Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 2, pp. 269-278

UNE INTERPRÉTATION COMBINATOIRE DES PUISSANCES D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

François Bergeron et Christophe Reutenauer

Summary

We give a combinatorial interpretation of the powers of a differential operator of the form $P(x)d/dx$ in terms of forests of rooted trees.

Résumé

Nous donnons une interprétation combinatoire des puissances d'un opérateur différentiel de la forme $P(x)d/dx$ en terme de forêts d'arborescences croissantes.

1. Introduction

Nous allons donner dans ce qui suit une interprétation combinatoire des puissances d'un opérateur différentiel de la forme:

$$\Delta = P(x)d/dx.$$

On constate facilement que Δ^n est une combinaison linéaire de puissances de d/dx dont les coefficients sont des polynômes en $P(x)$ et ses dérivés. Nous donnons une interprétation combinatoire de ces polynômes en terme de forêts d'arborescences croissantes (Théorème 2.2). Nous verrons aussi que les Δ^n font intervenir des suites de nombres classiques comme par exemple: les nombres d'Euler, les nombres de Stirling de première et seconde espèces, ou encore les nombres eulériens.

Dans la dernière section, nous montrerons que le modèle permet aussi d'obtenir une formule pour le cas non commutatif (c'est-à-dire lorsque les dérivées de P ne commutent pas), qui permettra de démontrer une formule de Comtet [1], grâce à un résultat permettant de compter le nombre d'arborescences ayant une suite de multiplicitées fixée [3].

On peut encore étendre ces résultats à des opérateurs différentiels linéaires de la forme:

$$\Delta = \sum_i P_i(x_1,\ldots,x_n)\, d/dx_i$$

et même au monoïde multiplicatif d'un ensemble d'opérateurs de ce type; ainsi, si Δ et Γ sont deux tels opérateurs, on peut explicitement calculer tout opérateur dans le monoïde engendré par Δ et Γ. Ceci fera l'objet d'un article à venir, et nous y montrerons comment calculer des séries génératrices de la Théorie du Contrôle, ayant un rang de Lie fini, voir [2]. Ceci mène aussi comme dans [4] et [5], à la résolution par des techniques combinatoires de systèmes d'équations différentielles.

2. Cas commutatif

Considérons l'opérateur différentiel $\Delta = P(x)d/dx$. Nous aimerions calculer les puissances de Δ. On trouvera ci-dessous quelques valeurs de ces puissances, avec les conventions suivantes: d/dx sera désigné simplement par d, et $P^{(k)}(x)$ par P_k (et en particulier, $P = P_o$).

$$\Delta = P_o d$$

$$\Delta^2 = P_oP_1d + P_o^2d^2$$

$$\Delta^3 = (P_oP_1^2 + P_o^2P_2)d + 3P_o^2P_1d^2 + P_o^3d^3$$

$$\Delta^4 = (P_oP_1^3 + 4P_o^2P_1P_2 + P_o^3P_3)d + (7P_oP_1 + 4P_o^3P_2)d^2 + 6P_o^3P_1d^3 + P_o^4d^4$$

$$\Delta^5 = (P_oP_1^4 + 11P_o^2P_1^2P_2 + 4P_o^3P_2^2 + 7P_o^3P_1P_3 + P_o^4P_4)d$$
$$+ (15P_o^2P_1^3 + 30P_o^3P_1P_2 + 5P_o^4P_3)d^2 + (25P_o^3P_1^2 + 10P_o^4P_2)d^3 + 10P_o^4P_1d^4 + P_o^5d^5$$

$$\Delta^6 = (P_oP_1^5 + 26P_o^2P_1^3P_2 + 34P_o^3P_1P_2^2 + 32P_o^3P_1^2P_3 + 15P_o^4P_2P_3 + 11P_o^4P_1P_4 + P_o^5P_5)d$$
$$+ (31P_o^2P_1^4 + 146P_o^3P_1^2P_2 + 57P_o^4P_1P_3 + 34P_o^4P_2^2 + 6P_o^5P_4)d^2$$
$$+ (90P_o^3P_1^3 + 120P_o^4P_1P_2 + 15P_o^4P_3)d^3 + (65P_o^4P_1^2 + 20P_o^5P_2)d^4$$
$$+ 15P_o^5P_1d^5 + P_o^6d^6 \; .$$

On observe immédiatement que les coefficients de ces polynômes sont tous des entiers positifs. Nous allons donner une interprétation explicite de ces coefficients. Rappelons d'abord qu'une *forêt d'arborescences croissantes* sur l'ensemble ordonné $[n] = \{1,\ldots,n\}$, est un ensemble d'arborescences (non planaires) croissantes, dont l'ensemble des sommets est $[n]$, et telle que chaque sommet est plus petit que tous ses successeurs.

EXEMPLE 1.1.

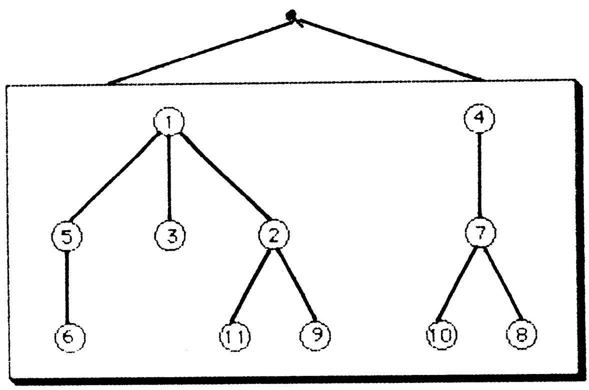


Figure 1

Nous conviendrons, comme dans [7], de disposer les fils d'un sommet donné dans l'ordre décroissant de gauche à droite. Le *poids* $\omega(F)$ d'une forêt F est le monôme:

$$\omega(F) = \prod_{i=1}^{n} P_{\alpha(i)} d^k$$

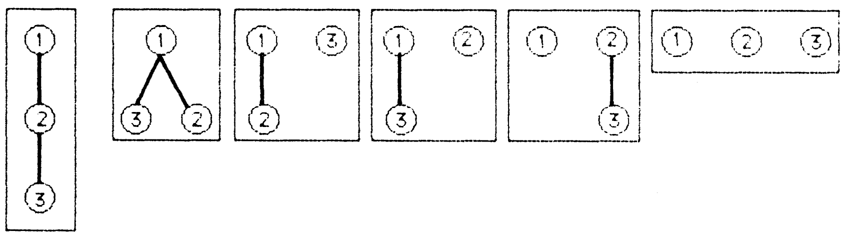
où $\alpha(i)$ est le nombre de fils du sommet i, et k est le nombre d'arborescences de la forêt. Ainsi, le poids de la forêt représentée par la Figure 1 est:

$$P_3P_2P_oP_1P_1P_oP_2P_oP_oP_oP_od^2 = P_o^5P_1^2P_2^2P_3d^2.$$

L'interprétation combinatoire de Δ^n se fera via les forêts d'arborescences croissantes sur $[n]$. On a plus précisément:

THÉORÈME 2.2. *La* n-*ième puissance* Δ^n *de* $\Delta = P(x)d/dx$ *est égale à la somme des poids de toutes les forêts d'arborescences croissantes sur* $\{1,\ldots,n\}$.

EXEMPLE 2.3. Le cube Δ^3 de Δ est donc donné par les 6 forêts sur $\{1,2,3\}$:



$$\Delta^3 = P_oP_1^2d + P_o^2P_2d + P_o^2P_1d^2 + P_o^2P_1d^2 + P_o^2P_1d^2 + P_o^3d^3.$$

Figure 2

PREUVE du Théorème 2.2. Définissons une k-forêt comme étant une forêt de k arborescences. Soit F une k-forêt (d'arborescences croissantes) sur $[n]$. Alors:

I) on obtient n k-forêts sur $[n+1]$ en ajoutant un fils étiqueté $n+1$ à l'un des noeuds de F;

II) d'autre part, on obtient une $(k+1)$-forêt sur $[n+1]$ en ajoutant à la forêt F un nouvel arbre avec un seul noeud étiqueté $n+1$.

D'autre part, quelle que soit la forêt sur $[n+1]$, le noeud étiqueté $n+1$ est toujours une feuille: on en conclut que toutes les forêts sur $[n+1]$ sont obtenues de la façon ci-dessus. Remarquons encore que si Md^k est le poids de la k-forêt considérée, alors le poids de chacune des n k-forêts du cas I) est obtenu en remplaçant successivement dans M l'un des n "P_i", y figurant, par P_oP_{i+1}. En d'autres termes, la somme de ces n poids sera $P_oM'd^k$ (rappelons que P_{i+1} est la dérivée de P_i). En conséquence, la somme des poids des $n+1$ forêts sur $[n+1]$ obtenues par I) et II) est:

$$P_oM'd^k + P_oMd^{k+1}.$$

Enfin, si S_n désigne la somme des poids de toutes les forêts sur $[n]$, on peut écrire:

$$S_n = Q_{n,1}d + Q_{n,2}d^2 + \ldots + Q_{n,n}d^n.$$

Il découle des observations ci-dessus que:

$$(1) \qquad Q_{n+1,k} = P_oQ'_{n,k} + P_oQ_{n,k-1} \qquad (\text{avec } Q_{n,o} = Q_{n,n+1} = 0),$$

et bien sûr que:

$$S_1 = P_od = \Delta.$$

En résumé,

$$\Delta S_n = \sum_{k=1}^{n} P_oQ'_{n,k}d^k + \sum_{k=1}^{n} P_oQ_{n,k}d^{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} (P_oQ'_{n,k} + P_oQ_{n,k-1})d^k.$$

De (1), on obtient par une récurrence évidente que $S_n = \Delta^n$, ce qui achève la démonstration. □

APPLICATION 2.4. Rappelons que les *nombres d'Euler* E_n ont comme fonction génératrice exponentielle:

$$\sum_{n\geq 0} E_nt^n/n! = tg(t) + sec(t).$$

Posons $x = tg(t) + sec(t) - 1$. Un calcul élémentaire donne:

$$dx/dt = 1 + x + (x^2/2).$$

On remarque alors que x est une série formelle en t de la forme $x = t + o(t^2)$. En conséquence, x engendre $Q[[t]]$, i.e. $\mathbb{Q}[[x]] = \mathbb{Q}[[t]]$. La formule précédente montre que:

$$d/dt = (1 + x + (x^2/2))d/dx$$

(avec un léger abus de notation).

Pour $\Delta = P(x)d/dx$ avec $P(x) = 1 + x + (x^2/2)$, on a $d/dt = \Delta$ et $d^n/dt^n = \Delta^n$. De plus, toute série formelle en t a le même terme constant que la série formelle correspondante en x, et réciproquement. En particulier:

$$E_n = d^n x/dt^n|_{t=0} = \Delta^n x|_{x=0} .$$

Or, le Théorème 2.2 donne $\Delta^n x$ comme polynôme en les $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$ (puisque $P'''(x) = 0$); observons que, puisque $x(0) = 0$, toutes ces séries ont comme terme constant 1, ce qui montre que le *n-ième nombre d'Euler est le nombre d'arborescences croissantes sur* $\{1,\ldots,n\}$, *dont les noeuds ont au plus deux fils*. On retrouve ainsi un résultat de Viennot, [6], prop. 3.15.

REMARQUE 2.5. La méthode que l'on vient de décrire est très générale. Elle donne entre autre la solution combinatoire d'équations différentielles comme le montre Leroux-Viennot dans [5], et [4], avec un point de vue légèrement différent.

REMARQUE 2.6. Nous venons de montrer que le nombre d'Euler E_n est la somme des coefficients dans Δ^n des monômes de degré 1 en d dans lesquels il n'apparaît aucun P_i avec $i \geq 3$. De même, par [7] (voir la remarque après la prop. 3.12), E_n est la somme des coefficients dans Δ^n des monômes dans lesquels il n'apparaît aucun P_i avec i impair.

Beaucoup d'autres nombres classiques apparaissent dans l'expression de Δ^n en terme des puissances de d/dx.

Remarquons ainsi, que le "degré" en les P_i: $\sum i\alpha(i)$ des monômes $\Pi\, P_i^{\alpha(i)} d^k$ dans Δ^n est $n-k$; on peut donc l'identifier à un partage de l'entier $n-k$.

Le k-ième *nombre de Stirling de première espèce* apparaît aussi dans Δ^n comme somme des coefficients des monômes de la forme $\Pi\, P_i^{\alpha(i)} d^k$. De même façon, le k-ième *nombre de Stirling de deuxième espèce* apparaît dans Δ^n comme coefficient de $P_o^n P_1^{n-k} d^k$.

Les *nombres eulériens* (i.e.: $e(n,k)$ est le nombre de permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$ ayant k descentes) sont obtenus en sommant dans Δ^n les coefficients des monômes de degré 1 en d faisant apparaître une puissance donnée de P_o (voir [6], prop. 2.14). Cette dernière observation équivaut à dire que les polynômes eulériens $E_n(t) = \sum_{1\le k\le n} e(n,k)t^k$ sont obtenus en sommant le poids de toutes les arborescences croissantes sur $\{1,2,\ldots,n\}$, avec $P_o = t$, et $P_i = 1$ si $i \ge 1$.

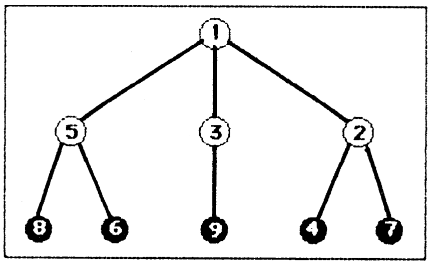


Figure 3

P_o^5 (P_o = ●)

Nombres eulériens

3. Cas non commutatif

Nous allons maintenant calculer les puissances de

$$\Delta = Pd$$

où d est une dérivation dans une algèbre non commutative, et P est un élément de cette algèbre ayant comme dérivées successives $d^kP = P_k$.

Le résultat est très semblable à celui du Théorème 2.2. Cependant, le poids d'une forêt sur $[n]$ est maintenant un monôme non commutatif défini comme:

$$P_{\alpha(n)}P_{\alpha(n-1)}\cdots P_{\alpha(1)}d^k$$

où $\alpha(i)$ est le nombre de fils du noeud i, et k est le nombre d'arborescences dans la forêt.

THÉORÈME 3.1. *La n-ième puissance de* $\Delta = Pd$ *est la somme des poids de toutes les forêts d'arborescences croissantes sur* $\{1,\dots,n\}$.

Comme ce résultat étend le Théorème 2.2, sa preuve est semblable.

Nous allons maintenant déduire de ce théorème une formule de Comtet. Il la présente dans un contexte commutatif, mais sa formule est plutôt non commutative d'esprit, puisqu'il ne réunit pas les termes ayant même image commutative (voir ci-dessous).

APPLICATION 3.2. Montrons cette formule de Comtet [1] (théorème p. 166). Soit

$$\Delta^n = A_{n,1}d + \dots + A_{n,n}d^n .$$

Alors,

$$A_{n,k} = P_o^k/k! \sum (2-\ell_1)(3-\ell_1-\ell_2)\dots(n-\ell_1-\ell_2\dots-\ell_{n-1})P_{\ell_1}P_{\ell_2}\dots P_{\ell_{n-1}}/\ell_1!\ell_2!\dots\ell_{n-1}!$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des entiers $\ell_1,\dots,\ell_{n-1}$ avec $\ell_1 \le 1$, $\ell_1+\ell_2 \le 2$, $\dots$, $\ell_1+\dots+\ell_{n-1} \le n-1$ et $\ell_1+\dots+\ell_{n-1} = n-k$. Pour démontrer cette formule, nous utiliserons le résultat suivant (voir [3]). Soient $d_1,\dots,d_n$ des entiers naturels tels que $\sum d_i = n-1$ et tels que pour $i = 0,\dots,n-1$, on ait $d_n+\dots+d_{n-i} \le i$. Alors le nombre d'arborescences croissantes sur $[n]$ telles que pour $i = 1,\dots,n$, le noeud i ait d_i fils, est égal à:

$$\frac{1}{d_1!\dots d_n!}(1-d_n)(2-d_n-d_{n-1})\dots(n-d_n-d_{n-1}-\dots-d_1).$$

On déduit facilement de ce résultat la généralisation suivante: si k, $d_1,\dots,d_n$ sont des entiers naturels tels que $\sum d_i = n-k$ et si de plus pour $i = 0,\dots,n-1$, on a $d_n+\dots+d_{n-i} \le i$, alors le nombre de k-forêts d'arborescences croissantes sur $[n]$ telles que pour $i = 1,\dots,n$, le noeud i ait d_i fils, est égal à:

$$\frac{1}{k!}\,\frac{1}{d_1!\ldots d_n!}\,(1-d_n)(2-d_n-d_{n-1})\ldots(n-d_n-d_{n-1}-\ldots-d_1).$$

Il suffit d'utiliser la bijection classique (voir [7], section 2.5) entre les k-forêts d'arborescences croissantes sur [n], et les arborescences croissantes sur [n+1] telles que le noeud 1 ait k fils.

Revenons à Δ. On observe que si F est une k-forêt telle que pour $i = 1,\ldots,n$, le noeud i ait d_i fils, on a: $\sum d_i = n-k$ (puisqu'exactement n-k noeuds de F sont fils d'un autre noeud). De plus, l'ensemble des fils des noeuds $n,\ldots,n-i$ est sous-ensemble de $[n,\ldots,n-i+1]$ (puisque l'arborescence est croissante); en conséquence, $d_n+\ldots+d_{n-i} \leq i$. Ce qui montre, en vertu du Théorème 3.1, que

$$A_{n,k} = \sum \frac{1}{k!}\,(1-d_n)(2-d_n-d_{n-1})\ldots(n-d_n-\ldots-d_1) \times P_{d_n}P_{d_{n-1}}\ldots P_{d_1}/(d_1!\ldots d_n!),$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des entiers $d_1,\ldots,d_n$ tels qu'énoncé ci-dessus. Comme on a toujours $d_n = 0$ (le noeud n n'a pas de fils), en procédant au changement de variable:

$$d_{n-1} = \ell_1,\ d_{n-2} = \ell_2,\ \ldots,\ d_1 = \ell_{n-1}$$

on obtient la formule de Comtet.

Remerciements

Nous aimerions remercier J.-M. Boë, avec qui nous avons eu plusieurs discussions pendant la préparation de cet article, et aussi M.P. Schutzenberger qui nous a mentionné la formule de Comtet. Nous aimerions enfin remercier tout le "Groupe de Combinatoire de l'UQAM", en y incluant Don Rawlings.

Références

[1] COMTET, L., Une formule explicite pour les puissances successives de l'opérateur de dérivation de Lie, C.R. *Acad. Sci. Paris* 276(1973), 165-168.

[2] FLIESS, M., Réalisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives, *Invent. Math.* 71 (1983), 521-537.

[3] GAGNÉ, J.-F., *Rapport existant entre la théorie des espèces et les équations différentielles*, Mémoire de maîtrise en mathématiques, UQAM, mars 1985.

[4] HAIRER, E., WANNER, G., On the Butcher group and general multi-value methods, *Computing* 13(1974), 1-15.

[5] LEROUX, P., VIENNOT, G., Combinatoriel resolution of systems of differential equations I: ordinary differential equations, *Actes du colloque de combinatoire énumérative*, Montréal (1985), Springer Lect. Notes in Math. (sous presse).

[6] RAWLINGS, D., The ABC's of classical enumeration, *Ann. sc. math. Québec*, 10, no 2 (1986).

[7] VIENNOT, G., Interprétation combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchni, *Actes du séminaire de théorie des nombres*, Bordeaux (1981).

Université du Québec à Montréal
Département de mathématiques et d'informatique
C.P. 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec H3C 3P8

Manuscrit reçu le 4 septembre 1986.
Revisé le 7 novembre 1986.