R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 19, n° 3, 1985, p. 281 à 291)

SUR LES SEMI-GROUPES VÉRIFIANT LE THÉORÈME DE KLEENE (*)

par Christophe REUTENAUER [1]

Communiqué par R. CORI

Résumé. — *Nous considérons la classe des semi-groupes dans lesquels les sous-ensembles rationnels coïncident avec les sous-ensembles reconnaissables. Nous montrons que cette classe de semi-groupes est fermée pour le produit libre des semi-groupes.*

Abstract. — *We consider the class of semigroups in which the rational subsets coincide with the recognizable subsets. We show that this class is closed for the free product of semigroups.*

1. INTRODUCTION

Dans un semi-groupe libre à un nombre fini de générateurs, une partie est reconnaissable si et seulement si elle est rationnelle. Ceci est un théorème dû à Kleene, dont on pourra trouver une démonstration dans [1] (th. VII.5.1) ou [2] (th. 6.3.2).

Rappelons que les *parties rationnelles* d'un semi-groupe S sont définies récursivement par :

* Toute partie finie de S est rationnelle.
* Si A, B sont des parties rationnelles de S, alors leur produit

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

est une partie rationnelle de S.

* Si A est une partie rationnelle de S, alors le sous-semi-groupe de S engendré par A, i.e.

$$A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n$$

est une partie rationnelle de S.

(*) Reçu en février 1984, révisé en août 1984.
[1] Université Pierre et Marie Curie, L.I.T.P., 4 place Jussieu, 75005 Paris.

De même, une partie A de S est dite *reconnaissable* s'il existe un semi-groupe *fini* T et un homomorphisme de semi-groupes $\phi : S \to T$ tels que $A = \phi^{-1}\,\phi(A)$.

De manière équivalente, A est reconnaissable s'il existe une congruence d'index fini du semi-groupe S pour laquelle A soit saturé.

Nous dirons qu'*un semi-groupe S vérifie le théorème de Kleene* si les parties rationnelles de S coïncident avec les parties reconnaissables de S.

Soient S et T deux semi-groupes. Nous notons $S * T$ le semi-groupe qui est produit libre de S par T. Rappelons que $S * T$ s'identifie à l'ensemble des suites finies

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (p \geqslant 1) \tag{1}$$

d'éléments de $S \cup T$ pris alternativement dans S et T, i.e.

$$x_i \in S \Rightarrow x_{i+1} \in T$$
$$x_i \in T \Rightarrow x_{i+1} \in S\,.$$

Le produit de deux telles suites

$$(x_1, \ldots, x_p) \quad \text{et} \quad (y_1, \ldots, y_q)$$

dans $S * T$ est

$$(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$$

si x_p et y_1 ne sont pas tous deux dans S ou tous deux dans T, et

$$(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p\, y_1, y_2, \ldots, y_q)$$

si x_p et y_1 sont tous deux dans S (resp. T), auquel cas le produit $x_p\, y_1$ est pris dans S (resp. T).

On notera simplement $x_1\, x_2 \ldots x_p$ pour la suite (1) : en effet, S et T s'identifient naturellement à des sous-semi-groupes de $S * T$.

Nous démontrerons le :

THÉORÈME : *Si S et T sont deux semi-groupes vérifiant le théorème de Kleene, alors il en est de même pour leur produit libre $S * T$.*

Ce théorème est une généralisation du théorème de Kleene, dans la mesure où l'on admet ce dernier pour le semi-groupe libre à un générateur ; en effet, tout semi-groupe libre de type fini est isomorphe au produit d'un nombre fini de copies de ce semi-groupe.

Il n'y a pas d'équivalent de ce théorème dans la catégorie des monoïdes. En effet, on montre aisément que si un semi-groupe vérifie le théorème de

Kleene, alors tous ses sous-groupes sont finis. Or, tout groupe fini vérifie le théorème de Kleene et, s'il n'est pas trivial, son produit libre par lui-même, *dans la catégorie des monoïdes*, est un groupe infini : celui-ci ne vérifie pas le théorème de Kleene (dans la catégorie des semi-groupes, son produit libre par lui-même est un semi-groupe infini qui n'est pas un groupe).

Par ailleurs, Sakarovitch [4, 5] définit la classe des *monoïdes rationnels*, observe que ceux-ci vérifient le théorème de Kleene, mais que cette classe n'est pas fermée pour le produit libre des monoïdes. On pourrait définir, de manière analogue, la classe des semi-groupes rationnels : celle-ci serait alors fermée pour le produit libre des semi-groupes; la preuve est proche de celle du théorème (*voir* aussi théorème 6.3 de [5]).

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soient S et T deux semi-groupes vérifiant le théorème de Kleene. Comme S est une partie reconnaissable de lui-même, puisque saturé par la congruence grossière, c'est aussi une partie rationnelle de lui-même. Or, dans tout semi-groupe, chaque partie rationnelle est contenue dans un sous-semi-groupe de type fini (i.e. admettant un système générateur fini). Il suit de là que S est un semi-groupe de type fini. Il en est de même pour T. Mais alors, $S * T$ est aussi de type fini et, comme dans tout semi-groupe de type fini, toute partie reconnaissable est rationnelle (théorème de McKnight voir [1] théorème VII.5.4). Il reste à montrer que toute partie rationnelle de $S * T$ est aussi reconnaissable. Pour cela, nous utiliserons plusieurs lemmes dont nous donnons le premier sans démonstration.

LEMME 1 : (i) *L'ensemble des parties reconnaissables d'un semi-groupe est une algèbre de Boole.*

(ii) *Soient $S_1, \ldots, S_n$ n semi-groupes et $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ leur produit direct. Une partie A de S est dite de type fini si elle est réunion finie de parties de la forme $A_1 \times \cdots \times A_n$ où chaque A_i est reconnaissable dans S_i. L'ensemble des parties de type fini de S est une algèbre de Boole.*

Nous utilisons aussi le résultat suivant, qui présente un intérêt en soi.

PROPOSITION : *Soit A une partie d'un semi-groupe de type fini P, n un entier $\geqslant 1$ et A_n la partie de P^n définie par*

$$A_n = \{ (p_1, \ldots, p_n) \mid p_1 \cdots p_n \in A \} .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *A est reconnaissable dans P.*

(ii) *A_n est réunion finie d'ensembles de la forme $B_1 \times \cdots \times B_n$, où chaque B_i est une partie reconnaissable de P.*

(iii) *A_n est une réunion finie d'ensembles de la forme $B_1 \times \cdots \times B_n$, où chaque B_i est contenu dans P.*

La preuve de cette proposition sera faite dans la troisième partie.

Remarque : Pour $n = 2$ la proposition est due à Ginsburg et Rose [2] (lemme p. 385), qui en donnent une formulation légèrement différente, dans le cas où P est un monoïde libre de type fini (*voir* aussi [1] proposition III.12.3 et [6]). En fait, cette caractérisation de la reconnaissabilité s'apparente aux caractérisations des fonctions représentatives dans les algèbres de Hopf, *voir* [7].

Par ailleurs, les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont valables sans l'hypothèse « S de type fini », de même que (iii) $\Rightarrow$ (i) si $n = 2$. Par contre, l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) n'est plus vraie si $n \geqslant 3$, comme le montre l'exemple du semi-groupe libre P sur $x_1, \ldots, x_n \ldots$ avec $A = \{ x_i^2 \mid i \in N \}$, qui n'est pas reconnaissable. Cependant, si P est un monoïde, toutes ces conditions sont équivalentes sans l'hypothèse mentionnée (*cf.* la preuve).

Nous utilisons aussi les deux lemmes suivants, plutôt classiques. Si A est un ensemble fini (un *alphabet*), nous notons A^+ le semi-groupe libre qu'il engendre; un élément de A^+ est un *mot*, un élément de A est une *lettre*.

LEMME 2 : *Soit P un semi-groupe, A un alphabet et $\rho : A^+ \to P$ un homomorphisme surjectif. Soit R une partie rationnelle de A^+ telle que $R = \rho^{-1} \rho(R)$ (i.e. R est saturé pour ρ). Alors $\rho(R)$ est une partie reconnaissable de P.*

Preuve : Le monoïde syntaxique H de R est fini, d'après le théorème de Kleene, et l'on a un diagramme commutatif d'homomorphismes surjectifs de semi-groupes

$$\begin{tikzcd} & A^+ \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ H & & P \arrow[ll, "\theta"] \end{tikzcd}$$

avec $R = \eta^{-1} \eta(R)$, voir [1], chap. 1. Par suite

$$\rho(R) = \rho\eta^{-1} \eta(R).$$

Or $\eta = \theta\rho$, donc $\rho(R) = \rho\rho^{-1}\theta^{-1}\eta(R) = \theta^{-1}\eta(R)$, ρ étant surjectif. Comme θ est surjectif, on a

$$\rho(R) = \theta^{-1}\theta\theta^{-1}\eta(R) = \theta^{-1}\theta\rho(R)$$

et $\rho(R)$ est reconnaissable dans P. $\square$

LEMME 3 : *Soit P un semi-groupe, A un alphabet et $\rho : A^+ \to P$ un homomorphisme surjectif. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Toute partie rationnelle de P est reconnaissable.*

(ii) *Pour toute partie rationnelle R de A^+, le sous-ensemble $\rho^{-1}\rho(R)$ de A^+ (son saturé pour ρ) est rationnel dans A^+.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que la propriété d'être rationnel est préservée par homomorphisme de semi-groupes, cependant que celle d'être reconnaissable est préservée par homomorphisme inverse.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $R \subset A^+$ est rationnel, alors $\rho(R)$ est rationnel dans P (d'après la remarque), donc reconnaissable (par hypothèse) et $\rho^{-1}\rho(R)$ est reconnaissable dans A^+ (d'après la remarque), donc rationnel (théorème de Kleene).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit Q une partie rationnelle de P. Il existe alors une partie rationnelle R de A^+ telle que $Q = \rho(R)$, ρ étant surjectif. Alors $R' = \rho^{-1}\rho(R)$ est rationnel dans A^+ (hypothèse). Mais R' est saturé pour ρ, donc d'après le lemme 2, $\rho(R')$ est reconnaissable dans P. Comme $Q = \rho(R) = \rho(R')$, Q est reconnaissable dans P. $\square$

Nous terminons la démonstration du théorème. Soient donc S et T deux semi-groupes vérifiant le théorème de Kleene. Comme ils sont de type fini, il existe des alphabets disjoints X, Y et des homomorphismes surjectifs de semi-groupes $\phi : X^+ \to S$ et $\psi : Y^+ \to T$. Soit $Z = X \cup Y$. Alors Z^+ s'identifie au produit libre $X^+ * Y^+$ et par suite, il existe un unique homomorphisme

$$\alpha : Z^+ \to S * T$$

$$\alpha(w) = \begin{cases} \phi(w) & \text{si} \quad w \in X^+ \\ \psi(w) & \text{si} \quad w \in Y^+ \end{cases}.$$

Il est important pour nous d'examiner à quelle condition l'on a $\alpha(u) = \alpha(v)$.

Supposons par exemple que u commence par un $x \in X$. Alors $u = u_1 u_2 u_3 \ldots$ avec $u_1 \in X^+$, $u_2 \in Y^+$, $u_3 \in X^+$ etc... Si $\alpha(u) = \alpha(v)$, alors par définition du produit libre dans la catégorie des semi-groupes comme rappelée au premier paragraphe, on a $v = v_1 v_2 v_3 \ldots$ avec $v_1 \in X^+$, $v_2 \in Y^+$, $v_3 \in X^+$ etc..., et $\phi(u_1) = \phi(v_1)$, $\psi(u_2) = \psi(v_2)$, $\phi(u_3) = \phi(v_3)$ etc...

Nous dirons qu'un sous-ensemble L de Z^+ est *saturé* (pour α) si

$$u \in L\,, \quad \alpha(u) = \alpha(v) \Rightarrow v \in L\,.$$

Le plus petit sous-ensemble saturé de Z^+ contenant une partie L de Z^+ sera noté $s(L)$ et appelé le *saturé* de L. On notera que si $L \subset X^+$ (resp. Y^+), alors L est saturé (pour α) si et seulement s'il l'est pour ϕ (resp. ψ), comme il découle de l'observation ci-dessus.

Pour démontrer le théorème il suffit, d'après le lemme 3, de montrer que pour toute partie rationnelle R de Z^+, son saturé est encore rationnel. Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble des parties de Z^+ dont le saturé est rationnel contient $\{ z \}$, pour chaque lettre z dans Z, et est clos pour les opérations rationnelles (union, produit, opération $+$).

Si $R = \{ z \}$, avec $z \in X$, alors le saturé de R est égal au saturé de R pour ϕ (d'après l'observation ci-dessus), donc il est rationnel, d'après l'hypothèse sur S et le lemme 3. Il en est de même si $z \in Y$. Si R_1 et R_2 sont deux parties de Z^+ telles que $s(R_1)$ et $s(R_2)$ soient rationnels, alors le saturé de $R_1 \cup R_2$ est $s(R_1) \cup s(R_2)$, qui est rationnel. Pour le produit et l'opération $+$, il nous faut quelques remarques préliminaires.

Nous dirons que le produit AB des parties A et B de Z^+ est *séparé* si tout mot de A finit par une lettre dans X (resp. Y) et tout mot de B commence par une lettre dans Y (resp. X). Autrement dit, soit $A \subset Z^* X$ et $B \subset YZ^*$, soit $A \subset Z^* Y$ et $B \subset XZ^*$ (où Z^* désigne le monoïde libre engendré par Z, i.e. l'union de Z^+ et du mot vide).

Un produit $A_1 \ldots A_n$ ($n \geqslant 1$) sera dit séparé si chacun des $A_i A_{i+1}$ ($1 \leqslant i \leqslant n - 1$) l'est. On notera que si $A = A_1 \ldots A_n$ est un produit séparé et si chacun des A_i est saturé, alors A est saturé (*cf.* l'observation mentionnée).

Nous dirons qu'une partie A de Z^+ est sous forme *normale* si elle est réunion finie de produits séparés

$$A_1 \ldots A_n \qquad n = 1, 2, 3 \tag{2}$$

où les A_i sont des parties rationnelles saturées de Z^+ et où $A_1 \subset U^+, A_n \subset V^+$ avec $U, V = X$ ou Y.

LEMME 4 : *Si R est une partie rationnelle saturée de Z^+, alors R admet une forme normale.*

La preuve de ce lemme est rejetée en troisième partie.

Soient maintenant R_1, R_2 deux parties rationnelles de Z^+ dont les saturés $s(R_1)$ et $s(R_2)$ sont rationnels. Nous voulons montrer que le saturé de $R_1\, R_2$ est rationnel. Or celui-ci est identique au saturé de $s(R_1)\, s(R_2)$, donc nous pouvons supposer que R_1, R_2 sont des rationnels saturés : ils admettent donc une forme normale (lemme 3). Nous sommes donc ramenés au cas où R_1, R_2 sont de la forme

$$R_1 = A_1 \dots A_n\,, \quad R_2 = B_1 \dots B_p$$

où les A_i et les B_j sont des rationnels saturés et où les produits sont séparés. Si $A_n \subset X^+$ et $B_1 \subset Y^+$ (ou vice-versa), alors

$$R_1 \, R_2 = A_1 \dots A_n \, B_1 \dots B_p$$

est un produit séparé de rationnels saturés, donc $R_1 \, R_2$ est saturé et l'assertion s'en déduit. Sinon, on a A_n, $B_1 \subset U^+$ (avec $U = X$ ou Y), et alors le saturé de $R_1 \, R_2$ est

$$A_1 \dots A_{n-1} \, CB_2 \dots B_p$$

où C est le saturé de $A_n \, B_1$. Comme X et Y vérifient le théorème de Kleene, C est rationnel d'après le lemme 3. Par suite, le saturé de $R_1 \, R_2$ est rationnel.

Enfin, soit R un rationnel dont le saturé est rationnel. Il s'agit de montrer que $s(R^+)$ est rationnel. Comme $s(R^+) = s(s(R)^+)$, nous pouvons supposer que R est saturé, donc admet une forme normale (lemme 4), i.e. R est réunion d'ensembles

$$A = A_1 \dots A_n \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{3}$$

où les A_i sont des rationnels saturés, où le produit est séparé, et où $A_1 \subset U^+$, $A_n \subset V^+$ avec $U, V = X$ ou Y.

Avant d'entamer la démonstration proprement dite, illustrons-la par un exemple. Supposons que $R = A \cup BCD$, où $A, B, D \subset X^+$, $C \subset R_{X,X}$ ($R_{X,X}$ désigne l'ensemble des mots dans Z^+ qui ne commencent ni ne finissent par une lettre dans X) et où A, B, C, D sont rationnels : R est donc sous forme normale. Alors

$$\begin{aligned} R^+ &= A^+ \cup A^* \, BCDA^* \cup A^* \, BCDA^* \, BCDA^* \dots \\ &= A^+ \cup A^* \, BC(DA^* \, BC)^* \, DA^* \,. \end{aligned}$$

Soit R' défini par

$$R' = s(A^+) \cup s(A^* \, B) \, C(s(DA^* \, B) \, C)^* \, s(DA^*)\,.$$

Comme S vérifie le théorème de Kleene, et d'après le lemme 3, les parties suivantes de X^+

$$s(A^+),\ s(A^* B),\ s(DA^* B),\ s(DA^*)$$

sont rationnelles. Donc R' est rationnel. Par ailleurs, R' est saturé, comme réunion (infinie) de produits séparés où chaque facteur est saturé. De plus, il est clair que $R \subset R' \subset s(R^+)$. On a donc en fait $R' = s(R^+)$ et il s'ensuit que $s(R^+)$ est rationnel.

Revenons au cas général : le passage de R^+ à $s(R^+)$ sera fait par une transduction rationnelle, laquelle conserve la rationalité. Pour simplifier la preuve, nous supposerons que, dans (3), si $n = 1$, alors $A = A_1 = A_1^+ = s(A_1)$, en substituant à A_1 le saturé de A_1^+, utilisant le fait que S et T vérifient le théorème de Kleene, le lemme 3 et le fait que le saturé d'un sous-semi-groupe est un sous-semi-groupe.

Nous introduisons un nouvel alphabet W, formé, pour chaque A de la forme (3) intervenant dans la décomposition de R, des lettres A_i, $i = 1, \ldots, n$. Dans W^+, nous considérons la partie rationnelle

$$L = \left(\bigcup_A A_1 \ldots A_n\right)^+$$

où la réunion porte sur tous les A de la forme (3) intervenant dans la décomposition de R. Soit maintenant W_1 l'alphabet

$$W_1 = W \cup W^2 \cup W^3 .$$

Nous définissons deux substitutions rationnelles $\mu : W_1^+ \to W^+$ et $\nu : W_1^+ \to Z^+$, de la manière suivante. Soit $w \in W_1$. Nous distinguons trois cas :

(i) $w = B \in W$: alors $\mu w = B$ et $\nu w = B$.

(ii) $w = (B, C) \in W^2$: alors $\mu w = BC$; et si B, C sont tous deux dans X^+ ou tous deux dans Y^+, alors $\nu w = s(BC)$, sinon $\nu w = BC$.

(iii) $w = (B, C, D) \in W^3$: alors $\mu w = BCD$; et si B, C, D sont tous trois dans X^+ ou tous trois dans Y^+, alors $\nu w = s(BCD)$, sinon $\nu w = BCD$.

Comme S et T vérifient le théorème de Kleene, chaque νw est rationnel d'après le lemme 3. Par suite, μ et ν sont des substitutions rationnelles, donc des transductions rationnelles, *cf.* [1] chap. IX proposition 1.3. Par suite la composée $\nu\mu^{-1}$ est aussi une transduction rationnelle, *ibid.* proposition 1.1 et théorème 4.1. Enfin $K = \nu\mu^{-1}(L)$ est une partie rationnelle de Z^+, *ibid.* théorème 3.1. Par construction de μ et ν, il est à peu près clair que

$$R^+ \subset K \subset s(R^+) .$$

Par ailleurs, comme (3) est une forme normale, on vérifie que K est saturé, comme réunion (infinie) de produits séparés à facteurs saturés : la vérification, fastidieuse, est laissée au lecteur. On a donc en fait $K = s(R^+)$, ce qui prouve que ce dernier est rationnel, ce qu'il fallait démontrer.

3. PREUVES DE LA PROPOSITION ET DU LEMME 4

Preuve de la proposition : (i) $\Rightarrow$ (ii) On a $A = \phi^{-1}(Q)$, où ϕ est un homomorphisme du semi-groupe P dans le semi-groupe fini T et où Q est une partie de T. On vérifie aisément qu'alors

$$A_n = \cup\, \phi^{-1}(t_1) \times \cdots \times \phi^{-1}(t_n)$$

où la réunion porte sur tous les $t_1, \ldots, t_n$ dans T tels que $t_1 \ldots t_n$ est dans Q. Comme T est fini, la réunion ci-dessus est finie et (ii) est ainsi prouvé.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est clair.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $p \in P$ et $p^{-1} A = \{ q \in P \mid pq \in A \}$. Il suffit de montrer que les $p^{-1} A (p \in P)$ sont en nombre fini, d'après le critère de Nerode, voir [1] proposition II.12.1.

Comme P est de type fini, il n'y a qu'un nombre fini de $p \in P$ qui ne s'écrivent pas comme produit de $n - 1$ éléments de P; les $p^{-1} A$ correspondants sont donc en nombre fini. Mais si $p = p_1 \ldots p_{n-1}$, alors

$$\begin{aligned} q \in p^{-1} A \Leftrightarrow pq \in A \Leftrightarrow p_1 \ldots p_{n-1}\, q \in A \\ \Leftrightarrow (p_1, \ldots, p_{n-1}, q) \in A_n . \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $A_n = \cup\, B_1 \times \cdots \times B_n$, où la réunion est finie. D'où

$$p^{-1} A = \cup\, B_n$$

où la réunion porte sur tous les $B_1, \ldots, B_n$ tels que $p_1 \in B_1, \ldots, p_{n-1} \in B_{n-1}$. On en déduit que les $p^{-1} A$ sont en nombre fini.

Preuve du lemme 4 : Soient $R_{X,Y}$ l'ensemble des mots de Z^+ dont la première lettre n'est pas dans X, ni la dernière dans Y. De manière analogue, soient $R_{X,X}$, $R_{Y,X}$, $R_{Y,Y}$.

Alors Z^+ est réunion disjointe des huit parties rationnelles saturées :

$$\begin{aligned} Z^+ = X^+ \cup Y^+ \cup X^+ Y^+ \cup Y^+ X^+ \cup X^+ R_{X,X} X^+ \cup \\ \cup X^+ R_{X,Y} Y^+ \cup Y^+ R_{Y,X} X^+ \cup Y^+ R_{Y,Y} Y^+ . \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'intersection de R avec chacune de ces huit parties admet une forme normale. Ceci est clair pour X^+ et Y^+. Nous le démontrons pour $X^+ R_{X,X} X^+$ (les autres cas sont analogues).

D'après le lemme 2, l'ensemble $A = \alpha(R)$ est une partie reconnaissable de $P = S * T$. Soit alors

$$A_3 = \{ (p_1, p_2, p_3) \in P^3 \mid p_1 p_2 p_3 \in A \}.$$

D'après la proposition, c'est une partie de type fini de P^3 (avec la terminologie du lemme 1 (ii)). Soit $P' = P - (S \cup SP \cup PS)$. Autrement dit, $P' = \alpha(R_{X,X})$. Comme $R_{X,X}$ est rationnel saturé, P' est reconnaissable dans P d'après le lemme 2, donc $S \times P' \times S$ est de type fini dans P^3. Par suite

$$A' = A_3 \cap S \times P' \times S$$

est de type fini dans P^3 (lemme 1 (ii)), donc c'est une réunion finie

$$A' = \cup B_1 \times B_2 \times B_3$$

où chacun des B_i est une partie reconnaissable de P, avec de plus $B_1, B_3 \subset S$, $B_2 \subset P'$ puisque $A' \subset S \times P' \times S$. Or $A \cap SP'S = q(A')$ où $q : P^3 \to P$ est défini par $q(p_1, p_2, p_3) = p_1 p_2 p_3$. Par suite

$$A \cap SP'S = \cup B_1 B_2 B_3$$

Comme $\alpha^{-1}(SP'S) = X^+ R_{X,X} X^+$ et $\alpha^{-1}(A) = R$, on a

$$R \cap X^+ R_{X,X} X^+ = \cup \alpha^{-1}(B_1) \alpha^{-1}(B_2) \alpha^{-1}(B_3).$$

On a utilisé ici le fait que $s \in S$, $p \in P'$ et $s' \in S$ impliquent

$$\alpha^{-1}(sps') = \alpha^{-1}(s) \alpha^{-1}(p) \alpha^{-1}(s'),$$

d'après la définition du produit libre. Par ailleurs, $\alpha^{-1}(B_1), \alpha^{-1}(B_3) \subset X^+$ et $\alpha^{-1}(B_2) \subset \alpha^{-1}(P') = R_{X,X}$. Donc $R \cap X^+ R_{X,X} X^+$ admet une forme normale.

REMERCIEMENTS

Dans une première version du lemme 1 que je donnais sans démonstration, je disais qu'une partie reconnaissable A de S est toujours de type fini (terminologie du lemme 1). J.-E. Pin m'a mis en garde contre cet énoncé, sachant par expérience que de nombreux énoncés valables pour les monoïdes (et faciles à démontrer) ne s'étendent pas aux semi-groupes, comme on pourrait s'y attendre. C'était en effet le cas de cette version (valable pour les monoïdes : théorème de Mezei [1] proposition III.12.2) comme le montre le contre-exemple sui-

vant : prenons $n = 2$ et $S_1 = S_2 =$ le semi-groupe libre à un générateur, identifié à l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $S_2 = A \cup B$ une partition quelconque. Définissons une relation d'équivalence R sur $S_1 \times S_2$ par : $(1, x)\ R(1, y)$ si et seulement si x et y sont tous deux dans A ou tous deux dans B ; de plus $(n, x)\ R(p, y)$ pour tous entiers positifs dès que $n, p \geqslant 2$. On vérifie alors que R est une congruence de $S_1 \times S_2$ dont une des classes est $1 \times A$. Comme A est quelconque, on peut le choisir non reconnaissable dans S_2. Ceci pose évidemment quelques problèmes, comme celui de la détermination des parties reconnaissables du carré cartésien du semi-groupe libre à un générateur.

J. Sakarovitch a récemment généralisé le théorème du présent article, le reliant notamment aux propriétés de fermeture des rationnels d'un groupe libre et des reconnaissables d'un monoïde partiellement commutatif libre (On regular trace languages, en préparation).

RÉFÉRENCES

[1] S. EILENBERG, *Automata, languages and machines*, vol. A, Acad. Press, New York (1974).

[2] S. GINSBURG et G. F. ROSE, *A characterization of machines mappings*, Canad. J. Math. 16 (1966) 381-383.

[3] G. LALLEMENT, *Semigroups and combinatorial applications*, John Wiley, New York (1979).

[4] J. SAKAROVITCH, *Description de monoïdes de type fini*, Elektr. Inf. Kyb. 17 (1981) 8/9, 417-434.

[5] J. SAKAROVITCH, *Easy multiplications, rapport n.* RIMS-367 de l'Institut de Recherches de l'Université de Kyoto (juin 1981).

[6] M. P. SCHÜTZENBERGER, *Une caractérisation des parties reconnaissables*, rapport de recherche n° 107 du Laboratoire de Recherche en Informatique et Automatique (mars 1975).

[7] M. E. SWEEDLER, *Hopf algebras*, W. A. Benjamin, New York (1969).