JOURNAL OF ALGEBRA 66, 448–483 (1980)

Séries formelles et algèbres syntactiques

CHRISTOPHE REUTENAUER

LITP, Institut de Programmation, 4 pl. Jussieu, 75005 Paris, France

Communicated by P. M. Cohn

Received May 11, 1979

The notion of the syntactic monoid is well known to be very important for formal languages, and in particular for rational languages; examples of that importance are Kleene's theorem, Schützenberger's theorem about aperiodic monoid and Eilenberg's theorem about varieties. We introduce here, for formal power series, a similar object: to each formal power series we associate its syntactic algebra. The Kleene–Schützenberger theorem can then be stated in the following way: a series is rational if and only if its syntactic algebra has finite dimension. A rational central series (this means that the coefficient of a word depends only on its conjugacy class) is a linear combination of characters if and only if its syntactic algebra is semisimple. Fatou properties of rational series in one variable are extended to series in several variables and a special case of the rationality of the Hadamard quotient of two series is positively answered. The correspondence between pseudovarieties of finite monoids and varieties of rational languages, as studied by Eilenberg, is extended between pseudovarieties of finite dimensional algebras and varieties of rational series. We study different kinds of varieties that are defined by closure properties and prove a theorem similar to Schützenberger's theorem on aperiodic monoids.

INTRODUCTION

On connaît l'importance de la notion de monoïde syntactique pour les langages formels et en particulier pour les langages rationnels comme l'illustrent le théorème de Kleene, le théorème de Schützenberger sur les monoïdes apériodiques et le théorème des variétés d'Eilenberg.

Nous introduisons ici une notion analogue pour les séries formelles, celle d'algèbre syntactique d'une série formelle. Elle avait déjà été pressentie par Schützenberger [35, p. 264]. Une première et fondamentale application est le résultat suivant, corollaire au théorème de Kleene–Schützenberger: une série est rationnelle si et seulement si son algèbre syntactique est de dimension finie. Ce résultat s'apparente aussi aux critères de rationalité en termes de matrices de Hankel (Fliess [13]).

Il apparaît naturel d'étendre aux séries en plusieurs variables des résultats connus déjà pour les séries rationnelles d'une variable (i.e., les suites définies

0021-8693/80/100448–36$02.00/0

par une relation de récurrence linéaire). Ce problème est intimement lié au problème de Kurosch pour les algèbres: ainsi, utilisant un résultat de Chirchov [39] sur les algèbres à identité polynômiale, nous pouvons étendre des propriétés de Fatou et de quotient d'Hadamard aux séries en plusieurs variables.

Par ailleurs, on peut traduire certaines propriétés combinatoires des séries par des propriétés algébriques de leur algèbre syntactique: il en est ainsi par exemple des séries rationnelles et centrales (une série est dite centrale si le coefficient d'un mot ne dépend que de sa classe de conjugaison) et des séries rationnelles dont l'algèbre syntactique est triangulable.

Enfin, nous amorçons une étude des pseudo-variétés d'algèbres de dimension finie en liaison avec les séries rationnelles: nous définissons la notion de variété de séries rationnelles et établissons l'analogue du théorème des variétés d'Eilenberg [11B]. Puis nous étudions diverses variétés définies par des propriétés de fermeture, en particulier les variétés fermées par produit: ceci nous amène à établir un résultat qui s'apparente au théorème de Schützenberger sur les monoïdes apériodiques [37].

Une partie de ces résultats se trouvent en [29, 30].

L'auteur tient à remercier Jean Berstel pour de nombreuses discussions pendant l'élaboration de ce travail.

I. Algèbres syntactiques

1. *Notations et définitions*

La terminologie qui suit est usuelle pour les monoïdes libres [8]. On note X^* le monoïde libre engendré par l'ensemble X: si X est non vide, X est appelé un *alphabet* et un élément de X est une *lettre*; les éléments de X^* sont des *mots* et son élément neutre est le *mot vide* noté 1. La *longueur* d'un mot w, notée $|w|$, est le nombre de lettres apparaissant dans w; de même, si x est une lettre, la longueur relative à x de w, notée $|w|_x$ est le nombre d'occurrences de x dans w. Un *langage* est une partie de X^*.

Soit K un *anneau commutatif unitaire*: la référence à K sera le pus souvent omise lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible: exception est faite pour les Sections I.4 et II.4 où elle est essentielle. Soit $K\langle X\rangle$ la K-algèbre associative libre engendrée par X (i.e., la K-algèbre des polynômes à coefficients dans K en les variables non commutatives $x \in X$) et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ la K-algèbre des séries formelles sur X à coefficients dans K; $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ sont respectivement les algèbres strictes et larges de Bourbaki [3, I, Chap. 3, p. 27].

Si S est une série formelle, on note (S, w) le coefficient du mot w dans S et $S = \sum_{w \in X^*} (S, w)w$. Le produit ST de deux séries S et T est défini par

$$(ST, w) = \sum_{\substack{u, v \in X^* \\ uv = w}} (S, u)(T, v).$$

Le *support* de la série S, noté $\operatorname{supp}(S)$, est le langage $\{w \in X^* \mid (S, w) \neq 0\}$. Si L est un langage, *sa série caractéristique*, notée $\mathbf{L}$, est définie par:

$$\mathbf{L} = \sum_{w \in L} w.$$

On a donc:

$$\operatorname{supp}(\mathbf{L}) = L.$$

$K\langle X\rangle$ s'identifie à la sous-algèbre de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries dont le support est fini, et l'on définit le degré de $P \in K\langle X\rangle$, noté $\deg(P)$, par $\sup\{|w|, w \in \operatorname{supp}(P)\}$. On a les injections canoniques: $X \to X^* \to K\langle X\rangle$. $K\langle X\rangle$ est un K-module libre admettant pour base X^*. $K\langle\langle X\rangle\rangle$ s'identifie au dual de $K\langle X\rangle$: si S est une série formelle, la forme linéaire qu'elle définit, notée $P \mapsto (S, P)$, est

$$(S, P) = \sum_{w \in X^*} (S, w)(P, w).$$

(Cette somme est finie puisque le support de P est fini.)

Dans la suite nous confondrons une série formelle avec la forme linéaire qu'elle définit. Les K-algèbres (nous dirons souvent algèbres) considérées ici seront toutes associatives et munies d'un élément neutre noté encore 1. Les homomorphismes d'algèbres conserveront tous l'élément neutre et une sous-algèbre d'une algèbre aura même élément neutre que celle-ci.

2. *Représentation d'une formelle*

DÉFINITION 1. Soit S une série formelle. Une *K-représentation* de S est un triplet $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$, où $\mathfrak{M}$ est une K-algèbre, μ un homomorphisme d'algèbres $K\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$, φ une forme linéaire sur $\mathfrak{M}$ tels que $S = \varphi \circ \mu$. On dit que $\mathfrak{M}$

reconnaît S. La représentation est dite *finie* si $\mathfrak{M}$ est un K-module de type fini, et *surjective* si μ est surjective.

EXAMPLE. Une représentation de S est le triplet $(K\langle X\rangle, \mathrm{id}, S)$ où id est l'homomorphisme d'identité $K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$.

A la série formelle S, associons l'ensemble

$$\mathscr{I}_S = \{P \in K\langle X\rangle \mid \forall\, Q, R \in K\langle X\rangle, (S, QPR) = 0\}.$$

$\mathscr{I}_S$ est clairement un idéal (bilatère) de $K\langle X\rangle$ contenu dans Ker S et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété. Il est appelé l'*idéal syntactique* de S. L'algèbre quotient $\mathfrak{M}_S = K\langle X\rangle/\mathscr{I}_S$ est appelée l'*algèbre syntactique* de S et l'on note μ_S l'homomorphisme canonique: $K\langle X\rangle \to \mathfrak{M}_S$. Comme $\mathscr{I}_S \subset \operatorname{Ker} S$, S induit sur $\mathfrak{M}_S$ une forme linéaire, notée φ_S, telle que $S = \varphi_S \circ \mu_S$.

Le triplet $(\mathfrak{M}_S, \mu_S, \varphi_S)$ est donc une représentation surjective de S, appelée la *représentation minimale* de S. Elle possède la propriété universelle suivante:

THÉORÈME I.2.1. *Soit* $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ *une représentation surjective de* S. *Il existe un homomorphisme d'algèbres* (*necessairement unique et surjectif*) ν: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_S$ *tel que* $\mu_S = \nu \circ \mu$.

Preuve. On a par définition: $S = \varphi \circ \mu$. Par suite $\operatorname{Ker} \mu \subset \operatorname{Ker} S$, donc $\operatorname{Ker} \mu \subset \mathscr{I}_S$. Comme μ est surjectif, il existe un et un seul homomorphisme ν: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_S$ tel que $\mu_S = \nu \circ \mu$. Comme μ_S est surjectif, ν l'est aussi. ∎

Si $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont deux algèbres, on dit que $\mathfrak{M}_1$ divise $\mathfrak{M}_2$, ce qu'on note $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$, si $\mathfrak{M}_1$ est isomorphe à un quotient d'une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_2$.

COROLLAIRE I.2.2. *Si* $\mathfrak{M}$ *reconnait* S, *alors* $\mathfrak{M}_S$ *divise* $\mathfrak{M}$.

Preuve. Dire que $\mathfrak{M}$ reconnait S implique par définition qu'il existe une représentation de S de la forme $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$. Soit $\mathfrak{M}' = \mu(K\langle X\rangle)$ et φ' la restriction de φ à $\mathfrak{M}'$. Alors $(\mathfrak{M}', \mu, \varphi')$ est une représentation surjective de S. D'après I.2.1, $\mathfrak{M}_S$ divise $\mathfrak{M}$. ∎

LEMMA I.2.3. *Soit* $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *et* $\mathscr{I}$ *un idéal* (*bilatère*) *de* $\mathfrak{M}_S$ *contenu dans* $\operatorname{Ker} \varphi_S$. *Alors* $\mathscr{I} = \{0\}$.

Preuve. $\mathscr{I} \subset \operatorname{Ker} \varphi_S \Rightarrow \mu_S^{-1}(\mathscr{I}) \subset \operatorname{Ker}(\varphi_S \circ \mu_S) = \operatorname{Ker} S$. Or $\mu_S^{-1}(\mathscr{I})$ est un idéal de $K\langle X\rangle$, donc $\mu_S^{-1}(\mathscr{I}) \subset \mathscr{I}_S$, puisque $\mathscr{I}_S$ est le plus grand idéal de $K\langle X\rangle$ contenu dans Ker S. Par suite, $\mathscr{I} = \mu_S(\mu_S^{-1}(\mathscr{I})) = \{0\}$. ∎

Remarque. On peut, à tout couple, $(\mathfrak{M}, \varphi)$ où $\mathfrak{M}$ est une algèbre et φ une forme linéaire sur $\mathfrak{M}$, associer un idéal syntactique (c'est le plus grand idéal de $\mathfrak{M}$ contenu dans le noyau de φ) et une algèbre syntactique (quotient de $\mathfrak{M}$ par cet idéal). Ceci conduit à la notion de φ-algèbres, analogue aux monoïdes pointés de J. Sakarovitch [33] mais nous ne nous étendrons pas sur ce point.

Nous dirons qu'une algèbre $\mathfrak{M}$ est *syntactique* s'il existe une série formelle S telle que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_S$. Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que K *est un corps.*

PROPOSITIONS I.2.4. *Une algèbre $\neq 0$ est syntactique si et seulement si elle contient un hyperplan ne contenant aucun idéal non nul.*

Autrement dit, une algèbre $\neq 0$ n'est pas syntactique si et seulement si tout hyperplan contient un idéal non nul.

Preuve. Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre syntactique non nulle: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_S$ pour une série formelle $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$. S est non nulle (sinon $\mathscr{I}_S = K\langle X\rangle$ et $\mathfrak{M}_S = 0$), donc $\mathfrak{M}_S \neq 0$ et $\operatorname{Ker} \varphi_S$ est un hyperplan de $\mathfrak{M}$. Si $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathfrak{M}$ tel que $\mathscr{I} \subset \operatorname{Ker} \varphi_S$, alors $\mathscr{I} = \{0\}$, d'après I.2.3. Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre et H un hyperplan dans $\mathfrak{M}$ ne contenant aucun idéal non nul. On a $H = \operatorname{Ker} \varphi$ pour une forme linéaire φ non nulle sur $\mathfrak{M}$.

Soit X un alphabet tel qu'il existe un homomorphisme d'algèbres surjectif μ: $K\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$. Soit S la série formelle $S = \varphi \circ \mu$. On a $\operatorname{Ker} \mu \subset \operatorname{Ker} S$ et si $\mathscr{I}$ est un idéal de $K\langle X\rangle$ contenu dans $\operatorname{Ker} S$, on a $\mu(\mathscr{I}) \subset \operatorname{Ker} \varphi$ donc $\mu(\mathscr{I}) = 0$ donc $\mathscr{I} \subset \operatorname{Ker} \mu$. Par suite $\operatorname{Ker} \mu = \mathscr{I}_S$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_S$. ∎

EXAMPLES. 1. Toute algèbre simple est clairement syntactique. Tout produit fini d'algèbres syntactiques est syntactique ainsi que toute algèbre de Frobenius ou symétrique [10, Sects. 61, 66]. D'ailleurs, les notions d'algèbre de Frobenius et d'algèbre syntactique sont étroitement liées puisqu'une algèbre de Frobenius non nulle est caractérisée par le fait qu'elle contient un hyperplan ne contenant ni idéal à gauche, ni idéal à droite non nul [10, 61.3].

2. Un exemple trivial d'algèbre non syntactique est le suivant. $\mathfrak{M} = K \cdot 1 + K \cdot x + K \cdot y$ où la multiplication est définie par: $x^2 = xy = yx = y^2 = 0$. Tout hyperplan H de $\mathfrak{M}$ est de dimension 2 et contient donc un élément de la forme $m = ax + by$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$; par suite H contient l'idéal engendré par m, qui n'est autre que Km.

3. *Lien avec les langages*

Si L est un langage, son *monoïde syntactique* M_L(voir [11 A, III.10]) est le monoïde quotient de X^* par la congruence $\sim_L$ définie par: $w \sim_L w'$ si et seulement si: $\forall\, u,\ v \in X^*,\ uwv \in L \Leftrightarrow uw'v \in L$. Si S est la série caractéristique de L, ceci s'écrit aussi: $w \sim_L w' \Leftrightarrow \forall\, u,\ v \in X^*$ $(S, uwv) = (S, uw'v) \Leftrightarrow w - w' \in \mathscr{I}_S$. Par suite, PROPOSITION I.3.1. *Le monoïde syntactique de L est isomorphe à l'image $\mu_S(X^*)$ de X^* dans $\mathfrak{M}_S$.*

Soit $K[M_L]$ la K-algèbre du monoïde M_L (on définit les algèbres de monoïdes de manière analogue aux algèbres de groupes); notons ρ l'homomorphisme canonique $X^* \to M_L$ et prolongeons ρ en un homomorphisme d'algèbres $\bar{\rho}$: $K\langle X\rangle \to K[M_L]$; $\bar{\rho}$ est surjectif. Soit φ la forme linéaire sur $K[M_L]$ définie par: $\forall\, m \in M_L$, $\varphi(m) = 1$ si $m \in \rho(L)$ et $\varphi(m) = 0$ sinon. Alors, $\forall\, w \in X^*$, $\varphi \circ \bar{\rho}(w) = (S, w)$. Par suite $(K[M_L], \bar{\rho}, \varphi)$ est une représentation surjective de S et d'après le Théorème 1.1.1 on a la

PROPOSITION 1.3.2. *$\mathfrak{M}_S$ est quotient de $K[M_L]$.*

Remarque. Dans [16], Hotz a appelé algèbre syntactique du langage L l'algèbre $K[M_L]$. Ce qui précède montre que $\mathfrak{M}_S$ est quotient de $K[\mathrm{M}_L]$, mais on n'a en général pas isomorphisme entre $\mathfrak{M}_S$ et $K[M_L]$.

Un langage $L \subset X^*$ est dit *rigide* si $\sim_L$ est l'égalité sur X^*. Si X a au moins deux lettres, le langage des mots *palindromes* est rigide; rappelons qu'un mot est dit palindrome s'il est égal à son image miroir (l'image miroir $\tilde{w}$ de w est définie comme suit: si $w = 1$, $\tilde{w} = 1$; si $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i \in X$, alors $\tilde{w} = x_n x_{n-1} \cdots x_1$). Nous dirons de même qu'une série formelle S est rigide si $\mathscr{I}_S = \{0\}$.

PROPOSITION I.3.3. *Si* $\mathrm{Card}(X) \geqslant 2$, *la série caractéristique du langage des mots palindromes est rigide.*

Nous avons besoin d'un lemme, qui est une version forte d'un résultat classique en théorie des langages. Nous supposons $\mathrm{Card}(X) \geqslant 2$.

LEMME I.3.4. *Soit $L = \{w \in X^* \mid w = \tilde{w}\}$. Soit $u, v_1,..., v_n \in X^*$ avec $u \neq v_1, v_2,..., v_n$ et $|u| \leqslant |v_1|,..., |v_n|$. Il existe $w \in X^*$ tel que $uw \in L$ et $v_1 w,..., v_n w \notin L$.*

Preuve. Soit $p = \sup\{|v_i| - |u|,\ i = 1,.., n\}$ et $w = x^p yyx^p \tilde{u}$. On a: $uw = ux^p yyx^p \tilde{u} \in L$. Soit $i \in \{1,..., n\}$ et supposons $v_i w \in L$. Alors $\widetilde{v_i w} = v_i w$, i.e., $\tilde{w}\tilde{v}_i = v_i w$, donc $v_i w = ux^p yyx^p \tilde{v}_i$. Il existe donc $t \in X^*$ tel que $v_i = ut$. Or, $utx^p yyx^p \tilde{u} \in L \Rightarrow tx^p yyx^p \in L$ et par définition de p, $|t| \leqslant p$. Donc $t = x^q$ avec $q \leqslant p \Rightarrow x^{p+q} yyx^p \in L \Rightarrow q = 0 \Rightarrow v_i = u$ ce qui est absurde. ∎

Preuve de I.3.3. Supposons $S = \mathrm{L}$ non rigide. On a $\mathscr{I}_S \neq \{0\}$; soit $P \in \mathscr{I}_S$, $P \neq 0$. Posons $P = \lambda u + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ avec $\lambda \in K - \{0\}$, u, $v_i \in X^*$, $u \neq v_1,..., v_n$, $|u| \leqslant |v_1|,..., |v_n|$. D'après le lemme, il existe $w \in X^*$ tel que $(S, uw) = 1$ et $\forall\, i \in \{1,..., n\}$ $(S, v_i w) = 0$. Or, $P \in \mathscr{I}_S$ donc $Pw \in \mathscr{I}_S$ donc $0 = (S, Pw) = \lambda$, ce qui est absurde. ∎

Remarque. On a montré en fait que Ker S ne contient aucun idéal à droite non nul. La même chose est évidemment vrai pour les idéaux à gauches.

COROLLAIRE I.3.5. *$K\langle X\rangle$ est une algèbre syntactique.*

Preuve. Nous venons de le voir quand $\mathrm{Card}(X) \geqslant 2$. Si $\mathrm{Card}(X) = 1$, $X = \{x\}$, on vérifie sans peine que la série caractéristique du langage $\{x^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est rigide. ∎

4. *Changement d'anneau*

Soit L un sur-anneau commutatif de K. On a l'injection $K\langle X\rangle \to L\langle X\rangle$ et $L\langle X\rangle$ s'identifie à $K\langle X\rangle \otimes_K L$. Soit $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ et $R = (\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ une K-représentation de S. S peut être considérée comme élément de $L\langle\langle X\rangle\rangle$ et admet pour L-représentation $R' = (\mathfrak{M} \otimes_K L,\ \mu \otimes_K \mathrm{id},\ \varphi \otimes_K \mathrm{id})$ (id est l'identité de L). Si R est surjective (resp. finie) R' l'est aussi.

Dans la proposition qui suit, on suppose que K est un corps.

PROPOSITION I.4.1. *Soit $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ la K-représentation minimale de S. Alors la L-représentation minimale de S s'identifie à $(\mathfrak{M} \otimes_K L,\ \mu \otimes_K \mathrm{id},\ \varphi \otimes_K \mathrm{id})$.*

Preuve. L'idéal syntactique de S considérée comme élément de $L\langle\langle X\rangle\rangle$ est:

$$\mathscr{I} = \{P \in L\langle X\rangle \mid \forall\ u, v \in X^*,\ (S, uPv) = 0\}.$$

Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\mu \otimes \mathrm{id}) = \mathscr{I}$. On a $\mathrm{Ker}(\mu \otimes \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}\, S$, donc $\mathrm{Ker}(\mu \otimes \mathrm{id}) \subset \mathscr{I}$. Soit $P \in \mathscr{I}$; soit $(l_i)_{i \in I}$ une base de L considéré comme K-espace vectoriel. Alors le K-espace vectoriel $L\langle X\rangle = K\langle X\rangle \otimes L$ est isomorphe à la somme directe $\oplus_i K\langle X\rangle \otimes l_i$. P s'écrit donc $P = \sum P_i \otimes l_i$ avec des $P_i \in K\langle X\rangle$ presque tous nuls. Soient $u, v \in X^*$: $uPv = \sum uP_iv \otimes l_i$. Comme $P \in \mathscr{I}$, on a:

$$\begin{aligned} 0 = (S, uPv) &= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mu \otimes \mathrm{id})(uPv) \\ &= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \left(\sum \mu(uP_iv) \otimes l_i\right) \\ &= \sum l_i \varphi \circ \mu(uP_iv) = \sum l_i (S, uP_iv). \end{aligned}$$

Or, $L = \oplus K l_i$; donc $\forall\ i \in I$, $(S, uP_iv) = 0$ et ceci pour tous $u, v \in X^*$. Donc chaque P_i est dans l'idéal syntactique de S considérée comme élément de $K\langle X\rangle$; cet idéal n'est autre que $\mathrm{Ker}\,\mu$, puisque $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ est la K-représentation minimale de S. Par suite $\mu(P_i) = 0 \Rightarrow (\mu \otimes \mathrm{id})(P) = \sum \mu(P_i) \otimes l_i = 0$. Donc $P \in \mathrm{Ker}(\mu \otimes \mathrm{id})$. ∎

II. Séries Rationnelles, Séries Reconnaissables

Dans ce chapitre et le suivant, les alphabets seront toujours supposés finis.

1. *Théorème de Kleene–Schützenberger*

Une série formelle $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite *K-rationnelle* si elle appartient à la plus petite sous-algèbre de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ contenant $K\langle X\rangle$ et fermée par passage à l'inverse (rappelons que $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est inversible dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$ si et seulement si son "terme constant" $(S, 1)$ est inversible dans K).

Remarque. Si $X = \{x\}$ et si K est un corps, une série $S \in K\langle\langle x\rangle\rangle = K[[x]]$ est rationnelle si et seulement si elle représente le développement en série d'une fraction rationnelle P/Q avec P, $Q \in K[x]$, $Q(0) \neq 0$. Si $S = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, c'est encore équivalent à:

La suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients dans K.

Une série formelle $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite *K-reconnaissable* s'il existe un entier $n \geqslant 1$, une représentation ν: $X^* \to \mathscr{M}_n(K)$, $\lambda \in \mathscr{M}_{1,n}(K)$, $\gamma \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ tels que $\forall\, w \in X^*$, $(S, w) = \lambda \cdot \nu w \cdot \gamma$. Un tel triplet (λ, ν, γ) sera appelé une *représentation linéaire* de S; sa *dimension* est n.

Si ν est un homomorphisme $X^* \to \mathscr{M}_n(K)$, il se prolonge en un homomorphisme d'algèbres unique $K\langle X\rangle \to \mathscr{M}_n(K)$ que nous notons encore ν: nous ferons tacitement l'usage de cette convention dans la suite.

Théorème II.1.1. (Kleene–Schützenberger [35, III]; voir aussi [11A, th. VII. 5.1]). *Une série est rationnelle si et seulement si elle est reconnaissable.*

Nour en déduisons le

Théorème II.1.2. *Soit* $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *S est rationnelle.*

(ii) *S admet une représentation finie.*

(iii) $\mathfrak{M}_S$ *est un K-module de type fini.*

Preuve (i) $\Rightarrow$ (iii). S est reconnaissable: soit K_1 le sous-anneau de K engendré par les coefficients de λ, γ et $\nu x (x \in X)$. K_1 est un anneau de type fini, donc noethérien. De plus, $S \in K_1\langle\langle X\rangle\rangle$ et S est K_1-reconnaissable.

Soit φ la forme linéaire sur $\mathfrak{M} = \nu(K_1\langle X\rangle)$ définie par: $\varphi(m) = \lambda \cdot m \cdot \gamma$. Alors (λ, ν, γ) est une K_1-représentation surjective de S; elle est de plus finie, car $\mathfrak{M}$ est un sous-module du K_1-module noethérien $\mathscr{M}_n(K_1)$. Par suite [I, 4]

$(\mathfrak{M} \otimes_{K_1} K, \nu \otimes_{K_1} \mathrm{id}, \varphi \otimes_{K_1} \mathrm{id})$ est une K-représentation finie et surjective de S. D'après I.2.1., $\mathfrak{M}_S$ est quotient de $\mathfrak{M} \otimes K$, donc de type fini.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). C'est clair.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ une représentation finie de S et $m_1, ..., m_n$ des générateurs du K-module $\mathfrak{M}$. Il existe des matrices $M_x = (a_{ij}^x)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que: $\forall x \in X$, $\mu x \cdot m_j = \sum_i a_{ij}^x \cdot m_i$. Soit ν l'homomorphisme $X^* \to \mathscr{M}_n(K)$ tel que $\nu x = M_x$. On vérifie par récurrence sur la longueur du mot w que:

$$\mu w \cdot m_j = \sum_i (\mu w)_{i,j} \cdot m_i.$$

Soient $\lambda \in \mathscr{M}_{1,n}(K)$, $\gamma \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ définis par: $\varphi(m_i) = \lambda_i$ et $1 = \mu 1 = \sum_j \gamma_j m_j$. Alors:

$$\forall w \in X^*, \mu w = \mu w \cdot 1 = \sum_j \mu w \cdot m_j \cdot \gamma_j = \sum_{i,j} (\nu w)_{i,j} \cdot m_i \cdot \gamma_j,$$

donc

$$(S, w) = \varphi \circ \mu w = \sum_{i,j} \lambda_i \cdot (\nu w)_{i,j} \cdot \gamma_j = \lambda \cdot \nu w \cdot \gamma.$$

Donc S est reconnaissable, donc rationnelle. ∎

Remarque. L'argument utilisé dans la partie (i) $\Rightarrow$ (iii) (à savoir: toute série K-rationnelle est K_1-rationnelle, pour un sous-anneau noethérien de K) a déja été utilisé par E. Sontag [40] pour montrer qu'une série est K-rationnelle si et seulement si le K-module engendré par les colonnes de la matrice de Hankel de S est de type fini, étendant ainsi aux cas des anneaux un résultat établi pour les corps par M. Fliess [13].

Soit S une série K-rationnelle. Une représentation linéaire *réduite* de S est une représentation linéaire de S de dimension minimum. Cette dimension est appelée le *rang* de S [13, Chap. II, Sect. 1].

THÉORÈME II.1.3. *On suppose que K est un corps. Soit (λ, ν, γ) une représentation linéaire réduite de la série K-rationnelle S. Soit $\mathfrak{M} = \nu(K\langle X \rangle)$ et $\psi: \mathfrak{M} \to K$ défini par $\psi(m) = \lambda \cdot m \cdot \gamma$. Alors $(\mathfrak{M}, \nu, \psi)$ s'identifie à la représentation minimale de S.*

Ce résultat montre qu'on peut "calculer" l'algèbre syntactique d'une série rationnelle, puisque l'on sait déterminer une représentation linéaire réduite d'une série rationnelle donnée [35].

Preuve. D'après [13] les espaces vectoriels $\lambda\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}\gamma$ sont de dimension n, sinon S admettrait une représentation linéaire de dimension $< n$. Donc $\lambda\mathfrak{M} = \mathscr{M}_{1,n}(K)$, $\mathfrak{M}\gamma = \mathscr{M}_{n,1}(K)$.

Soit $P \in \mathcal{I}_S$; on a: $\forall\, Q, R \in K\langle X\rangle$, $0 = (S, QPR) = (\lambda \cdot \nu Q) \cdot \nu P \cdot (\nu R \cdot \gamma)$ donc $\mathcal{M}_{1,n}(K) \cdot \nu P \cdot \mathcal{M}_{n,1}(K) = 0 \Rightarrow P = 0$. Donc $\mathcal{I}_S \subset \operatorname{Ker} \nu$. L'inclusion inverse découle des définitions. Par suite $(\mathfrak{M}, \nu, \psi)$ s'identifie à la représentation minimale de S. ∎

2. *Une application aux séries centrales*

Nous disons que $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est une série *centrale* si: $\forall\, u, v \in X^*$ $(S, uv) = (S, vu)$. Nous appellerons *caractère* une série S de la forme: $\forall\, w \in X^*$ $(S, w) = \operatorname{Tr}(\mu w)$, où μ: $X^* \to \mathcal{M}_n(K)$ est un homomorphisme (cette terminologie est emprumtée à la théorie des représentations linéaires des groupes).

Il est immédiat que tout caractère est une série rationnelle centrale, ainsi que toute combinaison linéaire de caractère. Nous montrons plus loin que la réciproque n'est pas vraie.

PROPOSITION II.2.1. *On suppose que K est un corps. Soit S une série rationnelle centrale.*

(i) *Si S est combinaison linéaire de caractères, $\mathfrak{M}_S$ est une algèbre semi-simple.*

(ii) *Si $\mathfrak{M}_S$ est semi-simple et K algébriquement clos, S est combinaison linéaire de caractères.*

Preuve. (i) Il existe un entier r et des homomorphismes μ_i: $K\langle X\rangle \to \mathcal{M}_{n_i}(K)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, des $a_i \in K$ tels que: $\forall\, w \in X^*$, $(S, w) = \sum a_i \operatorname{Tr}(\mu_i w)$. Soit $\mu: K\langle X\rangle \to \prod \mathcal{M}_{n_i}(K)$ défini par $\mu = (\mu_1, ..., \mu_r)$ et $\mathfrak{M} = \mu(K\langle X\rangle)$. Soit φ la forme linéaire sur $\mathfrak{M}$: $\varphi(\mu_1 P, ..., \mu_r P) = \sum a_i \cdot \operatorname{Tr}(\mu_i P)$. Alors $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ est une représentation surjective de S. Par suite, il existe d'après I.2.1. un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M}_S \simeq \mathfrak{M}/\mathcal{I}$. Tout élément du radical R de $\mathfrak{M}$ est nilpotent, donc son image par φ est nulle. Par suite [I.2.3] $\mathcal{I}$ contient R, donc $\mathfrak{M}/\mathcal{I}$ est semi-simple.

(ii) $\mathfrak{M}_S$ est isomorphe à un produit de la forme $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathcal{M}_{n_i}(K)$ [4, th. II.2].

On a: $\forall\, m_1, m_2 \in \mathfrak{M}_S$, $\varphi_S(m_1 m_2) = \varphi_S(m_2 m_1)$. Soit φ_i la restriction de φ_S à $\mathcal{M}_{n_i}(K)$; on vérifie que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\psi(m_1 m_2) = \psi(m_2 m_1)$, on a: $\exists\, a \in K$ tel que $\psi = a \operatorname{Tr}$. Par suite, il existe des a_i tels que $\varphi_i = a_i \operatorname{Tr}$, et S est une combinaison linéaire de caractères. ∎

Remarque. Soit $X = \{x\}$, $S = \sum_{n \geqslant 0} n x^n \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Une représentation linéaire réduite de S est (λ, μ, γ), où μ: $x^* \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est défini par $\mu x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et où $\lambda = (1, 0)$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Par suite, l'algèbre syntactique de S n'est pas semi-simple puisqu'elle contient l'idéal nilpotent engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Nous donnons maintenant une caractérisation de certaines séries rationnelles centrales, répondant ainsi partiellement à une question de M. Fliess [14, appendice].

PROPOSITION II.2.2. *On suppose que K est un corps algébriquement clos. Soit S une série rationnelle $\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ telle que $(S, 1) = 1$. Alors S est centrale si et seulement si elle possède une représentation linéaire réduite (λ, ν, γ), où $\lambda = (1, 0,..., 0)$, $\gamma = {}^t\lambda$ et où ν: $X^* \to \mathscr{M}_n(K)$ vérifie: $\forall\, w \in X^*$, $\forall\, i \in \{1,..., n\}$, $(\nu w)_{1,i} = (\nu w)_{i,1}$.*

Remarque. Avec λ et γ comme ci-dessus et $m \in \mathscr{M}_n(K)$, $\lambda m \gamma = m_{11}$.

Preuve. Nous nous inspirons de techniques utilisées dans l'étude des algèbres symétriques [10, Sect. 66]. Soit S une série rationnelle centrale telle que $(S, 1) = 1$. Soit $(\lambda', \nu', \gamma')$ une représentation linéaire réduite de S où ν' est un homomorphisme $X^* \to \mathscr{M}_n(K)$: Remarquons que $\forall\, P$, $Q \in K\langle\langle X\rangle\rangle$,

$$(S, PQ) = \sum_{u,v \in X^*} (S, uv)(P, u)(Q, v)$$

$$= \sum (S, vu)(Q, v)(P, u) = (S, QP).$$

De plus, si $P \in K\langle X\rangle$, $(S, P) = \lambda \cdot \nu'(P) \cdot \gamma$. Soit α: $K\langle X\rangle \to K^n$ l'homomorphisme de K-espaces vectoriels défini par:

$$\alpha(P) = \lambda \cdot \nu'(P).$$

Soit $P \in \operatorname{Ker} \alpha$: alors $\forall\, Q \in K\langle X\rangle$,

$$(S, PQ) = \lambda \cdot \nu'(PQ) \cdot \gamma = \lambda \cdot \nu'(P) \cdot \nu'(Q) \cdot \gamma = 0.$$

Par suite, $\forall\, Q$, $R \in K\langle X\rangle$, $(S, RPQ) = (S, PQR) = 0$. Par suite $P \in \mathscr{I}_S$ et $\operatorname{Ker} \alpha \subset \mathscr{I}_S$. Donc $\mathfrak{M}_S = K\langle X\rangle / \mathscr{I}_S$ est de dimension $p \leqslant n$. De plus, si m, $m' \in \mathfrak{M}_S$, il existe P, $P' \in K\langle X\rangle$ tels que $\mu_S(P) = m$, $\mu_S(P') = m'$.

Par suite, $\varphi_S(mm') = \varphi_S \circ \mu_S(PP') = (S, PP') = (S, P'P) = \varphi_S(m'm)$; il suit de là que la forme bilinéaire B sur $\mathfrak{M}_S$, $(m, m') \mapsto B(m, m') = \varphi_S(mm')$ est symétrique. B est non dégénérée: en effet,

$$\operatorname{Ker} B = \{m \in \mathfrak{M}_S \mid \forall\, m' \in \mathfrak{M}_S,\ B(m, m') = 0\}$$

est un idéal de $\mathfrak{M}_S$ contenu dans $\operatorname{Ker} \varphi_S$ puisque si m_1, $m_2 \in \mathfrak{M}_S$ et $m \in \operatorname{Ker} B$ alors: $\forall\, m' \in \mathfrak{M}_S$

$$B(m_1 m\, m_2, m') = \varphi_S(m_1 m\, m_2 m')$$

$$= \varphi_S(m\, m_2 m' m_1) = B(m, m_2 m' m_1) = 0.$$

Par suite, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ d'après I.2.3.

Comme K est algébriquement clos, il existe une base $m_1, \ldots, m_p$ de $\mathfrak{M}_S$ orthonormale pour B. On peut supposer de plus $m_1 = 1$ puisque $B(1, 1) = (S, 1) = 1$: $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, p\}$ $B(m_i, m_j) = \delta_{ij}$ et en particulier $B(m_1, m_j) = \varphi_S(m_j) = \delta_{1j}$. Pour tout $m \in \mathfrak{M}_S$ il existe des matrices $\bar{\nu}(m) \in \mathscr{M}_p(K)$ telles que:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, p\},\ m_i m = \sum_j \bar{\nu}(m)_{i,j} m_j.$$

L'application $\bar{\nu}\colon \mathfrak{M}_S \to \mathscr{M}_p(K)$ ainsi définie est un homomorphisme d'algèbres. De plus:

$$\varphi_S(m_i m) = \varphi_S\left(\sum \bar{\nu}(m)_{ij} m_j\right) = \bar{\nu}(m)_{i,1}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_S(m_i m) &= \varphi_S(m m_i) = \varphi_S(m_1 m m_i)\\ &= \varphi_S\left(\sum_j \bar{\nu}(m)_{1,j} m_j m_i\right) = \bar{\nu}(m)_{1,i}.\end{aligned}$$

Donc $\bar{\nu}(m)_{i,1} = \bar{\nu}(m)_{1,i}$. De plus, $m = m_1 m = \sum_j \bar{\nu}(m)_{1,j} m_j \Rightarrow \varphi_S(m) = \bar{\nu}(m)_{1,1}$. Soit ν l'homomorphisme de X^* dans $\mathscr{M}_p(K)$ défini par $\nu w = \bar{\nu} \circ \mu_S(w)$ et $\lambda = (1\ \ 0, \ldots, 0)$, $\gamma = {}^t\lambda$. Alors $\lambda \cdot \nu w \cdot \gamma = (\nu w)_{1,1} = \bar{\nu}(\mu_S(w))_{1,1} = \varphi_S \mu_S(w) = (S, w)$. Comme $(\lambda', \nu', \gamma')$ est une représentation linéaire réduite de S, on a $p = n$ et (λ, ν, γ) en est aussi une. La réciproque est immédiate: si $u, v \in X^*$,

$$\begin{aligned}(S, uv) &= (\nu uv)_{1,1} = \sum_i (\nu u)_{1,i}\, (\nu v)_{i,1}\\ &= \sum_i (\nu v)_{1,i}\, (\nu u)_{i,1} = (\nu vu)_{1,1} = (S, vu). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Remarques. 1. On montre aisément qu'une algèbre de dimension finie est symétrique [10, Sect. 66] si et seulement si elle est l'algèbre syntactique d'une série rationnelle centrale.

2. Des propriétés analogues pour les fonctions rationnelles d'un monoïde libre dans un autre ont été étudiées par C. Choffrut [9, Chap. IV].

3. *Un théorème de A. I. Chirchov*

Soit S une série rationnelle et $u, v, w \in X^*$. Alors la série d'une variable $\sum_{n \geqslant 0} (S, uw^n v) z^n$ est rationnelle: en effet, si (λ, ν, γ) est une représentation linéaire de S, la suite $((S, uw^n v))$ vérifie une relation de récurrence linéaire déterminée par le polynôme caractéristique de la matrice νw.

La réciproque est fausse: si S est une série formelle telle que pour tous u, v, w la série d'une variable $\sum_{n\geqslant 0}(S, uw^n v)w$ est rationnelle, S n'est pas cécessairement rationnelle, comme le montre l'exemple $S = \mathbf{L}$ où $\mathbf{L}$ est le langage $\{w \in \{x, y\}^*, |w|_x = |w|_y\}$.

Nous allons donner des conditions pour que la réciproque soit vraie: celà nous permettra d'étendre au cas des séries en plusieurs variables des résultats déjà connus pour les séries d'une variable (Sections 4 et 5). Par ailleurs, ce problème est intimement lié au problème de Kurosch pour les algèbres et au problème de Burnside pour les demigroupes. A la base de nos résultats est un théorème de Chirchov sur les algèbres qui vérifient une identité polynômiale.

Rappelons qu'une K-algèbre $\mathfrak{M}$ vérifie une *identité polynômiale* s'il existe un alphabet X et $P \in K\langle X\rangle$, $P \neq 0$, tel que pour tout homomorphisme d'algèbres μ: $K\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$ on ait $\mu(P) = 0$. Le *degré* de l'identité est le degré de P. L'identité est dite *admissible* s'il existe $w \in \operatorname{supp}(P)$ tel que $|w| = \deg(P)$ et $(P, w) = 1$. Si K est un corps, on remarquera que de toute identité polynômiale se déduit une identité admissible.

Nous utilisons le

THÉORÈME II.3.1. (A. I. Chirchov [39, th. 4]). *Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre vérifiant une identité polynômiale admissible de degré n. On suppose que $\mathfrak{M}$ admet en tant qu'algèbre un système générateur fini et que tout élément de $\mathfrak{M}$ qui est produit d'au plus $n-1$ de ces générateurs est entier algébrique sur K. Alors $\mathfrak{M}$ est un K-module de type fini.*

Ce théorème est démontré aussi dans [28, addendum au Chap. VI], mais la borne $n-1$ est remplacée par $[n/2]^2$ (où $[m]$ est la partie entière de m).

Nous pouvons en déduire un critère de rationalité pour les séries rationnelles.

PROPOSITION II.3.2. *Une série formelle $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est rationnelle si et seulement s'il existe un entier n tel que*:

(i) *$\mathfrak{M}_S$ vérifie une identité polynomiale admissible de $\partial^\circ n$.*

(ii) *Pour tout mot w de longueur $\leqslant n-1$ il existe une relation de récurrence linéaire vérifiée pour tous u, $v \in X^*$ par la série d'une variable $\sum_{p\geqslant 0}(S, uw^p v)t^p$.*

Preuve. Si S est rationnelle $\mathfrak{M}_S$ est un K-module de type fini et vérifie donc une identité polynômiale admissible [28, th. I.3.20]. De plus S est reconnaissable; soit (λ, ν, γ) une représentation linéaire de S; alors toute série de la forme $\sum_{p\geqslant 0}(S, uw^p v)t^p$ vérifie la relation de récurrence définie par le polynôme caractéristique de νw.

Réciproquement, si S vérifie les conditions (i) et (ii), soit w un mot de longueur $\leqslant n-1$. Par hypothèse, il existe $k \geqslant 1$ et des $a_i \in K$ tels que:

$$\forall\, p \geqslant 0, \qquad (S, uw^{p+k}v) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(S, uw^{p+i}v).$$

En particulier: $\forall\, u, v \in X^*$

$$(S, uw^k v) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} a_i(S, uw^i v).$$

Donc $w^k - a_{k-1} w^{k-1} - \cdots - a_1 w - a_0 \in \mathscr{I}_S$ et $\mu_S(w)$ est entier algébrique sur K. Comme $\mu_S(X)$ est un système générateur de $\mathfrak{M}_S$, le théorème de Chirchov implique que $\mathfrak{M}_S$ est un K-module de type fini et S est rationnelle. ∎

Nous pouvons aussi en tirer un critère de rationalité pour les langages. Rappelons qu'un langage $L \subset X^*$ est dit *rationnel* s'il appartient au plus petit ensemble de parties de X^* contenant les parties finies et fermé par réunion finie, produit fini (le produit de deux langages A, B est $AB = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$ et passage au sous-monoïde engendré (le sous-monoïde engendré par A est $A^* = \sum_{n \geqslant 0} A^n$). On montre [40, prop. 2.1.] qu'un langage L est rationnel si et seulement si sa série caractéristique S est K-rationnelle. Par conséquent, L est rationnel si et seulement $\mathfrak{M}_S$ est un K-module de type fini (d'après II.1.2).

PROPOSITION II.3.3. *Soit L un langage et S sa série caractéristique. Alors L est rationnel si et seulement si l'algèbre syntactique de S vérifie une identité polynômiale et si le monoïde syntactique de L est de torsion.*

Preuve. Supposons que le monoïde syntactique M_L de L soit de torsion: il existe donc pour tout $m \in M_L$ des entiers naturels k, l tels que $k \neq l$ et $m^k = m^l$. D'après 1.3, on en déduit que pour tout mot $w \in X^*$, il existe k, l, $k \neq l$, tels que $\mu_S(w)^k - \mu_S(w)^l = 0$ et par suite $\mu_S(w)$ est entier algébrique sur K. Si de plus $\mathfrak{M}_S$ vérifie une identité polynômiale, $\mathfrak{M}_S$ est un K-module de type fini. La réciproque vient de ce que si L est rationnel M_L est fini (th. de Kleene, voir [11A, th. VII.5.1.]). ∎

4. PROPRIÉTÉS DE FATOU

Nous disons que l'anneau (commutatif unitaire) B est *extension de Fatou* de son sous-anneau A si toute série B-rationnelle à coefficients dans A est A-rationnelle. La propriété analogue pour les séries d'une variable a été étudiée déjà par B. Benzaghou [1] et P. J. Cahen et J. L. Chabert [6]; la notion d'extension de Fatou a été introduite par M. Fliess, qui en a étudié de nombreuses propriétés [13]. Un autre cas a été traité par E. Sontag et Y. Rouchaleau [41]. Nous caractérisons ici les extensions de Fatou quand A et B sont intègres, de manière analogue aux résultats de Cahen et Chabert.

Rappelons que si A est un anneau commutatif intègre, un élément x d'un surcorps de A est dit *quasi-entier* sur A si $A[x]$ s'injecte, comme A-module, dans un A-module de type fini. Si x appartient au corps des fractions de A, celà s'exprime de la manière suivante: $\exists\, d \in A$, $d \neq 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $dx^n \in A$. L'ensemble des éléments d'un anneau B qui sont quasi-entiers sur A est un sous-anneau de B [6, cor. 1.5].

THÉORÈME II.4.1. *Soient A et B deux anneaux commutatifs intègres tels que $A \subset B$ et K le corps des fractions de A. B est extension de Fatou de A si et seulement si tout $x \in K$, entier sur B et quasi-entier sur A, est entier sur A.*

Preuve. Soit L le corps des fractions de B. Supposons que B soit extension de Fatou de A. Nous reprenons un argument de B. Benzaghou [1, prop. III.3]. Soit $x \in K$, entier sur B et quasi-entier sur A: il existe donc $b_1,..., b_k \in B$ et $d \in A\backslash 0$ tels que:

$$x^k = b_1 x^{k-1} + \cdots + b_{k-1} x + b_k \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ dx^n \in A.$$

Soit $S = \sum_{n \geqslant 0} (dx^n) t^n \in A[[t]]$. S est B-rationnelle, car la suite (dx^n) vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients dans B. Par hypothèse, S est A-rationnelle, donc elle vérifie une telle relation avec des coefficients dans A:

$$\exists\ a_1,..., a_m \in A \text{ tels que } \forall\ n \geqslant 0,\ dx^{n+m} = a_1 dx^{n+m-1} + \cdots + a_m dx^n.$$

En particulier, x est entier sur A car:

$$x^m = a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m.$$

Réciproquement, supposons que tout $x \in K$, quasi-entier sur A et entier sur B, soit entier sur A. Soit S une série B-rationnelle à coefficients dans A. S est L-rationnelle à coefficients dans K, donc K-rationnelle [13, prop. 2.2.1; celà découle aussi de I.4.1 et II.1.2].

Soit $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ la K-représentation minimale de S; $\mathfrak{M}$ est de dimension finie sur K [I.1.2] et vérifie donc une identité polynômiale à coefficient 1 et -1 [28, th. I.3.20]. Cette identité est vérifiée aussi par $\mathfrak{M}' = \mu(A\langle X\rangle)$. De plus, $\forall\, m \in \mathfrak{M}'$, il existe $P \in A\langle X\rangle$ tel que $m = \mu(P)$ donc $\varphi(m) = \varphi \circ \mu(P) = (S, P) = \sum_w (S, w)(P, w) \in A$. Donc $(\mathfrak{M}', \mu', \varphi')$ est une A-représentation de S, où μ' (resp. φ') est la restriction de μ à $A\langle X\rangle$ (resp. de φ à $\mathfrak{M}'$). Nous allons montrer que $\mathfrak{M}'$ est un A-module de type fini, en appliquant le théorème II.3.1. $\mathfrak{M}'$ est une A-algèbre de type fini, engendré par $\mu(X)$. Soit $m \in \mathfrak{M}'$ et $R(t) \in K[t]$ son polynôme minimal sur K. Montrons que m est entier sur A.

1. D'après [13, th. 2.1.1] il existe une représentation linéaire réduite (λ, ν, γ) de S (considérée comme série K-rationnelle) avec la propriété suivante: $\exists\ d \in A$ tel que $d \cdot \nu X^* \subset \mathscr{M}_n(A)$. Soient $\mathfrak{M} = \nu(K\langle X \rangle)$ et ψ la forme linéaire sur $\mathfrak{M}$ telle que $\psi(m) = \lambda \cdot m \cdot \gamma$. D'après II.1.3, $(\mathfrak{M}, \nu, \psi)$ s'identifie à $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$; il existe donc un isomorphisme α: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ tel que: $\nu = \alpha \circ \mu$. On a $d \cdot \alpha(\mathfrak{M}') = d \cdot \alpha \circ \mu(A\langle X \rangle) = d \cdot \nu(A\langle X \rangle) \subset \mathscr{M}_n(A)$ puisque $Q \in A\langle X \rangle \Rightarrow \nu(Q) = \sum_{w \in X^*} (Q, w) \cdot \nu(w) \in \mathscr{M}_n(A)$. Par suite, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $d \cdot \alpha(m)^n \in \mathscr{M}_n(A)$, donc les valeurs propres de $\alpha(m)$ sont quasi-entières sur A d'après la preuve du lemme de [29]. Comme α est un isomorphisme, les racines de $R(t)$ sont quasi-entières sur A, et il en est donc de même pour ses coefficients.

2. S est B-rationnelle et admet donc une B-représentation finie et surjective $(\mathfrak{M}_1, \mu_1, \varphi_1) \cdot \mathfrak{M}_1$ est un B-module de type fini, donc tout élément de $\mathfrak{M}_1$ est entier sur B. D'après II.1.3 $(\mathfrak{M}_1 \otimes_B L,\ \mu_1 \otimes_B \mathrm{id}_L,\ \varphi_1 \otimes_B \mathrm{id}_L)$ est une L-représentation surjective de S. De même, d'après I.4.1 et I.1.1, il existe un homomorphisme surjectif de K-algèbres β: $\mathfrak{M}_1 \otimes_B L \to \mathfrak{M} \otimes_K L$ tel que:

$$\mu \otimes \mathrm{id}_L = \beta \circ (\mu_1 \otimes \mathrm{id}_L).$$

Or $m \in \mathfrak{M}'$, donc il existe $P \in A\langle Y \rangle$ tel que $m = \mu(P)$. On a $P \in B\langle Y \rangle$, donc $\mu_1(P)$ est entier sur B et il est de même de $\mu_1(P) \otimes 1$. Par suite,

$$\begin{aligned} m \otimes 1 &= \mu(P) \otimes 1 = (\mu \otimes \mathrm{id})(P \otimes 1) \\ &= \beta \circ (\mu_1 \otimes \mathrm{id}_L)(P \otimes 1) = \beta(\mu_1(P) \otimes 1) \end{aligned}$$

est entier sur B.

Par suite, $m \otimes 1$ annule un polynôme Q normalisé à coefficients dans B, donc les racines du polynôme minimal R_1 de $m \otimes 1$ sur L sont entières sur B (puisque $B \subset L \Rightarrow R_1$ divise Q). Par ailleurs m et $m \otimes_K 1$ ont même polynôme minimal, donc $R = R_1$ et les coefficients de R sont entiers sur B.

3. Les coefficients de R sont entiers sur B et quasi-entiers sur A. Par suite m est entier sur A. ∎

Avec M. Fliess [13], disons que l'anneau A est un *anneau de Fatou faible* si son corps de fractions en est extension de Fatou. De II.4.1. découle immédiatement le résultat suivant.

THÉORÈME II.4.2. *Soit A un anneau commutatif unitaire intègre. A est un anneau de Fatou faible si et seulement si tout élément de son corps de fractions qui est quasi-entier sur A, est aussi entier sur A.*

COROLLAIRE II.4.3. *Si A est noethérien, A est un anneau de Fatou faible.*

Preuve. D'après [3, II, chap. 5, Sect. 1 n° 1 cor. à la prop. 1] la condition du th. II.4.2 est en effet vérifiée pour les anneaux noethériens. ∎

Remarques. 1. Il existe des anneaux qui ne sont pas des anneaux de Fatou faible [voir 3, II, exercice 2 du chap. 5].

2. Le résultat énoncé en II.4.3 est mentionné dans [34, exercice II.6.2].

5. *Un quotient d'Hadamard*

Le produit d'Hadamard de deux séries S et $T \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est

$$S \odot T = \sum (S, w)\,(T, w)w.$$

Si S et T sont rationnelles, $S \odot T$ l'est aussi (th. de Jungen–Schutzenberger [36]).

Le problème du quotient d'Hadamard est le suivant: Si $S \odot T = U$ et si U et S sont rationnelles, en est-il de même pour T? La réponse est non en général.

Un certain nombre de conditions suffisantes ont été données pour que la réponse soit oui: Pólya [26], Cantor [7], Pisot [25], Pathiaux [22], Benzaghou [1], Berstel [2] dans le cas des séries d'une variable et pour les séries en plusieurs variables: Lamèche [19], Jacob [17]. Le résultat qui suit s'inscrit dans cette étude.

La notion de rationalité peut-être étendue de la manière suivante au cas où K est un *demi-anneau* (i.e., un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, celle-ci étant de plus distributive par rapport à celle-là): la K-algèbre des séries rationnelles dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est définie comme étant la plus petite sous-algèbre fermée pour l'opération

$$S \mapsto S^* = \sum_{n \geqslant 0} S^n \qquad (\text{définie quand } (S, 1) = 0).$$

On définit ainsi les séries $\mathbb{R}_+$-rationnelles.
Une série $S \in \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite à croissance polynômiale s'il existe $a, b \geqslant 0$ tels que: $\forall\, w \in X^*$, $|(S, w)| \leqslant a\,|w|^b$ (où $|w|$ est la longueur du mot w).

Une séries $S \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est *échangeable* [13] si pour tous mots ayant même image commutative, ces mots ont même coefficient dans S.

THÉORÈME II.5.1. *Soient S et $T \in \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$. On suppose que S et T sont rationnelles, que T est échangeable et que $\forall\, w \in X^*$, $(S, w)/(T, w) \in \mathbb{Z}$. Si T vérifie au moins l'une des deux conditions suivantes:*

(i) *T est à croissance polynômiale;*

(ii) *T est $\mathbb{R}_+$-rationnelle;*

la série quotient d'Hadamard de S et T est rationnelle.

Nous avons besoin d'une série de lemmes.

LEMME II.5.2. *Soit* $m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, *a et* $b \geqslant 0$ *tels que*: $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $|m^k| \leqslant ak^b$. *Alors les valeurs propres non nulles de m sont des racines de l'unité.* ($|\ |$ *désigne une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Preuve. Les valeurs propres de m sont des entiers algébriques; soit λ l'une d'entr'elles: $\exists\, c \geqslant 0$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $|\lambda|^k \leqslant ck^b$. Par suite: $|\lambda| \leqslant 1$ et l'on conclut en appliquant un théorème de Kronecker [27, 8. Abschnitt chap. 4 ex. 200]. ∎

Nous dirons que la suite à valeurs dans $\mathbb{C}$: $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rationnelle si la série d'une variable $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n t^n$ est rationnelle. Rappelons que α est rationnelle si et seulement si elle vérifie une relation de récurrence linéaire, i.e., s'il existe un entier k et $a_1,..., a_k \in \mathbb{C}$ tels que: $\forall\, n \geqslant 0$ $\alpha_{n+k} = a_1\alpha_{n+k-1} + \cdots + a_k\alpha_n$. Si $P = b_0t^k + b_1t^{k-1} + \cdots + b_k \in \mathbb{C}[t]$, nous notons $P \cdot \alpha$ la suite $(b_0 \cdot \alpha_{n+k} + b_1 \cdot \alpha_{n+k-1} + \cdots + b_k \cdot \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est immédiat que si P, $Q \in \mathbb{C}[t]$, on a: $P \cdot (Q \cdot \alpha) = PQ \cdot \alpha$. Avec cette notation, α est rationnelle si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{C}[t]$, non nul, tel que $P \cdot \alpha = 0$. L'ensemble des P vérifiant cette relation est un idéal de $C[t]$ et l'on note P_α le générateur normalisé de celui-ci; P_α est le *polynôme minimal de* α.

Par ailleurs, on montre que α est rationnelle si et seulement s'il existe h, $r \geqslant 1$ et des $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $P_i \in C[t]$, $1 \leqslant i \leqslant r$ tels que: $\forall\, n \geqslant h$, $\alpha_n = \sum_i \lambda_i^n P_i(n)$.

Cette expression s'appelle le *polynôme exponentiel* associé à α: elle est unique. Si les λ_i et les P_i sont non nuls et si h est minimum, on a:

$$P_\alpha = t^h \cdot \prod_i (t - \lambda_i)^{\deg(P_i + 1)}.$$

Nous appellerons *racine* de α une racine non nulle de P_α, et *multiplicité* de cette racine, sa multiplicité dans P. Une racine de α sera dite *dominante* si elle a un module maximum parmi toutes les racines de α et si elle est la seule ayant cette propriété.

LEMME II.5.3. *Soient* P, $Q \in \mathbb{C}[t]$; *il existe* $R \in \mathbb{C}[t]$ *tel que*: *pour toutes les suites* $\alpha = (\alpha_n)$, $\beta = (\beta_n)$ *telles que* $P \cdot \alpha = 0$, $Q.\ \beta = 0$, *que* β *a une racine dominante, que le quotient de deux racine distinctes de* β *n'est pas une racine de l'unité et que* $\gamma = (\alpha_n/\beta_n)$ *est rationnelle, on a* $R \cdot \gamma = 0$.

Preuve. Soit $J_1,..., J_r$ la partition des racines de β selon leur module: si $\mu \in J_i$, $\mu' \in J_j$: $i < j \Rightarrow |\mu| > |\mu'|$, et $i = j \Rightarrow |\mu| = |\mu'|$. Par hypothèse, J_1 est un singolet: $J_1 = \{\mu_1\}$. Soit γ la suite (α_n/β_n); supposons que γ soit rationnelle. Soit $K_1,..., K_s$ la partition des racines de γ avec: si $\nu \in K_i$, $\nu' \in K_j$:

$$i < j \Rightarrow |\nu| > |\nu'| \qquad \text{et} \qquad i = j \Rightarrow |\nu| = |\nu'|.$$

Il existe des polynômes non nuls P_μ, Q_ν, $\mu \in J_i$, $\nu \in K_j$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$:

$$\beta_n = \sum_i \sum_{\mu \in J_i} \mu^n P_\mu(n), \qquad \gamma_n = \sum_j \sum_{\nu \in K_j} \nu^n P_\nu(n)$$

pour n assez grand. Par suite:

$$\alpha_n = \beta_n \gamma_n = \sum_{\lambda \text{ racine de } \alpha} \lambda^n \sum_{\substack{i,j,\mu,\nu \\ \mu\nu = \lambda}} P_\mu(n)\, Q_\nu(n)$$

pour n assez grand.

1. Soient $\beta'_n = \sum_{\mu \in J_r} \mu^n P_\mu(n)$, $\gamma'_n = \sum_{\nu \in K_s} \nu^n \cdot Q_\nu(n)$. La suite $(\beta'_n \gamma'_n)$ n'est pas nulle, sinon il existerait une infinité de n tel que $\beta'_n = 0$ et il existerait μ, $\mu' \in J_r$ tels que μ/μ' soit une racine de l'unité $\neq 1$ [21]. Il existe donc λ tel que

$$A = \sum_{\substack{\mu \in J_r \\ \nu \in K_s \\ \mu\nu = \lambda}} P_\mu Q_\nu \neq 0.$$

Le coefficient de λ dans le polynôme exponentiel de α est encore A, car pour $\mu \in J_r$, $\nu \in K_s$, $|\mu|$ et $|\nu|$ sont minimums. Par suite, il existe une racine de α (à savoir λ) $\mu \in J_r$, $\nu \in K_s$ tels que $\lambda = \mu\nu$; d'où l'existence d'une constante C, indépendante de α, β, γ telle que: $\forall$ ν racine de γ, $|\nu| \geqslant C$.

2. Montrons que pour toute racine ν de γ, il existe une racine λ de α, des racines $\mu_2, \ldots, \mu_k$ de β telles que

$$\nu = \frac{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}{\mu_1^k} \qquad (k \geqslant 1). \tag{1}$$

Pour ν maximum, i.e., $\nu \in K_1$, c'est clair, car le coefficient de $\mu_1 \nu$ dans le polynôme exponentiel de α est $P_{\mu_1} Q_\nu$ (à cause de la maximalité de μ_1) qui est non nul et $\mu_1 \nu$ est donc racine de α. Soit $p \geqslant 2$ et $\nu \in K_p$. Si $\mu_1 \nu$ est racine de α, ν est de la forme (1). Sinon on a:

$$\sum_{\substack{\mu', \nu' \\ \mu'\nu' = \mu_1 \nu}} P_{\mu'} \cdot Q_{\nu'} = 0$$

et il existe donc une racine $\mu' \neq \mu_1$ de β et une racine ν' de γ telles que $\mu'\nu' = \mu_1 \nu$. Or $|\mu_1| > |\mu'| \Rightarrow |\nu'| > |\nu| \Rightarrow \nu' \in K_{p'}$ avec $p' < p$. On conclut par récurrence sur p.

3. Comme $|\mu_1| > |\mu|$ pour toute racine $\mu \neq \mu_1$ de β, on a pour k assez grand, pour toutes racines $\mu_2, ..., \mu_k \neq \mu_1$ de β, et toute racine λ de α:

$$\left| \frac{\lambda \mu_2 \cdots \mu_k}{\mu_1^k} \right| < C.$$

D'après 1 et 2 il existe donc un ensemble fini E, indépendant de γ, tel que toute racine de γ soit dans E.

4. Comme en 3, on montre que si $\nu \in K_1$, $P_{\mu_1} Q_\nu$ est le coefficient de $\mu_1 \nu$ dans le polynôme exponentiel de α. Soit q la multiplicité maximum des racines de α et β. On a donc: $\partial^\circ(P_{\mu_1} Q_\nu) \leqslant q \Rightarrow \partial^\circ Q_\nu \leqslant q$.

Supposons que: $\forall p' < p$, $\forall \nu \in K_{p'}$, $\partial^\circ Q_\nu \leqslant p'q$. Soit $\nu \in K_p$. S'il n'existe pas de $(\mu', \nu') \neq (\mu_1, \nu)$ tels que $u'v' = \mu_1 \nu$, alors le coefficient de $\mu_1 \nu$ dans le polynôme exponentel de α est $P_{\mu_1} Q_\nu$. D'où $\partial^\circ Q_\nu \leqslant q$.

Sinon, ce coefficient (éventuellement nul) est:

$$P_{\mu_1} Q_\nu + \sum_{\substack{(\mu', \nu') \neq (\mu_1, \nu) \\ \mu' \nu' = \mu_1 \nu}} P_{\mu'} Q_{\nu'}.$$

Or, comme précédemment, $\mu'\nu' = \mu_1 \nu$ et $\mu' \neq \mu_1 \Rightarrow \nu' \in K_{p'}$ avec $p' < p$. Donc: $\partial^\circ Q_\nu \leqslant \sup\{\partial^\circ(P_{\mu'} Q_{\nu'}), q\} \leqslant pq$ par hypothèse de récurrence. Par suite, comme $p \leqslant \mathrm{Card}(E)$, on a: pour toute racine ν de γ, $\partial^\circ Q_\nu \leqslant q \, \mathrm{Card}(E)$.

5. On sait donc majorer indépendamment de γ les multiplicités des racines de γ. Soit h un majorant de la multiplicité de 0 dans P et Q; h majore donc la multiplicité de 0 dans P, et le lemme en découle. ∎

Disons que la suite rationnelle β vérifie *la propriété* (B) si pour toutes racines μ, μ' de module maximum de β, le quotient β/β' est une racine de l'unité.

LEMME II.5.4. *Soient $P, Q \in \mathbb{C}[t]$. Il existe $R \in \mathbb{C}[t]$ tel que: pour toutes les suites $\alpha = (\alpha_n)$, $\beta = (\beta_n)$ telles que $P \cdot \alpha = 0$, $Q \cdot \beta = 0$, que β a la propriété (B), et que $\gamma = (\alpha_n/\beta_n)$ est rationnelle, on a: $R \cdot \gamma = 0$.*

Preuve. Soit N un entier tel que toute racine de l'unité λ qui est quotient de deux racines de Q vérifie $\lambda^N = 1$. Soient α^i, β^i, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, les suites définies par:

$$\alpha_n^i = \alpha_{i+nN}, \; \beta_n^i = \beta_{i+nN}.$$

Il existe P_1, $Q_1 \in \mathbb{C}[t]$, ne dépendant que de P et Q tels que $P_1 \cdot \alpha^i = Q_1 \cdot \beta^i = 0$, $\forall i$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Il existe donc d'après le lemme II.5.3. $R_1 \in \mathbb{C}[t]$ tel que $\forall i$, $R_1 \cdot \gamma^i = 0$, avec $\gamma_n^i = \alpha_n^i/\beta_n^i$. Soit $R(t) = R_1(t^N)$. Alors $R \cdot \gamma = 0$. ∎

Preuve du th. II.5.1.

Nous allons appliquer le critère de la prop. II.3.1, avec $K=\mathbb{C}$. Soit U la série quotient de S et T.

(i) $\mathfrak{M}_S$ vérifie une identité polynômale. Soit T' la série inverse d'Hadamard de T. T' est échangeable donc $\mathfrak{M}_{T'}$ est commutatif. U est reconnue par $\mathfrak{M}_S \otimes \mathfrak{M}_{T'}$ qui vérifie une identité polynômiale [28, I.3.13]. Par suite $\mathfrak{M}_U$ vérifie une identité polynômiale.

(ii) Soient (λ, ν, γ) et $(\lambda', \nu', \gamma')$ les représentations linéaires réduites de S et T respectivement. Si T est à croissance polynômiale, il existe d'après [13, th. 2.1.1] a, $b \geqslant 0$ tels que: $\forall\, w \in X^*$, $|\nu' w| \leqslant a\,|w|^b$, donc les valeurs propres de $\nu' w$ sont des racines de l'unité [lemme II.5.2] et pour tous u, $v \in X^*$ la suite $((S, uw^n v))$ possède la propriété (B).

Si T est $\mathbb{R}_+$-rationnelle, pour tous u, $v \in X^*$, la série $\sum_{n\geqslant 0} (T, uw^n v)t^n$ est $\mathbb{R}_+$-rationnelle, donc d'après [2, cf. aussi 11A th. VIII.6.1.1] possède la propriété (B). Dans les deux cas, pour tous u, $v \in X^*$, la suite $\beta = ((T, uw^n v))$ possède la propriété (B) et vérifie $Q \cdot \beta = 0$, où Q est le polynôme caractéristique de $\nu' w$. De plus, si P désigne le polynôme caractéristique de νw, on a pour tous u, $v \in X^*$, $P \cdot \alpha = 0$, où $\alpha = ((S, uw^n v))$. Par ailleurs $\forall\, n$, α_n/β_n $\mathbb{Z}$ donc la suite $\gamma = (\alpha_n/\beta_n)$ est rationnelle (si T est à croissance polynômiale, β_n l'est aussi et on applique [7]; si T est $\mathbb{R}_+$-rationnelle, β_n l'est aussi et on applique [2]).

Il existe donc, d'après le lemme II.5.4, une relation de récurrence linéaire vérifiée pour tous u, $v \in X^*$ par les suites $((U, uw^n v))$. ∎

Remarque. Si S et T sont toutes deux $\mathbb{N}$-rationnelle, la série quotient, quoique rationnelle, n'est pas toujours $\mathbb{N}$-rationnelle, comme le montre un exemple de Karhumäki [18].

III. Pseudo-Variétés d'Algèbres de Dimension Finie et Variétés de Séries Rationnelles

Le théorème de S. Eilenberg sur les variétés a mis en évidence la correspondance qui existe entre les pseudo-variétés de monoïdes finis et des classes de langages rationnels qu'il a appelées $*$-variétés; beaucoup d'autres études dans ce domaine ont été faites:

5, 11B, 23, 24, 32, 33, 38, 42, 43

pour n'en citer que quelques unes. Nous nous proposons ici d'esquisser une étude analogue des pseudo-variétés d'algèbres de dimension finie en liaison avec les séries rationnelles.

Dans toute la suite, k désigne un corps commutatif. Toutes les algèbres considérées ici sont des k-algèbres de dimension finie sur k avec élément unité.

1. *Le théorème fondamental*

Rappelons qu'une *pseudo-variété* d'algèbres est une classe non vide V d'algèbres qui vérifie:

Si $\mathfrak{M} \in V$ et $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ est surjectif $\mathfrak{M}' \in V$.

Si $\mathfrak{M} \in V$ et $\mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$ est injectif $\mathfrak{M}' \in V$.

Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in V$, $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}'$ V.

Rappelons que $\mathfrak{M}' < \mathfrak{M}$ signifie que $\mathfrak{M}'$ est isomorphe à un quotient d'une sous-algèbre de $\mathfrak{M}$. Les deux premières conditions s'expriment donc aussi par: $\mathfrak{M} \in V$ et $\mathfrak{M}' < \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{M} \in V$.

Nous appellerons *a-variété* une pseudo-variété d'algèbres de dimension finie. Soit X un alphabet, $w \in X^*$ et $S \in k\langle\langle X\rangle\rangle$. Nous notons:

$$w^{-1}S = \sum_{v \in X^*} (S, wv)v, \qquad Sw^{-1} = \sum_{v \in X^*} (S, vw)v.$$

Supposons donné pour chaque alphabet X une partie $X^*\mathscr{V}$ de $k\langle\langle X\rangle\rangle$ vérifiant:

$X^*\mathscr{V}$ est un espace vectoriel.

$X^*\mathscr{V}$ est fermé par le opérations w^{-1} définie ci-dessus, pour tout $w \in X^*$.

Si Y est un alphabet et $\mu: k\langle\langle Y\rangle\rangle \to k\langle\langle X\rangle\rangle$ un homomorphisme d'algèbres, alors $S \in X^*\mathscr{V} \Rightarrow S \circ \mu \in Y^*\mathscr{V}$ (ici S est considérée comme forme linéaire sur $k\langle X\rangle$).

Nous dirons alors que $\mathscr{V} = \{X^*\mathscr{V}\}$ est une *s-variété.*

S. Eilenberg a établi qu'il y a correspondance bijective entre pseudovariétés de monoïde finis et variétés de langages [11B, chap. VII, Sect. 3]. Nous obtenons ici un résultat analogue.

THÉORÈME III.1.1. *Soit $\mathscr{V}$ une s-variété et V la a-variété engendrée par les algèbres syntactiques des séries dans $\mathscr{V}$ (ceci sera noté $\mathscr{V} \Rightarrow V$). Alors $\mathscr{V} \Rightarrow V$ est une correspondance bijective entre s-variétés et a-variétés. La correspondance réciproque (notée $V \Rightarrow \mathscr{V}$) est définie par: $\mathscr{V}$ est la s-variété des séries dont l'algèbre syntactique est dans V.*

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

LEMME III.1.2. *Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de dimension finie. Il existe des* *algèbres* $\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_n$ *quotients de* $\mathfrak{M}$, *qui sont syntactiques et telles que l'homomorphisme canonique* $\mathfrak{M} \to \prod \mathfrak{M}_i$ *soit injectif.*

Preuve. Soit X un alphabet tel qu'il existe une surjection ν: $k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$. Soit $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ une base du dual de $\mathfrak{M}$ et $\forall\, i$, S_i la série reconnaissable $\varphi_i \circ \nu$. Soit $\mathfrak{M}_i$ l'algèbre syntactique de S_i. Il existe un homomorphisme surjectif μ_i: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_i$ tel que $\mu_i \circ \nu = \mu_{S_i}$. Soit μ: $\mathfrak{M} \to \prod \mathfrak{M}_i$ le produit des μ_i. Si $m \in \mathfrak{M}$, il existe $P \in k\langle X\rangle$ tel que $\nu(P) = m$ et: $\mu(m) = 0 \Rightarrow \forall\, i,\ \mu_i(m) = 0 \Rightarrow \forall\, i$, $\mu_{S_i}(P) = 0$ donc

$$(S_i, P) = 0 \qquad (\text{puisque } S_i = \varphi_{S_i} \circ \mu_{S_i}).$$

$\Rightarrow \forall\, i,\ \varphi_i(m) = 0$ (puisque $\varphi_i(m) = \varphi_i \circ \nu(P) = (S_i, P)) \Rightarrow m = 0$. ∎

De ceci, on déduit immédiatement le

LEMME III.1.3. *Une a-variété est engendrée par les algèbres syntactiques qu'elle contient.*

LEMME III.1.4. *Soit* $\mathscr{V}$ *une* s – *variété et* $S \in X^*\mathscr{V}$. *Soit* φ *une forme linéaire sur* $\mathfrak{M}_S$. *Alors* $\varphi \circ \mu_S \in X^*\mathscr{V}$.

Preuve. Soit E le sous-espace de $k\langle\langle X\rangle\rangle$ engendré par les séries $u^{-1}Sv^{-1}$ $(u, v \in X^*)$. On a: $E \subset X^*\mathscr{V}$. L'orthogonal E° de E est déterminé par:

$$P \in E^\circ \Leftrightarrow \forall\, u, v \in X^*, (u^{-1}Sv^{-1}, P) = 0 \Leftrightarrow \forall\, u, v \in X^*\ (S, uPv) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, Q, R \in k\langle X\rangle, (S, QPR) = 0 \text{ puisque } X^* \text{ est une base de } k\langle X\rangle.$$

Donc $E^\circ = \mathscr{I}_S$. E° est de codimension finie donc $E = E^{\circ\circ}$ [3, I, chap. 2, th. 7 du Sect. 7].

Or $\operatorname{Ker} \varphi \circ \mu_S \supset \operatorname{Ker} \mu_S = \mathscr{I}_S$, donc $\varphi \circ \mu_S \in \mathscr{I}_S^\circ = E^{\circ\circ} = E$. Par suite $\varphi \circ \mu_S \in X^*\mathscr{V}$. ∎

LEMME III.1.5. *Soit* $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2)$ *une algèbre reconnaissant* $S_i \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ *et* $\lambda_i \in k$. *Alors* $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ *reconnait* $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$. *Si* $u \in X^*$, $\mathfrak{M}_1$ *reconnaît* $u^{-1}S_1$ *et* $S_1 u^{-1}$. *De plus, si* Y *est un autre alphabet et* ν *un homorphisme* $k\langle Y\rangle \to k\langle X\rangle$ *alors* $\mathfrak{M}_1$ *reconnaît* $S \circ \nu$.

C'est immédiat. ∎

LEMME III.1.6. *Soit* V *une a-variété engendrée par une famille d'algèbres* $\mathscr{F}$. *Alors* $\mathfrak{M} \in V$ *si et seulement si* $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}'$ *où* $\mathfrak{M}'$ *est un produit fini d'algèbres dans* $\mathscr{F}$.

C'est immédiat. ∎

LEMMA III.1.7. *Soit V une a-variété et $S \in k\langle\langle X\rangle\rangle$. On a $\mathfrak{M}_S \in V \Leftrightarrow \exists$ $\mathfrak{M} \in V$ tel que S soit reconnue par $\mathfrak{M}$.*

C'est une conséquence du cor. 1.2.2. ∎

Preuve du théorème III.1.1. (*inspirée de celle du théorème d'Eilenberg*).

Nous notons $V \Rightarrow \mathscr{V}$ et $\mathscr{V} \Rightarrow V$ les correspondances décrites dans l'énoncé. Si V est une a-variété et $V \Rightarrow \mathscr{V}$, $\mathscr{V}$ est une s-variété d'après les lemmes III.1.5 et III.1.7. De même, si $\mathscr{V}$ est une s-variété et $\mathscr{V} \Rightarrow V$, V est une a-variété.

1. Soit V une a-variété et $V \Rightarrow \mathscr{V} \Rightarrow V'$. V' est engendré par les $\mathfrak{M}_S$, $S \in \mathscr{V}$. Or $S \in \mathscr{V} \Rightarrow \mathfrak{M}_S \in V$. Donc $V' \subset V$. V est engendrée par les $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_S \in V$ (lemme III.1.3). Or $\mathfrak{M}_S \in V \Rightarrow S \in \mathscr{V} \Rightarrow \mathfrak{M}_S \in V'$. Donc $V \subset V'$.

2. Soit $\mathscr{V}$ une s-variété et $\mathscr{V} \Rightarrow V \Rightarrow \mathscr{V}'$. Si $S \in V$, alors $\mathfrak{M}_S \in V \Rightarrow S \in \mathfrak{M}'$. Donc $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}'$. Réciproquement, soit $S \in X^*\mathscr{V}'$. On a: $\mathfrak{M}_S \in V$. Or V est engendré par les $\mathfrak{M}_T$, $T \in \mathscr{V}$. Donc il existe $T_1,\dots, T_n \in \mathscr{V}$ tels que $\mathfrak{M}_S < \prod \mathfrak{M}_{T_i}$ (lemme III.1.6).

Soient $T_i \in k\langle\langle X_i\rangle\rangle$. Posons $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_{T_i}$, $\mu_i = \mu_{T_i}$ et $\varphi_i = \varphi_{T_i}$. On a: $T_i = \varphi_i \circ \mu_i$.

Soit $W = \prod k\langle X_i\rangle$, $\mathfrak{M} = \prod \mathfrak{M}_i$ et μ: $W \to \mathfrak{M}$, $\mu(P_1,\dots, P_n) = (\mu_1(P_1),\dots, \mu_n(P_n))$, μ est surjectif puisque chaque μ_i l'est. Il existe une sous-algèbre $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$ est un homomorphisme surjectif β: $\mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}_S$. Comme $k\langle X\rangle$ est libre et β surjectif, il existe un homomorphisme α: $k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}'$ tel que $\mu_S = \beta \circ \alpha$. Soit ψ la forme linéaire sur $\mathfrak{M}'$: $\psi = \varphi_S \circ \beta$. ψ se prolonge en une forme linéaire $\bar{\psi}$ de $\mathfrak{M}$ et l'on a $\forall P \in k\langle X\rangle$

$$\begin{aligned}\alpha(P) \in \mathfrak{M}' \Rightarrow \bar{\psi} \circ \alpha(P) &= \psi \circ \alpha(P)\\ &= \varphi_S \circ \beta \circ \alpha(P) = \varphi_S \circ \mu_S(P) = (S, P).\end{aligned}$$

De plus, μ est surjectif et $k\langle X\rangle$ libre, donc il existe un homomorphisme γ: $k\langle X\rangle \to W$ tel que $\alpha = \mu \circ \gamma$. Posons:

$$\begin{aligned}\gamma(P) &= (\gamma_1(P),\dots, \gamma_n(P)), \qquad \gamma_i: k\langle X\rangle \to k\langle X_i\rangle,\\ \alpha(P) &= (\alpha_1(P),\dots, \alpha_n(P)), \qquad \alpha_i: k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}_i.\end{aligned}$$

On a: $\alpha = \mu \circ \gamma \Rightarrow \forall\, i$, $\alpha_i = \mu_i \circ \gamma_i$. Soit ψ_i la restriction de $\bar{\psi}$ à $\mathfrak{M}_i$. On a:

$$(S, P) = \bar{\psi}(\alpha_1(P),\dots, \alpha_n(P)) = \sum_i \psi_i \circ \alpha_i(P)$$

$$= \sum_i \psi_i \circ \mu_i \circ \gamma_i(P).$$

Soit $S_i \in k\langle\langle X\rangle\rangle$, $S_i = \psi_i \circ \mu_i \circ \gamma_i$. Alors $S = \sum S_i$. Or $\psi_i \circ \mu_i \in X_i^* \mathscr{V}$ (lemme III.1.4) par suite $S_i \in X^*\mathscr{V}$ et $S \in X^*\mathscr{V}$. Donc $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$. ▌

COROLLAIRE III.1.8. *Soit V une a-variété et $\mathscr{V}$ une s-variété telles que $V \Leftrightarrow \mathscr{V}$. Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre: alors $\mathfrak{M} \in V$ si et seulement si toute série S reconnue par $\mathfrak{M}$ est dans $\mathscr{V}$.*

Preuve. Soit $\mathfrak{M}$ telle que toute série reconnue par $\mathfrak{M}$ soit dans $\mathscr{V}$. D'après III.1.2. il existe des séries $S_1,..., S_n$ reconnues par $\mathfrak{M}$ telles que $\mathfrak{M} < \prod \mathfrak{M}_{S_i}$.

Or $S_i \in \mathscr{V} \Rightarrow \mathfrak{M}_{S_i} \in V \Rightarrow \mathfrak{M} \in V$. ▌

2. *Exemples de variétés*

Dans la suite, V désignera une a-variété et $\mathscr{V}$ la s-variété correspondante: $V \Leftrightarrow \mathscr{V}$.

a. *Plus petites variétés.* La *variété triviale* est la variété nulle (i.e., $V = \{0\}$, $\mathscr{V} = \{0\}$). La plus petite a-variété non triviale V est clairement celle qui est engendrée par k. On montre aisément que toute sous-algèbre et tout quotient de l'algèbre k^n $(n \geqslant 0)$ est isomorphe à un k^m $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Par suite, V est la classe des algèbres qui sont isomorphes à un k^n $(n \geqslant 0)$.

Si X est un alphabet et $S \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ une série reconnue par k, il existe un homomorphisme μ: $k\langle X\rangle \to k$ et $a \in k$ tel que $(S, w) = a\mu w$. Si $a = 1$ et $a_x = \mu(x)$ $(x \in X)$, on a:

$$(S, w) = \prod_{x \in X} a_x^{|w|_x}, \qquad \text{donc } S = \Big(1 - \sum_{x \in X} a_x \cdot x\Big)^{-1}.$$

Une telle série sera appelée *série géométrique*. $X^*\mathscr{V}$ est l'espace vectoriel engendré par les séries géométriques, en vertu du lemme suivant, qui est immédiat.

LEMME III.2.1. *Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2,..., \mathfrak{M}_n$ des algèbres et S une série reconnue par $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \cdots \times \mathfrak{M}_n$. Alors S est somme de séries S_i, où S_i est reconnue par $\mathfrak{M}_i$.*

b. *Plus grande variété.* La classe de toutes les algèbres de dimension finie est une a-variété notée **Alg**. Comme toute algèbre de dimension finie s'injecte dans une algèbre de matrices, **Alg** est caractérisée par:

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \mathscr{M}_n(k) \in \mathbf{Alg}.$$

La s-variété correspondante est la classe de toutes les séries rationnelles, notée **Rat**.

c. *Variété commutative.* La classe des algèbres commutatives de dimension finie est une a-variété V. $\mathscr{V}$ est alors la a-variété des *séries échangeables* (cf. M. Fliess [13, p. 216]).

3. *Variétés littérales*

Nous inspirant de J. F. Perrot [23], nous dirons qu'une s-variété est *littérale* si pour tout alphabet X et pour tout $x \in X$, la série x est dans $X^*\mathscr{V}$.

PROPOSITION III.3.1. *$\mathscr{V}$ est littérale si et seulement si V contient une algèbre $\mathfrak{M}$ contenant un élément nilpotent non nul.*

Preuve. Si $m \in \mathfrak{M} \in V$ est nilpotent non nul, on se ramène a: $m \neq 0$, $m^2 = 0$. Il existe une forme linéaire φ sur $\mathfrak{M}$ telle que $\varphi(m) = 1$. Soit X un alphabet, $x \in X$ et μ: $k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$ l'homomorphisme défini par: $\mu(x) = m$ et $\mu(X\backslash x) = 0$. Alors $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi)$ est une représentation de la série x, donc $x \in \mathscr{V}$ [lemme III.1.7].

Pour la réciproque, on remarque que l'algèbre syntactique $\mathfrak{M}_x$ de la série $S = x$ contient un élément nilpotent non nul, à savoir $\mu_x(x)$, car $1 = (S, x) = \varphi_x \circ \mu_x(x) \Rightarrow \mu_x(x) \neq 0$ et $\mu_x(x)^2 = 0$, car $\forall$ u, $v \in X^*$, $(S, ux^2v) = 0 \Rightarrow x^2 \in \mathscr{I}_x$. ∎

PROPOSITION III.3.2. *Il existe une plus grande s-variété non littérale $\mathscr{V}$. V est alors la a-variété des produits de corps.*

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

LEMME III.3.3. *Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de dimension finie. Alors $\mathfrak{M}$ est sans éléments nilpotents si et seulement s'il existe des corps $D_1,\dots, D_n$ contenant k en leur centre tels que $\mathfrak{M}$ soit isomorphe à $\prod D_i$.*

Preuve. Si $\mathfrak{M}$ est sans éléments nilpotents, $\mathfrak{M}$ est sans idéaux nilpotents. Par suite [4, th. II.2] $\mathfrak{M}$ est isomorphe à un produit de la forme $\prod \mathscr{M}_{n_i}(D_i)$ où les D_i sont des corps contenant k en leur centre. Comme $\mathfrak{M}$ est sans élément nilpotents, on a $\forall$ i, $n_i = 1$ et $\mathfrak{M} \simeq \prod D_i$. La réciproque est claire.

LEMME III.3.4. *Soit $\mathfrak{M} = \prod D_i$ un produit fini de corps contenant k en leur centre et de dimension finie sur k. Si $\mathfrak{M}' < \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ est sans éléments nilpotents.*

Preuve. Si $\mathfrak{M}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}$, c'est clair. On est donc ramené, d'après le lemme III.3.3, à: $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}/\mathscr{I}$, où $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathfrak{M}$. Soit $m \in \mathfrak{M}$ et $r \geqslant 1$ tel que $m^r \in \mathscr{I}$. Soit e_i l'élément de $\mathfrak{M}$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la ième qui vaut 1; on a: $m = \sum d_i e_i (d_i \in D_i)$. Par suite, $m^r = \sum d_i^r e_i \in \mathscr{I}$. Comme $\mathscr{I}$ est un idéal et D_i un corps, on a: $d_i \neq 0 \Rightarrow e_i = (d_i^{-r} e_i)m^r$. Donc: $m = \sum_{i, d_i \neq 0} d_i e_i \in \mathscr{I}$. Par suite, $\mathfrak{M}'$ est sans éléments nilpotents. ∎

Preuve de la prop. III.3.2.

D'après les lemmes précédents, la classe V décrite dans l'énoncé est une a-variété telle que: $\mathfrak{M} \in V \Leftrightarrow \mathfrak{M}$ est sans éléments nilpotents. Donc $\mathscr{V}$ est une s-variété non littérale [prop. III.3.1]. Soit $\mathscr{V}'$ une variété non littérale et V' telle que $V' \Leftrightarrow \mathscr{V}'$. Alors $\mathfrak{M} \in V' \Rightarrow \mathfrak{M}$ est sans éléments nilpotents [III.3.1] $\Rightarrow \mathfrak{M} \in V$ [III.3.3]. Donc $V' \subset V \Rightarrow \mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$. ∎

Remarque. Un raisonnement analogue montre que V est la plus grande a-variété dont toutes les algèbres sont semi-simples.

4. *Variétés fermées par produit*

Nous dirons que $\mathscr{V}$ est *fermée par produit* si pour tout alphabet X et tous S, $T \in X^*\mathscr{V}$, on a: $ST \in X^*\mathscr{V}$ (cf. J. F. Perrot, [23]). Nous obtenons un résultat analogue à celui de Perrot pour les langages.

PROPOSITION III.4.1. *Si $\mathscr{V}$ est non triviale et fermée par produit, $\mathscr{V}$ est littérale.*

Preuve. $\mathscr{V}$ est non triviale, donc $\mathscr{V}$ contient les séries géométriques (voir 2a) Soit $X = \{x, y\}$: les séries $(1-x)^{-1}$ et $(1-y)^{-1}$ sont dans $X^*\mathscr{V}$, donc leur produit $S = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} x^n y^m$ l'est aussi. Or $xy \notin \mathscr{I}_S$ et $xyxy \in \mathscr{I}_S$, comme on le vérifie aisément. Donc $\mathscr{I}_S$ contient un élément nilpotent et $\mathscr{V}$ est littérale [prop. III.3.1]. ∎

Au produit de deux langages correspond dans la théorie des variétés de langages le produit de Schützenberger des monoïdes [voir 11B, chap. IX, Sect. 2]. Nous allons définir un produit d'algèbres qui possède des propriétés analogues:

Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ deux algèbres. $P = \mathfrak{M}_1 \otimes_k \mathfrak{M}_2$ est muni d'une structure de $\mathfrak{M}_1$-module à gauche et de $\mathfrak{M}_2$-module à droite et ces deux opérations commutent. Nous définissons sur l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_1 \times P \times \mathfrak{M}_2$ un produit de la manière suivante:

$$(m_1, v, m_2)(m_1', v', m_2') = (m_1 m_1', m_1 v' + v m_2', m_2 m_2').$$

Pour mémoire, on remarquera que ceci est formellement repéré par le produit matriciel:

$$\begin{pmatrix} m_1 & v \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1' & v' \\ 0 & m_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 m_1' & m_1 v' + v m_2' \\ 0 & m_2 m_2' \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{M}_1 \times P \times \mathfrak{M}_2$ devient ainsi une k-algèbre, notée $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$: c'est le *produit de Schützenberger des algèbres* $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Son élément neutre est $(1, 0, 1)$. On remarquera que $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ s'identifie à la fois à une sous-algèbre et à un quotient de $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$. L'intérêt de ce produit d'algèbres est qu'il reconnaît le produit des séries:

LEMME III.4.2. *Soient* $S_i \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ *reconnues respectivement par* $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$. *Alors* $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$ *reconnaît* $S_1 S_2$.

Preuve. Soit $(\mathfrak{M}_i, \mu_i, \varphi_i)$ une représentation de S_i, $i = 1, 2$. Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$ et μ l'application $X^* \to \mathfrak{M}$ définie par:

$$\mu w = (\mu_1 w, \nu w, \mu_2 w) \qquad \text{avec} \quad \nu w = \sum_{\substack{w = uv \\ u \neq 1}} \mu_1 u \otimes \mu_2 v.$$

On a:

$$\begin{aligned}
\nu w w' &= \sum_{\substack{ww' = uv \\ u \neq 1}} \mu_1 u \otimes \mu_2 v \\
&= \sum_{\substack{w = uv \\ u \neq 1}} \mu_1 u \otimes \mu_2 v w' + \sum_{\substack{w' = uv \\ u \neq 1}} \mu_1 w u \otimes \mu_2 v \\
&= \Bigg(\sum_{\substack{w = uv \\ u \neq 1}} \mu_1 u \otimes \mu_2 v \Bigg) \mu_2 w' + \mu_1 w \Bigg(\sum_{\substack{w' = uv \\ u \neq 1}} \mu_1 u \otimes \mu_2 v \Bigg) \\
&= \nu w \cdot \mu_2 w' + \mu_1 w \cdot \nu w'.
\end{aligned}$$

Par suite: $\mu w w' = \mu w \cdot \mu w'$. Donc μ se prolonge en un homomorphisme $k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$. Soit φ la forme linéaire sur $\mathfrak{M}$ définie par:

$$\varphi(m_1, m'_1 \otimes m'_2, m_2) = \varphi_1(m'_1) \cdot \varphi_2(m'_2).$$

On a alors:

$$\varphi \circ \mu w = \sum_{\substack{w = uv \\ u \neq 1}} \varphi_1(\mu_1 u) \cdot \varphi_2(\mu_2 v) = \sum_{\substack{w = uv \\ u \neq 1}} (S_1, u)(S_2, v).$$

Par suite $\varphi \circ \mu$ est la série $S'_1 \cdot S_2$ où $S'_1 = S_1 - (S_1, 1)$. Or $S_1 S_2 = S'_1 S_2 + (S_1, 1) S_2$. Soit ψ la forme linéaire sur $\mathfrak{M}$: $\psi(m_1, v, m_2) = (S_1, 1) \cdot \varphi_2(m_2)$. Alors $(\mathfrak{M}, \mu, \varphi + \psi)$ est une représentation de $S_1 S_2$. ∎

Remarque. On pourra remarquer l'analogie de ces constructions avec celles de Schützenberger dans [35, III.A.2; 36].

Nous dirons que la a-variété V est *fermée par produit de Schützenberger* si pour tous $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in V$, on a $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2 \in V$.

Nous obtenons alors une caractérisation des variétés fermées par produit.

PROPOSITION III.4.3. $\mathscr{V}$ *est fermée par produit si et seulement si* V *est fermée par produit de Schützenberger.*

Preuve. Si V est fermée par produit de Schützenberger, $\mathscr{V}$ est fermée par produit [lemme III.1.7. et III.4.2]. Soit $\mathscr{V}$ non triviale fermée par produit. Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \in V$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$. Pour montrer que $\mathfrak{M} \in V$ il suffit de montrer que toute série reconnue par $\mathfrak{M}$ est dans $\mathscr{V}$ [III.1.8]. Soit donc X un alphabet, μ: $k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$ un homomorphisme et φ une forme linéaire sur $\mathfrak{M}$. Soit $P = \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ et p_1, q, p_2 les projections de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}_1$, P, $\mathfrak{M}_2$ respectivement; p_1 et p_2 sont des homomorphismes d'algèbres, donc $\mu_1 = p_1 \circ \mu$ et $\mu_2 = p_2 \circ \mu$ aussi. Posons $\nu = q \circ \mu$ et soient φ_1, ψ, φ_2 les restrictions de φ à $\mathfrak{M}_1$, P, $\mathfrak{M}_2$ respectivement. On a $\varphi = \varphi_1 + \psi + \varphi_2$ et $\mu = (\mu_1, \nu, \mu_2)$.

Donc:

$$\varphi \circ \mu = \varphi_1 \circ \mu_1 + \psi \circ \nu + \varphi_2 \circ \mu_2.$$

Le 1er et le 3ème terme sont des séries reconnues par $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, et sont donc dans $\mathscr{V}$.

Il suffit donc de montrer que $\psi \circ \nu \in \mathscr{V}$. Or ψ est une somme finie de formes linéaires de la forme $\psi_1 \otimes \psi_2$ où ψ_1, ψ_2 sont des formes linéaires sur $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ respectivement. On est donc ramené à $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$. Or il existe un entier p tel que:

$$\forall\, x \in X,\ \nu x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} m_{x,i} \otimes n_{x,i} (m_{x,i} \in \mathfrak{M}_1,\ n_{x,i} \in \mathfrak{M}_2).$$

On vérifie par récurrence sur $|w|$ la formule: $\forall\, w \in X^*$

$$\nu w = \sum_{\substack{w = uxv \\ u,v \in X^*, x \in X}} \mu_1 u \cdot \nu x \cdot \mu_2 v.$$

Par suite:

$$\nu w = \sum_i \sum_{w = uxv} \mu_1 u m_{x,i} \otimes n_{x,i} \mu_2 v$$

et

$$\psi \circ \nu w = \sum_i \sum_{w = uxv} \psi_1(\mu_1 u_1 m_{x,i})\ \psi_2(n_{x,i} \mu_2 v).$$

Soient $S_{i,x}$, $T_{i,x}$ les séries admettant pour représentation $(\mathfrak{M}_1, \mu_1, \psi_{1,i,x})$, $(\mathfrak{M}_2, \mu_2, \psi_{2,i,x})$ avec:

$$\psi_{1,i,x}(m_1) = \psi_1(m_1 m_{x,i}) \qquad \text{et} \quad \psi_{2,i,x}(m_2) = \psi_2(n_{x,i} m_2).$$

On a: $S_{i,x}$, $T_{i,x} \in \mathscr{V}$ et:

$$\psi \circ \nu = \sum_{i,x} S_{i,x} \cdot x \cdot T_{i,x}.$$

Comme $\mathscr{V}$ est fermée par produit et littérale [prop. III.4.1], on a $\psi \circ \nu \in \mathscr{V}$. ∎

D'après un théorème de Schützenberger [37] le monoïde syntactique d'un langage $\subset X^*$ est apériodique (i.e., les groupes qu'il contient sont triviaux) si et seulement s'il appartient à l'algèbre de Boole fermée par produit engendrée par les lettres et X^*. A partir de là, Perrot a montré qu'à la variété des monoïdes apériodiques correspond la plus petite variété de langages non triviale fermée par produit [23]. Nous allons caractériser la plus petite s-variété non triviale fermée par produit. Auparavant, nous montrons un résultat qui s'apparente à celui de Schützenberger.

PROPOSITION III.4.4. *Soit* $S \in k\langle\langle X\rangle\rangle$, *rationnelle. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Tout quotient simple de* $\mathfrak{M}_S$ *est isomorphe à* k.

(ii) *Toute représentation matricielle de* $\mathfrak{M}_S$ *est triangulable.*

(iii) S *appartient à la sous-algèbre de* $k\langle\langle X\rangle\rangle$ *engendrée par les lettres et les séries géométriques.*

Nous avons besoin de quelques lemmes.

LEMME III.4.5. *Soit* $\mathfrak{M}$ *une algèbre.*

(i) *Si* μ *est une représentation matricielle* $\mathfrak{M} \to \mathscr{M}_n(k)$, *on peut par changement de base mettre* μ *sous forme triangulaire par blocs.*

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r \end{pmatrix}, \tag{T}$$

où les μ_i: $\mathfrak{M} \to \mathscr{M}_{n_i}(k)$ *sont des représentations irréductibles et les algèbres* $\mu_i(\mathfrak{M})$ *des algèbres simples.*

(ii) *Si* μ: $\mathfrak{M} \to \mathscr{M}_n(k)$ *est une représentation fidèle de* $\mathfrak{M}$ *sous la forme* (T) *alors toute algèbre simple quotient de* $\mathfrak{M}$ *est quotient d'une des algèbres* $\mu_i(\mathfrak{M})$.

Preuve. (i) Il est bien connu qu'on peut mettre μ sous la forme (T) avec des μ_i: $\mathfrak{M} \to \mathscr{M}_{n_i}(k)$ irréductible. Ainsi k^{n_i} devient un $\mu_i(\mathfrak{M})$-module simple donc $\mu_i(\mathfrak{M})$ est une algèbre primitive de dimension finie, donc simple (cf. [15, th. 2.1.4]).

(ii) On peut supposer que les μ_i sont irréductibles donc les $\mu_i(\mathfrak{M})$ simples. Soit $I \subset \{1,..., r\}$ tel que les idéaux maximaux $\operatorname{Ker} \mu_j$ soient deux à deux distincts pour $j \in I$ et que pour chaque i, il existe $j \in I$ tel que

$\operatorname{Ker}\mu_i = \operatorname{Ker}\mu_j$. Alors l'homomorphisme canonique $\nu = \prod_{j\in I} \mu_j$: $\mathfrak{M} \to \prod_{j\in I} \mu_j(\mathfrak{M})$ est surjectif [10, th. chinois, 18.18].

Soit $m \in \operatorname{Ker}\nu$; alors pour tout $j \in I$, $\mu_j(m) = 0$ donc $\forall\, i \in \{1,..., r\}$, $\mu_i(m) = 0$. Par suite $\mu(\operatorname{Ker}\nu)$ est un idéal nilpotent de $\mu(\mathfrak{M})$, donc $\operatorname{Ker}\nu$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{M}$ (puisque μ est injectif). Donc $\operatorname{Ker}\nu$ est contenu dans tout idéal maximal de $\mathfrak{M}$ et par suite tout quotient simple de $\mathfrak{M}$ est quotient de $\prod_{j\in I} \mu_j(\mathfrak{M})$, donc quotient d'un des $\mu_j(\mathfrak{M})$. ∎

LEMME III.4.6. *Soit* $S \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ *admettant la représentation* $(\mathscr{M}_n(k), \mu, \varphi)$ *où* μ: $k\langle X\rangle \to \mathscr{M}_n(k)$ *est sous la forme* (T). *Alors S appartient à l'algèbre engendrée par les lettres et les séries reconnues par les algèbres* $\mu_i(k\langle X\rangle)$.

Pour la preuve, voir [31, lemme 5]. ∎

LEMME III.4.7. *Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *deux algèbres. Tout quotient simple de* $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$ *est quotient de* $\mathfrak{M}_1$ *ou* $\mathfrak{M}_2$.

Preuve. Soit μ: $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ l'homomorphisme surjectif défini par: $\mu(m_1, v, m_2) = (m_1, m_2)$. Il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}\mu$ est contenu dans le radical R de $\mathfrak{M}_1 \diamond \mathfrak{M}_2$. Or $\operatorname{Ker}\mu = \{(0, v, 0) | v \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2\}$ vérifie $(\operatorname{Ker}\mu)^2 = 0$. Donc $\operatorname{Ker}\mu \subset R$. ∎

Preuve de III.4.4. $\mathfrak{M}_S$ est une algèbre de dimension finie et admet donc une représentation matricielle fidèle. D'où l'équivalence de (i) et (ii), d'après III.4.5. sachant que toute représentation irréductible de k est de dimension 1. Supposons que S vérifie (iii). Remarquons que l'algèbre syntactique d'une lettre ou d'une série géométrique n'a que des quotients simples isomorphes à k. Par suite, d'après III.4.2 et III.4.7, S est reconnue par une algèbre $\mathfrak{M}$ dont tous les quotients simples sont isomorphes à k. Par suite $\mathfrak{M}_S$ est quotient d'une sous-algèbre $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$. D'après III.4.5, $\mathfrak{M}$ admet une représentation fidèle par matrices triangulaires; il en est donc de même pour $\mathfrak{M}'$, donc les quotients simples de $\mathfrak{M}_S$, qui sont aussi quotients de $\mathfrak{M}'$, sont isomorphes à k. Donc S vérifie (i). Que (ii) implique (iii) découle de III.4.6. ∎

PROPOSITION III.4.8. *Il existe une plus petite s-variété* $\mathscr{V}$ *non triviale fermée par produit*: $\mathfrak{M} \in V$ *si et seulement si tous les quotients simples de* $\mathfrak{M}$ *sont isomorphes à k. Une série* $S \in \mathscr{V}$ *si et seulement si S vérifie les conditions de* III.4.4.

Preuve. Il suffit de vérifier que $V = \{\mathfrak{M} |$ tout quotient simple de $\mathfrak{M}$ est $\simeq k\}$ est une *a*-variété. Or celà découle du lemme III.4.5. ∎

Une pseudo-variété de monoïde finis V est appelé une variété à groupe (cf. [23]) si elle possède la propriété suivante: il existe une pseudovariété de groupe finis V' telle que: $M \in V$ si et seulement si les groupes contenus dans M sont dans V'. Perrot a montré que toute variété de langages qui correspond à une variété à groupes est fermée par produit [23]. La réciproque est fausse [42].

Cependant, nous obtenons que si V est une a-variété correspondant à une s-variété $\mathscr{V}$ fermée par produit, alors V est entièrement déterminée par les algèbres simples qu'elle contient.

PROPOSITION III.4.9. *Soit V' une a-variété et V la classe des algèbres de dimension finie dont tous les quotients simples sont dans V'. V est une a-variété.*

Preuve. Celà découle de III.4.5. ∎

Conformément à ce résultat, nous dirons qu'une a-variété V est une *variété à quotients* s'il existe une a-variété V' telle que: $\mathfrak{M} \in V \Leftrightarrow$ tous les quotients simples de $\mathfrak{M}$ sont dans V'. Dans ce cas, on peut prendre pour V' la a-variété engendrée par les algèbres simples $\in V$ et nous écrirons: $V = \diamond V'$.

PROPOSITION III.4.10. *$\mathscr{V}$ est fermée par produit si et seulement si V est une variété à quotients.*

Preuve. Si V est une variété à quotients, $\mathscr{V}$ est fermée par produit d'après III.4.3 et III.4.7.

Soit $\mathscr{V}$ une s-variété fermée par produit et V la a-variété correspondante. Soit V' la a-variété engendrée par les algèbres simples dans V. On a clairement: $V \subset \diamond V'$. Soit $\mathfrak{M} \in \diamond V'$. Soit S une série reconnue par $\mathfrak{M}$. D'après III.4.5. et III.4.6, comme $\mathscr{V}$ est littérale [III.4.1], $S \in \mathscr{V}$. D'après III.1.8, $\mathfrak{M} \in V$. ∎

5. *Variétés fermées par produit d'Hadamard, de Hurwitz.*

Le *produit de Hurwitz* de deux mots u et v est un polynôme noté $u ⧢ v$ et défini de la manière suivante:

$$u ⧢ v = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{u = u_1 \cdots u_n \\ v = v_1 \cdots v_n}} u_1 v_1 u_2 \cdots u_n v_n, \quad u_2, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{n-1} \neq 1.$$

Le produit de Hurwitz des séries S et T, noté $S ⧢ T$, est défini par prolongement par linéarité (il est commutatif):

$$S ⧢ T = \sum_{u,v} (S, u)\,(T, v) u ⧢ v.$$

Rappelons que le produit d'Hadamard est défini en II.3.b et noté $\odot$. Nous disons qu'une s-variété $\mathscr{V}$ est *fermé par produit d'Hadamard* (*resp. produit de Hurwitz*) si pour tout alphabet X et tous S, $T \in X^*\mathscr{V}$ on a: $S \odot T \in X^*\mathscr{V}$ (resp. $S \sqcup\!\sqcup T \in X^*\mathscr{V}$).

De manière analogue, nous disons qu'une a-variété V est *fermé par produit tensoriel* si pour tous $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \in V$, on a $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \in V$. Nous obtenons alors la

PROPOSITION III.5.1. *Soient V et $\mathscr{V}$ une a-variété et une s-variété en correspondance; les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *V est fermé par produit tensoriel.*

(ii) *$\mathscr{V}$ est fermé par produit d'Hadamard.*

(iii) *$\mathscr{V}$ est fermé par produit de Hurwitz.*

Preuve. Pour (i) ⇒ (ii) et (i) ⇒ (iii) nous utilisons des constructions de Schützenberger [36] et Fliess [27]. Si pour $i = 1, 2$, $S_i \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ est une série admettant la représentation $(\mathfrak{M}_i, \mu_i, \varphi_i)$, alors $S_1 \odot S_2$ admet la représentation $(\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2,\ \mu_1 \otimes \mu_2,\ \varphi_1 \otimes \varphi_2)$ et $S_1 \sqcup\!\sqcup S_2$ admet la représentation $(\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2, \mu, \varphi_1 \otimes \varphi_2)$ avec: $\forall\, x \in X$, $\mu x = \mu_1 x \otimes 1 + 1 \otimes \mu_2 x$.

(ii) ⇒ (i). Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \in V$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$. Pour montrer que $\mathfrak{M} \in V$, il suffit de montrer que toute série reconnue par $\mathfrak{M}$ est dans $\mathscr{V}$ [III.1.8]. Soit μ: $k\langle X\rangle \to \mathfrak{M}$ et φ une forme linéaire sur $\mathfrak{M}$. Il existe p et pour tout $x \in X$ des éléments $m_{x,i} \in \mathfrak{M}_1$, $n_{x,i} \in \mathfrak{M}_2$ tels que: $\mu x = \sum_{i \leqslant i \leqslant p} m_{x,i} \otimes n_{x,i}$.

Soit Y l'alphabet:

$Y = \{y_{x,i}\}_{x \in X, 1 \leqslant i \leqslant p}$ et ν l'homomorphisme $k\langle X\rangle \to k\langle Y\rangle$ défini par: $\nu x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} y_{x,i}$.

Soit π: $k\langle Y\rangle \to \mathfrak{M}$ l'homomorphisme défini par: $\pi(y_{x,i}) = m_{x,i} \otimes n_{x,i}$. On a clairement $\mu = \pi \circ \nu$, donc $\varphi \circ \mu = \varphi \circ \pi \circ \nu$. Il suffit donc de vérifier que $\varphi \circ \pi \in \mathscr{V}$. Or φ est somme finie de forme linéaires de la forme $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont des formes linéaires sur $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. On peut donc supposer $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$. Mais dans ce cas, la série $\varphi \circ \pi$ est égale au produit d'Hadamard des séries ayant les représentations $(\mathfrak{M}_1, \pi_1, \varphi_1)$ et $(\mathfrak{M}_2, \pi_2, \varphi_2)$ avec: $\pi_1(y_{x,i}) = m_{x,i}$, $\pi_2(y_{x,i}) = n_{x,i}$.

(iii) ⇒ (ii). Soient S_1, $S_2 \in X^*\mathscr{V}$. Soit $\bar{X}$ un alphabet en bijection avec X, disjoint de X; la bijection sera notée: $x \mapsto \bar{x}$. Soit $Y = X \cup \bar{X}$. Soit μ l'homomorphisme $k\langle Y\rangle \to k\langle X\rangle$ tel que: $\forall\, x \in X$, $\mu x = x$, $\mu\bar{x} = 0$. Alors $S_1 \circ \mu \in Y^*\mathscr{V}$: c'est la série $\sum_{w \in X^*} (S_1, w)w$, que nous noterons encore S_1. De la même manière, $\bar{S}_2 = \sum_{w \in X^*} (S_2, w)\bar{w} \in Y^*\mathscr{V}$. Par suite, $S = S_1 \sqcup\!\sqcup \bar{S}_2 \in Y^*\mathscr{V}$.

Soit ν: $k\langle X\rangle \to k\langle Y\rangle$ défini par: $\nu x = x\bar{x}$. Alors $S \circ \nu \in X^*\mathscr{V}$ et vérifie:

$\forall\, w \in X^*$, $w = x_1 \cdots x_n$, $x_i \in X$, $(S \circ v, w) = (S_1 \sqcup\!\sqcup\, \bar{S}_2, x_1\bar{x}_1 \cdots x_n\bar{x}_n) = (S_1, x_1 \cdots x_n)\quad (\bar{S}_2, \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = (S_1, w)\quad (S_2, w)$. Donc $S \circ v = S_1 \odot S_2 \in X^*\mathscr{V}$. ▮

Remarque. On pourra comparer cet énoncé à [32].

PROPOSITION III.5.2. *Il existe une plus grande s-variété $\mathscr{V}$ fermée par produit de Hurwitz distincte de* **Rat**. *V est la variété définie par: $\mathfrak{M} \in V$ si et seulement si tous ses quotients simples sont commutatifs.*

Nous avons besoin de quelques lemmes.

LEMME III.5.3. *Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre simple de dimension finie non commutative. Il existe $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{M}_n(k) < \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$.*

Preuve. $\mathfrak{M}$ est isomorphe à $\mathscr{M}_r(D)$ où D est un corps contenant k en son centre [15, th. 2.1.6]. Si $r \geqslant 2$, $\mathfrak{M}$ contient $\mathscr{M}_r(k)$ et le lemme en découle. Si $r = 1$, $\mathfrak{M} = D$, et D est un corps non commutatif de dimension finie sur k et contenant k en son centre Z. Soit K un sous-corps commutatif maximal de D. Alors $D \otimes_Z K \simeq \mathscr{M}_n(K)$ [15, cor. au th. 4.2.1], où n est la dimension de D sur K, donc $n \geqslant 2$. Or $Z \supset k$, donc $D \otimes_Z K$ est image homomorphe de $D \otimes_k K$. Par suite $\mathscr{M}_n(k)$ divise $D \otimes K$, donc $D \otimes D$. ▮

COROLLAIRE III.5.4. *Soit V une a-variété fermée par produit tensoriel et contenant une algèbre simple $\mathfrak{M}$ non commutative. Alors $V =$* **Alg**.

Preuve. D'après le lemme, V contient $\mathscr{M}_n(k)$ pour un certain entier $n \geqslant 2$. De la formule $\mathscr{M}_r(k) \otimes \mathscr{M}_s(k) \simeq \mathscr{M}_{rs}(k)$, il suit que $V =$ **Alg** [cf. III.2.b]. ▮

Preuve de la prop. III.5.2. D'après la prop. III.4.9. la classe V des algèbres de dimension finie dont les quotients simples sont commutatifs est une a-variété. D'après le corollaire au lemme III.5.3, V contient toute a-variété fermée par produit tensoriel et distincte de **Alg**. Il reste à vérifier que V est fermé par produit tensoriel. Mais celà découle du lemme III.4.5 et de la constatation que si μ_1 et μ_2 sont deux représentations d'images commutatives, $\mu_1 \otimes \mu_2$ l'est aussi. ▮

Remarque. La s-variété décrite dans III.5.2 est fermée par produit d'après III.4.10. De même la s-variété décrite dans III.4.8. est fermée par produit de Hurwitz, puisque le produit tensoriel de deux matrices triangulaires est triangulaire.

Ajouté sur épreuves. Le problème du quotient de Hadamard de deux séries rationnelles a été récemment résolu (Y. Pourchet: Solution du problème arithmétique du quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **288** (1979), 1055–1057).

Par ailleurs, on peut montrer que le lemme II.5.4. du présent article est encore vrai sans l'hypothèse "β a la propriété (B)." Par conséquent, le théorème II.5.1 est vrai sans les hypothèses (i) et (ii).

REFERENCES

1. B. BENZAGHOU, Algèbres d'Hadamard, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970), 209–252.
2. J. BERSTEL, Sur les pôles et le quotient d'Hadamard de séries $\mathbb{N}$-rationnelles, *C.R. Acad. Sci. Paris* **272** (1971), 1079–1081.
3. N. BOURBAKI, I. "Algèbre," Chap. 1.5, Hermann, Paris; II. "Algèbre commutative," Chap. 5, Hermann, Paris.
4. A. BLANCHARD, "Les corps non commutatifs," Presses Univ. France, Paris, 1972.
5. J. A. BRZOZOWSKY, Hierarchie of aperiodic languages, *RAIRO-informatique Théorique* **10** (1976), 33–49.
6. P. J. CAHEN ET J. L. CHABERT, Eléments quasi-entiers et extensions de Fatou, *J. Algebra* **36** (1975), 185–192.
7. D. G. CANTOR, On arithmetic properties of coefficients of rational functions, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 55–58.
8. C. CHEVALLEY, "Fundamental Concepts of Algebra," Academic Press, New York, 1956.
9. C. CHOFFRUT, "Contribution à l'étude de quelques familles remarquables de fonctions rationnelles," Thèse d'Etat Université, Paris VII, 1978.
10. C. W. CURTIS ET I. REINER, Représentation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience, New York/London, 1962.
11. S. EILENBERG, "Automata, Languages and Machines," Vol. A, Academic Press, New York, 1974; Vol. B, 1976.
12. M. FLIESS, Sur divers produits de séries formelles, *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974), 181–191.
13. M. FLIESS, Matrices de Hankel, *J. Math. Pures Appl.* **53** (1974), 197–224.
14. M. FLIESS, "Sur certaines familles de séries formelles," Thèse d'Etat Université, Paris VII, 1972.
15. I. N. HERSTEIN, "Noncommutative Rings," Carus Mathematical Monograph, 1968.
16. G. HOTZ, Der Satz von Chomsky–Schützenberger und die schwerste Kontext-freie Sprache von S. Greibach, *Soc. Math. France, Astérisque* **38–39** (1976), 105–115.
17. G. JACOB, Un Théorème de factorisation des produits d'endomorphismes de K^n, *J. Algebra*, à paraître.
18. J. KARHUMÄKI, Remarks on commutative $\mathbb{N}$-rational séries, *Théor. Comput. Sci.* **5** (1977), 211–217.
19. K. LAMECHE, Quelque propriétés des séries rationnelles en variables non commutative, *J. Combinatorial Theory Ser. A* **14** (1973), 128–135.
20. S. LANG, "Algebra," Addison–Wesley, Reading, Mass., 1971.
21. C. LECH, A note on recurring séries, *Ark. Mat.* **2** (1953), 417–421.
22. G. PATHIAUX, Algèbre de Hadamard de fractions rationnelles, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **267** (1968), 977–980.
23. J.-F. PERROT, Variétés de langages et opérations, *Théor. Comput. Sci.* **7** (1978), 197–210.
24. J. E. PIN, Sur trois variétés de langages bien connus, *dans* "Actes du 4ème Congrès G.I., Aachen, 1978," Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, New York/Berlin.
25. C. PISOT, Conférences données à l'Institut Fourier de Grenoble, 1959.

26. G. POLYA, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwichlungen rationaler Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **151** (1921), 1–31.
27. G. POLYA ET G. SZEGO, "Aufgaben und Lehrsätzen aus der Analysis," 2, Band 8, Abschnitt, Springer-Verlag, New York/Berlin.
28. C. PROCESI, "Rings With Polynomial Identities," Dekker, New York, 1973.
29. C. REUTENAUER, Une caractérisation des anneaux de Fatou faibles, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **287** (1978), 295–296.
30. C. REUTENAUER, Variétés d'algèbres et de séries rationnelles, *dans* "Actes du 1er Congrès de Maths. Appl. AFCET-SMF Palaiseau, 1978."
31. C. REUTENAUER, Sur les séries associées à certains systèmes de Lindenmayer, *Théor. Comput. Sci.* **9** (1979), 363–375.
32. C. REUTENAUER, Sur les variétés de langages et de monoïdes, *dans* "Actes du 4ème Congrès G.I. Aachen," Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, New York/Berlin.
33. J. SAKAROVITCH, Monoïdes pointés, *Semigroup Forum* **18** (1979), 235–264.
34. A. SALOMAA ET M. SOITTOLA, "Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.
35. M. P. SCHÜTZENBERGER, On the definition of a family of automata, *Inform. Contr.* **4** (1961), 245–270.
36. M. P. SCHÜTZENBERGER, On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 885–889.
37. M. P. SCHÜTZENBERGER, On finite monoïds having only trivial subgroups, *Inform. Contr.* **8** (1965), 190–194.
38. I. SIMON, Piecewise testable events, *in* "Automata Theory and Formal Languages, 2, G.I. Conference," 00. 214–222, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1975.
39. A. I. CHIRCHOV, On rings with identity relations, *Mat. Sb. N.S.* **43** (85) (1957), 277–283. |en russe|
40. E. SONTAG, On some question of rationality and decidability, *J. Comput. System. Sci.* **11** (1975), 375–385.
41. E. SONTAG ET Y. ROUCHALEAU, Sur les anneaux de Fatou forts, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284** (1977), 331–333.
42. H. STRAUBING, Aperiodic homomorphisms and the concatenation product of recognizable sets, *J. Pure Appl. Algebra* **15** (1979), 319–327.
43. Y. ZALCSTEIN, Locally testable languages, *J. Comput. System Sci.* **6** (1972), 151–167.