une série $S \in \mathbf{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite *à croissance polynômiale* s'il existe des entiers $a, b \geq 1$ tels que: $\forall w \in X^*$, $w \neq \varepsilon$, $|(S, w)| \leq a|w|^b$. ($|w|$ désigne la longueur du mot w, $|(S, w)|$ la valeur absolue du nombre (S, w).)

Les séries rationnelles à croissance polynômiales on été l'objet d'une étude approfondie par Schützenberger [17] (voir aussi [16]). D'autres études sur ce sujet se trouvent chez Eilenberg [2, chap. VII § 9 ex. 1, 2, 3], Ruohonen [13, § 4] et l'auteur [10, 11].

Exemple 2. (a) $S = \sum_{w \in X^*} |w|w$ est évidemment à croissance polynômiale.

(b) Pour $w, v \in X^*$, soit $\binom{w}{v}$ le *coefficient binômial* de Eilenberg [3, chap. VIII § 10]; il désigne le nombre de fois que v apparaît comme sous-mot de w, i.e.:

$$\binom{w}{v} = \mathrm{Card}\{(u_0, u_1, \ldots, u_n) \mid w = u_0 x_1 u_1 \cdots x_n u_n,\ u_i \in X^*\}$$

avec $v = x_1 \cdots x_n$, $x_i \in X$. Si $v = \varepsilon$, alors par convention $\binom{w}{\varepsilon} = 1$.

On a alors (voir [8, II.(8)]): $\binom{w}{v} \leq \binom{|w|}{n} \leq w_\cdot^n$ et par suite la série $\sum_{w \in X^*} \binom{w}{v} w$ est à croissance polynômiale.

Définition 3. Une série $S \in \mathbf{N}\langle\langle X\rangle\rangle$ est *élémentaire d'ordre n* s'il existe un homomorphisme $\mu: X^* \to \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ et i, j, $1 \leq i, j \leq n$ tels que: $\forall w \in X^*$ $(S, w) = \mu_{i,j}(w)$.

Une telle série est N-reconnaissable puisqu'elle admet la représentation $(\lambda^{(i)}, \mu, \gamma^{(j)})$ avec $\lambda_k^{(i)} = \delta_{ik}$, $\gamma_k^{(j)} = \delta_{jk}$ (δ est le symbole de Kronecker). De plus, comme $\mu X^* \subset \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$, cette série est la série caractéristique d'un langage reconnaissable, puisque μX^* est un monoïde fini. Comme ses coefficients sont 0 et 1, elle est évidemment à croissance polynômiale.

Réciproquement, si L est un langage reconnaissable, on montre que sa série caractéristique χ_L est élémentaire dans les deux cas suivants: (i) $\varepsilon \notin L$, (ii) L est un sous-monoïde libre de X. (Pour (i) voir [2, chap. VI prop. 6.4] et pour (ii) [9, chap. II § 4 corollaire 4.3].)

Définition 4. Une *série binômiale généralisée d'ordre n* est une série de la forme $S_1x_1S_2 \cdots x_{p-1}S_p$ où $x_i \in X$ et où S_i est une série élémentaire d'ordre n_i avec $n_1+n_2+\cdots+n_p=n$. Notons B_n l'ensemble des séries binômiales généralisées d'ordre $\leq n$.

Comme les séries élémentaires sont reconnaissables, donc rationnelles et que $x \in X$ est une série rationnelle, toute série binômiale généralisée est rationnelle, donc reconnaissable.

De plus, si S désigne la série caractéristique de X^*, S est élémentaire d'ordre 1. Par suite $T = Sx_1Sx_2 \cdots x_{p-1}S$ est une série binômiale généralisée; on vérifie que: $\forall w \in X^*, (T, w) = \binom{w}{v}$ (avec $v = x_1 \cdots x_{p-1}$) est exactement le coefficient binômial de Eilenberg décrit dans l'Exemple 2(b). Ainsi se justifie la terminologie.

Par ailleurs, on a:

$$\forall w \in X^*, (S_1x_1 \cdots x_{p-1}S_p, w) \leq (Sx_1 \cdots x_{p-1}S, w) = \binom{w}{v} \leq |w|^{p-1}$$

donc toute série binômiale généralisée est à croissance polynômiale.

Lemme 1. *B_n est fini.*

Preuve. Il est clair qu'il n'y a qu'un nombre fini d'homomorphismes $\mu : X^* \to \mathcal{M}_p(\mathbb{N})$ vérifiant $\mu X^* \subset \mathcal{M}_p(\{0, 1\})$. Par suite, il n'y a qu'un nombre fini de séries élémentaires d'ordre $\leq n$. Comme X est fini, B_n est fini.

Lemme 2. *Toute série* $\mathbb{N}$*-rationnelle à croissance polynômiale donnée par une représentation de dimension $\leq n$ peut se mettre effectivement sous la forme d'une somme de séries binômiales généralisées d'ordre $\leq n$.*

Ce lemme sera démontré au Section 5.

Définition 5. Soit $S \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ et $f: X^* \to X^*$ une application. *L'image inverse de S par f*, notée $f^{-1}(S)$, est la série définie par: $\forall w \in X^*, (f^{-1}(S), w) = (S, f(w))$.

On vérifie que l'application $A\langle\langle X \rangle\rangle \to A\langle\langle X \rangle\rangle$ définie par $S \mapsto f^{-1}(S)$ est A-linéaire. De plus, si $g: X^* \to X^*$ est une autre application alors $(g \circ f)^{-1}(S) = f^{-1}(g^{-1}(S))$.

Théorème 1. *Soit $n \geq 1$ et $\mathfrak{M}_n$ le sous* $\mathbb{N}$*-module de* $\mathbb{N}\langle\langle X \rangle\rangle$ *engendré par les séries* $\mathbb{N}$*-rationnelles à croissance polynômiale et de rang $\leq n$.*

(i) *Toute série $S \in \mathfrak{M}_n$ est combinaison linéaire à coefficients dans* $\mathbb{N}$ *de séries binômiales généralisées d'ordre $\leq n$:*

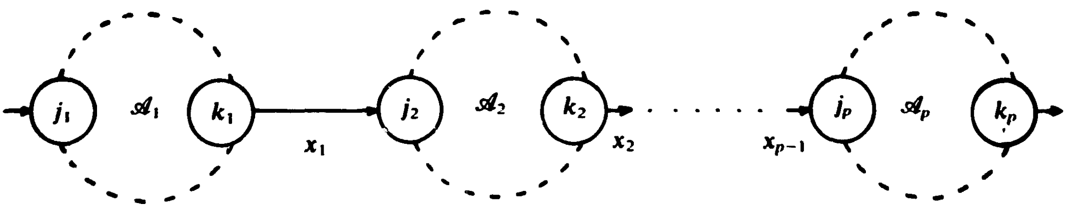
$$S = k_1 \cdot S_1 + k_2 \cdot S_2 + \cdots + k_r \cdot S_r \qquad k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}, \quad S_1, \ldots, S_r \in B_n.$$

(ii) *Si $f: X^* \to X^*$ est un homomorphisme, alors $S \in \mathcal{M}_n \Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathfrak{M}_n$.*

Preuve. (i) Soit $S = S_1 x_1 \cdots x_{p-1} S_p \in B_n$, où S_i est une série élémentaire d'ordre r_i et $\sum r_i \leq n$. D'après les remarques qui suivent la Définition 4, S est $\mathbf{N}$-reconnaissable à croissance polynômiale.

Soit $\mathcal{A}_i$ le N-X-automate associée à la représentation $(\lambda^{(j_i)}, \mu_i, \gamma^{(k_i)})$ de S_i, de dimension r_i. $\mathcal{A}_i$ a r_i états, un état initial j_i et un état final k_i.

Alors S est reconnu par le $\mathbf{N}$-X-automate $\mathcal{A}$ décrit par le schéma suivant:



L'automate $\mathcal{A}$ a $\sum r_i$ états, donc S est de rang $\leq n$. Par suite $B_n \subset \mathfrak{M}_n$. $\mathfrak{M}_n$ est engendré par B_n, d'après le Lemme 2.

(ii) Soit $S \in \mathfrak{M}_n$, de représentation (λ, μ, γ) avec $\dim(\mu) \leq n$. Alors $(\lambda, \mu \circ f, \gamma)$ est une représentation de $f^{-1}(S)$. Si S vérifie: $\forall w \in X^+$, $(S, w) \leq a|w|^b$, alors

$$(T, w) = (S, f(w)) \leq a|f(w)|^b \leq c|w|^b$$

puisque $|f(w)| \leq d|w|$ avec $d = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ et $c = ad^b$.

4. DT0L-séries

Un *DT0L-système* est un triplet $G = (X, f_1, \ldots, f_q, a)$ où X est un alphabet (fini), chaque f_i un homomorphisme $X^* \to X^*$ et a un élément de X^*, $a \neq \varepsilon$, appelé *l'axiome*. Si $q = 1$, c'est un *D0L-système* $G = (X, f, a)$ (voir [14, chap. III § 7]).

Considérons l'alphabet $Y = \{1, \ldots, q\}$. Pour tout mot $w = i_1 \cdot i_2 \cdots i_n \in Y^*$, on définit l'homomorphisme $f_w : X^* \to X^*$ par: $f_w = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_n}$. (Pour le mot vide ε, f_ε est l'identité de X^*).

Avec le formalisme ainsi décrit, le *langage engendré par G* est $\{f_w(a) \mid w \in Y^*\}$. Nous allons utiliser un DT0L-système pour transformer des séries formelles sur X en des séries formelles sur Y de la manière suivante: Si $S = \sum_{v \in X^*} (S, v) v$ on note $G(S) = T$ la série formelle sur Y définie par: $(T, w) = (S, f_w(a))$, $\forall w \in Y^*$. C'est la *DT0L-série associée* à S.

Exemple 3. (a) Si $q = 1$, G est un D0L-système $G = (X, f, a)$ et $(S, v) = |v|$, alors

$$(T, y^n) = (S, f_{y^n}(a)) = |f^n(a)|.$$

La série $G(S) = T = \sum_{n \geq 0} |f^n(a)| \cdot y^n$ est $\mathbf{N}$-rationnelle, comme il est bien connu: c'est la *D0L-fonction* associée à G (voir [14, chap. III § 3]).

(b) Toujours si $q = 1$, soit $S = \sum_{v \in X^*} \binom{v}{u} v$ où $u \in X^*$ est fixé (voir l'exemple [2] du § 3). On obtient alors pour $G(s)$:

$$(G(S), y^n) = (S, f^n(a)) = \binom{f^n(a)}{u}.$$

Cette série est la D0L-série des sous-mots. Johansen [5] prouve que $G(S)$ est rationnelle et Ochsenschläger [8] qu'elle est $\mathbb{N}$-rationnelle.

Nous allons montrer que, plus généralement la DT0L-série associée à S est rationnelle pour une large classe de séries S, englobant les séries des Exemples 3(a) et (b).

Théorème 2. *Soit G un DT0L-système et S une série $\mathbb{N}$-rationnelle à croissance polynômiale. Alors la DT0L-série associée $T = G(S)$ est $\mathbb{N}$-rationnelle et on peut effectivement en déterminer une représentation, connaissant G et S.*

Preuve. Soit $\mathfrak{M}_n$ le sous-$\mathbb{N}$-module de $\mathbb{N}\langle\langle X\rangle\rangle$ engendré par les séries $\mathbb{N}$-rationnelles à croissance polynômiale et de rang $\leq n = \text{rang}(S)$; D'après le Théorème 1, $\mathfrak{M}_n$ est de type fini, engendré par B_n et $S \in \mathfrak{M}_n$.

Pour tout $w \in Y^*$ et tout $U \in \mathfrak{M}_n$, posons $U \cdot w = f_w^{-1}(U)$. On a $U \cdot w \in \mathfrak{M}_n$, d'après Théorème 1 (ii). On vérifie sans peine que $(U \cdot w)w' = U \cdot (ww')$; $\mathfrak{M}_n$ devient ainsi un Y^*-module à droite et comme l'application $U \mapsto U \cdot w$ est $\mathbb{N}$-linéaire, $\mathfrak{M}_n$ est même un $\mathbb{N}\langle Y\rangle$*-module à droite* (cf. Remarque 1). Soit $\varphi : \mathfrak{M}_n \to \mathbb{N}$ l'application $\mathbb{N}$-linéaire définie par $\varphi(U) = (U, a)$. D'après la Proposition 1, la série $\sum \varphi(S \cdot w)w$ est $\mathbb{N}$-rationnelle. Or

$$\varphi(S \cdot w) = (S \cdot w, a) = (f_w^{-1}(S), a) = (S, f_w(a)) = (T, w).$$

D'après la Remarque 1, on peut effectivement déterminer une représentation de cette DT0L-série.

Remarque 2. Dans le Théorème 2, la restriction 'à croissance polynômiale' est essentielle comme le montre l'exemple: $q = 1, X = \{x\}$, $f(x) = x^2$, $a = x$, $S = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n$. Alors $f^n(a) = x^{2^n}$ et $(S, f^n(a)) = 2^{2^n}$. Par suite, la D0L-série associée est $\sum_{n \geq 0} 2^{2^n} y^n$ qui n'est pas rationnelle, parce qu'elle croît 'trop vite' [14, chap. II th. 7.1].

Exemple 4. Soit $X = \{x, y\}$ et G le DT0L-système (X, f_1, f_2, x) où $f_1(x) = xy$, $f_1(y) = yx$, $f_2(x) = xy$, $f_2(y) = y$; soit encore $Y = \{t_1, t_2\}$ et S la série $\mathbb{N}$-reconnaissable sur X ayant pour représentation (λ, μ, γ) avec

$$\lambda = (1, 0, 0), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a: $S = X^*xx^*yX^*$, donc le coefficient d'un mot w dans S est le nombre d'occurrences de x apparaissant avant la dernière occurrence de y dans w. Par suite S est à croissance polynômiale. On vérifie aisément les formules:

$$f_1^{-1}(S) = X^*xX^* + X^*yxX^* + X^*y^2X^*, \qquad f_2^{-1}(S) = X^*xX^*,$$

$$f_1^{-1}(X^*xX^*) = X^*xX^* + X^*yX^*, \qquad f_2^{-1}(X^*xX^*) = X^*xX^*,$$

$$f_1^{-1}(X^*yX^*) = f_2^{-1}(X^*yX^*) = X^*xX^* + X^*yX^*,$$

$$f_1^{-1}(X^*yxX^*) = X^*yX^* + X^*x^2X^*,$$

$$f_2^{-1}(X^*yxX^*) = X^*x^2X^* + X^*yxX^*, \qquad f_1^{-1}(X^*x^2X^*) = X^*yxX^*,$$

$$f_2^{-1}(X^*x^2X^*) = 0, \qquad f_1^{-1}(X^*y^2X^*) = X^*xyX^*,$$

$$f_2^{-1}(X^*y^2X^*) = X^*y^2X^* + X^*xyX^*,$$

$$f_1^{-1}(X^*xyX^*) = X^*y^2X^* + X^*xX^*, \qquad f_2^{-1}(X^*xyX^*) = X^*xX^*.$$

Par suite la série $G(S)$ est reconnue par le **N**-Y-automate suivant (voir Fig. 1): ses états sont les 7 séries apparaissant dans les relations ci-dessus, son états initial est S (avec coefficient 1); il y a un seul état final, à savoir X^*xX^* car c'est la seule de ces séries dont le support contient l'axiome x de G (avec coefficient 1); les transitions de l'automate sont définies par les formules ci-dessus.

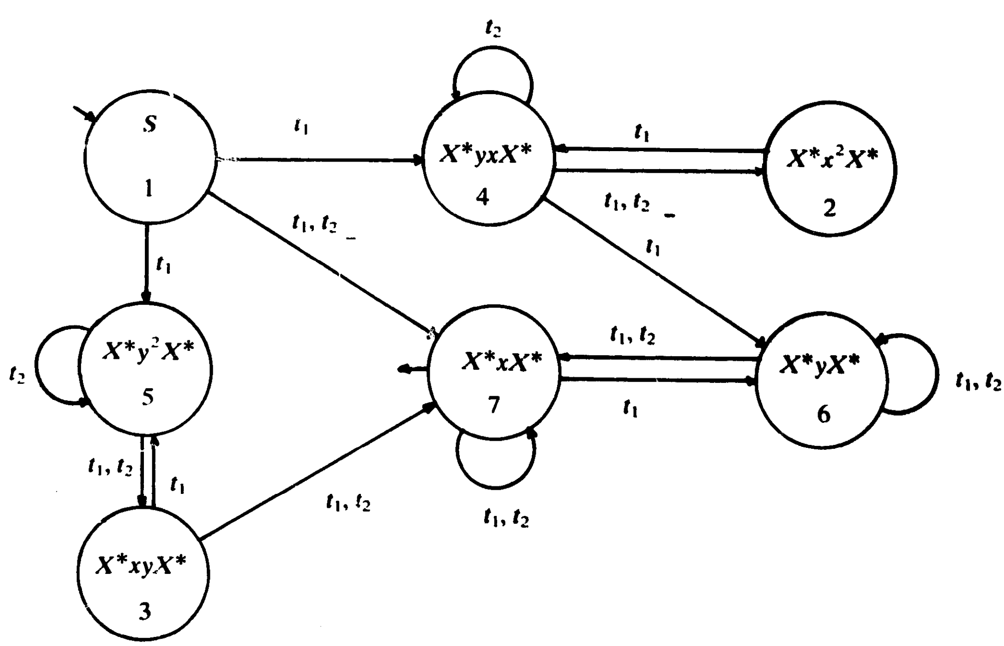


Fig. 1.

De cet automate se déduit la représentation $(\lambda', \mu', \gamma')$ de $G(S)$:

$$\mu'(t_1)=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix},\quad \mu'(t_2)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},\quad \gamma'=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda'=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0).$$

Corollaire 1 [5, 8]. *Soit (X, f, a) un DOL-système et $u \in X^*$. La série $\sum \binom{f^n(a)}{u} y^n$* est **N**-*rationnelle.*

Preuve. La série $S=\sum \binom{w}{u} w$ est à croissance polynômiale (voir Exemple 2(b) et **N**-rationnelle (voir remarque après la Définition 4). Le corollaire découle donc du théorème.

Corollaire 2. *Etant donnés deux DT0L-système G et G′ et deux séries* **N**-*rationnelles à croissance polynômiale S et S′, on peut décider si $G(S)=G'(S')$.*

Preuve. En effet, les constructions du Théorème 2 sont effectives et on sait décider de l'égalité de deux séries **N**-rationnelles (cf. par exemple [2, chap. VI, th. 8.1]).

Corollaire 3. *Soit G un DT0L-système et S une série* **Z**-*rationnelle à croissance polynômiale. Alors la DT0L-série associée est* **Z**-*rationnelle.*

Preuve. D'après Schützenberger [17], S s'écrit S_1-S_2 où S_1 et S_2 sont **N**-rationnelles à croissance polynômiale et le corollaire découle du théorème.

Corollaire 4. *Soit $G=(X, f_1, \ldots, f_q, a)$ un DT0L-système et $L \subset X^*$ un langage rationnel. Alors le langage sur Y^*: $\{w \in Y^* \mid f_w(a) \in L\}$ est rationnel*

Preuve Cela découle du Théorème 2 appliqué à la série $S=\sum_{w \in L} w$ qui est **N**-rationnelle.

En fait, ce dernier résultat est encore vrai dans un contexte plus large, celui des *T0L-systèmes*; un T0L-système est un triplet $G=(X, f_1, \ldots, f_q, a)$ où les f_i sont des substitutions finies, i.e. des homomorphismes $X^* \to 2^{(X^*)}$ où $2^{(X^*)}$ est muni de la multiplication induite par celle de X^*.

Théorème 3. *Soit G un TOL-système et L un langage rationnel* $\subset X^*$. *Alors le langage sur* Y^*: $\{w \mid f_w(a) \cap L \neq \emptyset\}$ *est rationnel.*

Preuve. Les automates considérés dans cette preuve sont les automates tels qu'ils sont décrits dans [2, chap. II]. Soit $\mathcal{A}_0$ un automate à n états reconnaissant L. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble fini des automates qui ont n états. Si $f: X^* \to 2^{(X^*)}$ est une substitution et $\mathcal{A} = (Q, q_0, Q_f, E)$ un automate, nous désignons par $f^{-1}(\mathcal{A})$ l'automate (Q, q_0, Q_f, E') où E' est défini par: $\forall q, p \in Q, \forall x \in X: (q, x, p) \in E'$ s'il existe $v \in f(x)$ tel que $q \xrightarrow{v} p$ dans $\mathcal{A}$. Clairement, $f^{-1}(\mathcal{A})$ reconnaît le langage $f^{-1}(L(\mathcal{A}))$ où $L(\mathcal{A})$ est le langage reconnu par $\mathcal{A}$. De plus si f et g sont deux substitutions, on a $g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{A})) = (f \circ g)^{-1}(\mathcal{A})$. Posons: $\mathcal{A} \cdot f = f^{-1}(\mathcal{A})$.

$\mathfrak{M}$ devient ainsi un Y^*-module fini, où $Y = \{1, \ldots, q\}$. Soit $\mathscr{C}$ l'automate sur Y^*: $\mathscr{C} = (\mathfrak{M}, \mathcal{A}_0, \mathfrak{M}_{f,\mu})$ où $\mathfrak{M}_f = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{M} \mid a \in L(\mathcal{A})\}$ et où μ est défini par la structure de Y^*-module à droite de $\mathfrak{M}$. Alors $\mathscr{C}$ est un automate fini (même déterministe). Soit $L(\mathscr{C})$ le langage reconnu par $\mathscr{C}$. On a:

$$w \in L(\mathscr{C}) \Leftrightarrow \mathcal{A}_0 \cdot w \in \mathfrak{M}_f \Leftrightarrow a \in L(\mathcal{A}_0 \cdot w) \Leftrightarrow a \in f_w^{-1}(L(\mathcal{A}_0)) \Leftrightarrow f_w(a) \cap L \neq \emptyset.$$

Remarque 3. Si $f: X^* \to 2^{X^*}$ est une substitution quelconque, non nécessairement finie, et si $\mathcal{A}$ est un automate fini, l'automate $f^{-1}(\mathcal{A})$ défini comme ci-dessus est fini et reconnaît $f^{-1}(L(\mathcal{A}))$. Par suite, la preuve précédente montre que le Théorème 3 est encore vrai pour des substitutions quelconques.

5. Preuve du Lemme 2

L'étude qui suit s'inspire des méthodes utilisées par Schützenberger [17] pour l'étude des représentations $X^* \to \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.

Soit S une série $\mathbf{N}$-rationnelle admettant la représentation de dimension n (λ, μ, γ).

Nous disons que (λ, μ, γ) est *émondée* si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $u, w \in X^*$ tels que: $(\lambda\mu u)_i \cdot (\mu w \cdot \gamma)_i \neq 0$. Si $\mathscr{B}$ désigne le semi-anneau de Boole et $\mathcal{A}$ le $\mathscr{B}$-X-automate associé à (λ, μ, γ), dire que (λ, μ, γ) est émondée exprime que $\mathcal{A}$ est 'trim' au sens que lui donne Eilenberg [2, chap. II.4]. Par suite, on peut déterminer une représentation de S qui soit émondée et de dimension $\leq n$.

Nous supposons dans la suite que (λ, μ, γ) est émondée et de dimension n. S'il existe un chemin $i \to j$ dans un automate à n états, il existe clairement un chemin $i \to j$ de longueur $\leq n-1$. Par suite:

Lemma 3. *Soient* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $w \in X^*$ *tels que* $(\mu w)_{i,j} \neq 0$, *il existe alors* $v \in X^*$ *tel que* $(\mu v)_{i,j} \neq 0$ *et* $|v| \leq n-1$.

Nous dirons que μ est *irréductible* si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $w \in X^*$ tel que $(\mu w)_{i,j} \neq 0$.

D'après le Lemme 3, on sait décider si μ est irréductible. Si tel n'est pas le cas, on sait mettre μ, par permutations des coordonnées, sous la forme suivante:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & x & \cdots & x \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r \end{pmatrix} \tag{1}$$

où les $\mu_i : X^* \to \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{N})$ sont des représentations irréductibles (voir [7]).

Nous supposons dans la suite μ écrite sous la forme (1).

Le résultat suivant précise légèrement un résultat de Boë [1, p. 24] (voir aussi Schützenberger [18, 2.1]).

Lemme 4. *Soit ν un homomorphisme $X^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$. Si νX^* n'est pas contenu dans $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$, il existe i, j, $1 \leq i, j \leq n$ et $w \in X^*$ tels que $|w| \leq n^2$ et $(\nu w)_{i,j} \geq 2$. Si ν est de plus irréductible, il existe $v \in X^*$ tel que $\forall k \geq 1$, $(\nu v^k)_{i,i} \geq 2^k$.*

Preuve. (1) Par hypothèse il existe $v \in X^*$ tel que $v \notin \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$. Nous supposons $|v|$ minimum.

Il existe i, j tels que $(\nu v)_{i,j} \geq 2$. Ceci exprime que dans le $\mathbb{N}$-automate associé à ν il existe deux chemins distincts $i \xrightarrow{v} j$, soient:

$$i = i_1 \xrightarrow{x_1} i_2 \xrightarrow{x_2} \cdots i_p \xrightarrow{x_p} j,$$

$$i = i'_1 \xrightarrow{x_1} i'_2 \xrightarrow{x_2} \cdots i'_p \xrightarrow{x_p} j$$

avec $v = x_1 \cdots x_p$.

On a $p > n^2$; or la suite des couples $(i_1, i'_1), \ldots, (i_p, i'_p)$ ne peut prendre que n^2 valeurs. Par suite, il existe k, h, $k < h$ tels que $(i_k, i'_k) = (i_h, i'_h)$. Posons $v = aub$ avec $a = x_1 \cdots x_k$, $u = x_{k+1} \cdots x_h$, $b = x_{h+1} \cdots x_p$. Les chemins ci-dessus se décomposent donc en:

$$i \xrightarrow{C_1} i_k \xrightarrow{C_2} i_h \xrightarrow{C_3} j,$$

$$i \xrightarrow{C'_1} i'_k \xrightarrow{C'_2} i'_h \xrightarrow{C'_3} j.$$

Les chemins $C_1C_2C_3$ et $C'_1C'_2C'_3$ sont distincts, donc soit $C_1C_3 \neq C'_1C'_3$, soit $C_2 \neq C'_2$. Dans le premier cas, on obtient deux chemins distincts C_1C_3 et $C'_1C'_3 : i \to j$ étiquetés par ab, donc $\nu(ab)_{i,j} \geq 2$, ce qui contredit la minimalité de v. Si par contre $C_1C_3 = C'_1C'_3$ on a $i_k = i'_k = i_h = i'_h$ et l'on obtient deux chemins distincts C_2 et

$C_2' : i_k \to i_k$ étiquetés par u, donc $(\nu u)_{k,k} \geq 2$, ce qui contredit également la minimalité de v.

(2) Il existe donc v, i, j tels que $(\nu v)_{i,j} \geq 2$ et $|v| \leq n^2$. Si ν est irréductible, il existe v' tel que $(\nu v')_{j,i} \geq 1$. Par suite, $(\nu vv')_{i,i} \geq 2$ d'où

$$\forall k \geq 1, (\nu vv')^k \geq (\nu vv')^k \geq 2^k.$$

On sait donc décider si les $\mu_i X^*$ de (1) sont contenus dans $\mathcal{M}_{n_i}(\{0, 1\})$. Si l'un des μ_i ne l'est pas, comme μ est émondée, la série S n'est pas à croissance polynômiale.

Nous supposons dans la suite que S est à croissance polynômiale, donc que $\forall i$, $\mu_i X^* \subset \mathcal{M}_{n_i}(\{0, 1\})$.

Lemme 5. *Soit ν un homomorphisme $X^* \to \mathcal{M}_n(A)$ de la forme*

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & \tau \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Alors (cf. [17, I.3] et [7]) *toute série reconnue par ν peut se mettre effectivement sous la forme d'une combinaison A-linéaire de séries reconnues par ν_1, par ν_2 et de séries de la forme $S_1 x S_2$ où $x \in X$ et où*

$$S_i = \sum_{w \in X^*} (\nu_i w)_{j,k} \cdot w, \qquad i = 1, 2, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Preuve. Posons

$$\bar{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a: $\nu = \bar{\nu} + \bar{\tau}$ et $\forall u, v, w \in X^* : \bar{\tau}u . \bar{\nu}v . \bar{\tau}w = 0$.

Par suite:

$$\forall w \in X^*, \nu w = (\bar{\nu} + \bar{\tau})(w) = \bar{\nu} w + \sum_{\substack{u,x,v \\ u,v \in X^*, x \in X}} \bar{\nu}u . \bar{\tau}x . \bar{\nu}v$$

et l'assertion s'en déduit.

On démontre alors le Lemme 2 par récurrence sur l'entier r.

Remerciements

L'auteur est reconnaissant envers le Professeur Jean Berstel pour de nombreuses discussions et son aide pendant la rédaction de cet article.

Références

[1] J.-M. Boë, Thèse de 3ème cycle, Université des Sciences et Techniques du Languedoc (1976).
[2] S. Eilenberg, *Automata, Languages and machines*, Vol. A (Academic Press, New York 1974).
[3] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Vol. B (Academic Press, New York, 1976).
[4] M. Fliess, Matrices de Hankel, *J. Math. Pures Appl.* **53** (1974) 197–222.
[5] P. Johansen, The generating function of the number of subpatterns of a D0L sequence, *Theoret. Comput. Sci.* **8**(1) (1979) 57–68.
[6] A. Lindenmayer, Mathematical models for cellular interactions in development, *J. Theoret. Biol.* **18** (1968) 280–315.
[7] M. Nivat, Sur l'irréducibilité de certaines représentations de monoïdes, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **261** (1965) 2421–2422.
[8] P. Ochsenschläger, Verallgemeinerte Parikh-Abbildungen und D0L Systeme, Bericht Nr. AFS-33, Fachbereich Informatik, Technische Hochschule Darmstadt (1977).
[9] D. Perrin, Codes et combinatoire du monoïde libre, Cours de DEA, Université Paris 7, Départment de Mathématiques (1976–77).
[10] C. Reutenauer, Thèse de 3ème cycle, Université Paris 6 (1977).
[11] C. Reutenauer, Sur les séries rationnelles en variables non commutatives, Communication au V ICALP, Udine (1978); Lecture Notes in Computer Science (Springer, Berlin) à paraître.
[12] G. Rozenberg et A. Salomaa, The mathematical theory of *L* systems, en préparation.
[13] K. Ruohonen, On the synthesis of D0L growth, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* (1975) 143–154.
[14] A. Salomaa et M. Soittola, *Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series* (Springer, Berlin, 1978).
[15] M.P. Schützenberger, On the definition of a family of automata, *Information and Control* **4** (1961) 245–270.
[16] M.P. Schützenberger, Certain elementary families of automata, Proc. Symposium on Mathematical Theory of Automata (Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, MA, 1962) 139–153.
[17] M.P. Schützenberger, Finite counting automata, *Information and Control* **5** (1962) 91–107.
[18] M.P. Schützenberger, Sur les relations rationnelles entre monoïdes libres, *Theoret. Comput. Sci.* **3** (1976) 243–259.