K-Theory **14:** 305–318, 1998.

Une variante à la Coxeter du groupe de Steinberg

(A Coxeter variant of the Steinberg Group)

CHRISTIAN KASSEL[1] et CHRISTOPHE REUTENAUER[2]

[1]*Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France. e-mail: kassel@math.u-strasbg.fr*

[2]*Mathématiques, Université du Québec à Montréal, Montréal CP 8888, succ. Centre Ville, Canada H3C 3P8. e-mail: reutenauer.christophe@uqam.ca*

(Received: November 1996)

Abstract. Let $G_n(\Lambda)$ be the semi-direct product of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ by the Steinberg group $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ of a ring Λ. We first prove that $G_n(\Lambda)$ has a Coxeter-type presentation. The canonical morphism $\mathrm{St}_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$ extends to a group homomorphism Φ: $G_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$. We next determine the kernel of Φ for $n = \infty$. We also give an expression for the generator of the algebraic K-group $K_2(\mathbf{Z})$ of the integers in terms of permutation matrices.

Mathematics Subject Classifications (1991): 18F25, 19C09, 20B30, 20F55.

Key words: Steinberg group, K_2, infinite symmetric group, central extension of a group.

Résumé. Soit $G_n(\Lambda)$ le produit semi-direct du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par le groupe de Steinberg $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ d'un anneau Λ. Nous établissons au théorème 1 que $G_n(\Lambda)$ a une présentation similaire à celle d'un groupe de Coxeter. L'application canonique $\mathrm{St}_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$ s'étend en un homomorphisme de groupes Φ: $G_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$. Nous en déterminons le noyau dans le cas stable $n = \infty$ (voir Théorèmes 2 et 3). Au passage nous donnons une expression pour le générateur du groupe $K_2(\mathbf{Z})$ de K-théorie algébrique de l'anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers relatifs à l'aide de matrices de permutation (voir Proposition 2).

Mots-Clés: Groupe de Steinberg, K-théorie algébrique, groupe symétrique, extension centrale de groupes.

Introduction

Le but de cet article est de montrer comment l'on peut passer des relations de Steinberg à une version paramétrée des relations de Coxeter qui forment la présentation standard des groupes symétriques. Nous passons ainsi du groupe de Steinberg à un groupe un peu plus gros avec une présentation à la Coxeter, et du groupe K_2 de K-théorie algébrique à un groupe qui joue un rôle équivalent pour le groupe à la Coxeter.

Considérons les matrices carrées $P_i(\lambda)(i = 1, \ldots , n - 1)$ de taille n, obtenues à partir de la matrice identité en insérant à l'intersection des lignes et colonnes i et $i + 1$ le bloc

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le coefficient λ est un élément d'un anneau Λ. Le point de départ de notre travail est l'observation que les matrices $P_i(\lambda)$ satisfont entre elles les trois relations de Coxeter "avec paramètres" suivantes:

$$P_i(\lambda)P_i(0)P_i(\mu) = P_i(\lambda+\mu),$$
$$P_i(\lambda)P_j(\mu) = P_j(\mu)P_i(\lambda) \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2,$$
$$P_i(\lambda)P_{i+1}(\mu)P_i(\nu) = P_{i+1}(\nu)P_i(\mu+\lambda\nu)P_{i+1}(\lambda).$$

Soit $G_n(\Lambda)$ le groupe engendré par des éléments $y_i^\lambda (i, \dots, n-1, \lambda \in \Lambda)$ soumis aux trois relations précédentes. Le théorème 1 énonce que pour $n \geqslant 3$ le groupe ainsi défini est isomorphe au produit semi-direct du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par le groupe de Steinberg $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ de l'anneau Λ.

Soit Φ l'homomorphisme de groupes de $G_n(\Lambda)$ vers le groupe $\mathrm{GL}_n(\Lambda)$ des matrices inversibles donné par $\Phi(y_i^\lambda) = P_i(\lambda)$. Son image est le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires et les matrices de permutation.

Nous déterminons le noyau $N(\Lambda)$ de l'homomorphisme Φ dans le cas stable, c'est-à-dire après passage à la limite inductive sur n, et pour les anneaux dans lesquels la matrice d'une transposition n'est pas le produit de matrices élémentaires. La clé du calcul de $N(\Lambda)$ se trouve dans la suite exacte de groupes

$$0 \to K_2(\Lambda) \to N(\Lambda) \to \mathfrak{A}_\infty \to 1$$

où $\mathfrak{A}_\infty$ est le groupe alterné infini et $K_2(\Lambda)$ est le groupe de K-théorie algébrique de l'anneau Λ tel qu'il a été défini par Milnor. Nous montrons que cette extension de groupes est centrale (corollaire 2) et que, si Λ est l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, le noyau $N(\mathbf{Z})$ est isomorphe à l'extension centrale universelle $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$ de $\mathfrak{A}_\infty$ (théorème 2).

La démonstration du théorème 2 est une application de la théorie des extensions centrales de groupes. Elle fait apparaître quatre extensions centrales:

$$0 \to C \to \tilde{\mathfrak{A}}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty \to 1, \qquad 0 \to K_2(\mathbf{Z}) \to N(\mathbf{Z}) \to \mathfrak{A}_\infty \to 1,$$
$$0 \to K_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{St}(\mathbf{Z}) \to E(\mathbf{Z}) \to 1 \quad \text{et}$$
$$0 \to \mathbf{Z}/2 \to S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}(4) \to 1.$$

Ces extensions centrales non scindées ont en commun que leur noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ et que le générateur de celui-ci s'exprime, dans les quatre cas, simplement à l'aide des permutations (12)(34) et (13)(24) $\in \mathfrak{A}_4$ ou des matrices de permutation correspondantes. En particulier, nous obtenons ainsi une nouvelle expression du générateur de $K_2(\mathbf{Z})$ (proposition 2).

Au théorème 3 nous déterminons $N(\Lambda)$ dans le cas général. Le calcul se ramène à celui de $N(\mathbf{Z})$.

Le paragraphe 1 est consacré à l'énoncé du théorème 1 et le paragraphe 2 à sa démonstration. Au paragraphe 3 nous considérons la limite inductive $G(\Lambda)$ des groupes $G_n(\Lambda)$ et nous énonçons nos résultats concernant le noyau $N(\Lambda)$ de l'homomorphisme Φ. Enfin, le paragraphe 4 contient la démonstration due théorème 2 qui détermine $N(\mathbf{Z})$ ainsi que des calculs dans les quatre extensions centrales mentionnées plus haut.

1. Le groupe $G_n(\Lambda)$

Nous considérons le groupe de Steinberg $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ avec les notations de [3], chap. 5; Λ est un anneau et $n \geqslant 3$. Ce groupe est engendré par les éléments x_{ij}^λ, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, $\lambda \in \Lambda$, sujets aux *relations de Steinberg*:

$$\begin{aligned} &x_{ij}^\lambda x_{ij}^\mu = x_{ij}^{\lambda+\mu}, \\ &x_{ij}^\lambda x_{kl}^\mu = x_{kl}^\mu x_{ij}^\lambda, \quad \text{si } i \neq l \text{ et } j \neq k, \\ &x_{ij}^\lambda x_{jk}^\mu = x_{jk}^\mu x_{ij}^\lambda x_{ik}^{\lambda\mu}, \quad \text{si } i \neq k. \end{aligned} \tag{S}$$

Le but premier de cet article est de montrer que ces relations peuvent être remplacées par des relations à la Coxeter au prix d'un léger agrandissement du groupe.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ par ${}^\sigma x_{ij}^\lambda = x_{\sigma(i)\sigma(j)}^\lambda$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $G_n(\Lambda)$ le produit semi-direct de $\mathfrak{S}_n$ par $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ correspondant à cette action. Un élément typique de $G_n(\Lambda)$ s'écrit sous la forme unique $w\sigma$ avec $w \in \mathrm{St}_n(\Lambda)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et le produit de deux tels éléments est donné par $w\sigma w'\sigma' = w^\sigma w'\sigma\sigma'$. De manière équivalente, on a $\sigma x_{ij}^\lambda \sigma^{-1} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}^\lambda$ dans $G_n(\Lambda)$. Le groupe $St_n(\Lambda)$ est un sous-groupe normal de $G_n(\Lambda)$ et le quotient $G_n(\Lambda)/\mathrm{St}_n(\Lambda)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

Définissons des éléments y_i^λ de $G_n(\Lambda)$ par $y_i^\lambda = x_{i,i+1}^\lambda s_i$, où s_i est la transposition $(i, i+1)$ de $\mathfrak{S}_n$ et $1 \leqslant i < n$.

THÉORÈME 1. *Le groupe $G_n(\Lambda)$ est engendré par les éléments $y_i^\lambda, i = 1, \ldots, n-1, \lambda \in \Lambda$ et admet comme présentation*

$$\begin{aligned} &y_i^\lambda y_i^0 y_i^\mu = y_i^{\lambda+\mu}, \qquad y_i^\lambda y_j^\mu = y_j^\mu y_i^\lambda, \quad si\ |i-j| \geqslant 2, \\ &y_i^\lambda y_{i+1}^\mu y_i^\nu = y_{i+1}^\nu y_i^{\mu+\lambda\nu} y_{i+1}^\lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

Le groupe de Steinberg $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ a été défini à partir des relations universelles satisfaites par les matrices élémentaires $e_{ij}^\lambda (1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ et $\lambda \in \Lambda)$. Rappelons que e_{ij}^λ est la matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient (i, j) égal à λ et des coefficients diagonaux égaux à 1. Soit $\varphi\colon \mathrm{St}_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$ l'homomorphisme de groupes déterminé par $\varphi(x_{ij}^\lambda) = e_{ij}^\lambda$ pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ et $\lambda \in \Lambda$.

Il en va de même pour le groupe $G_n(\Lambda)$: les relations (1) du théorème 1 sont satisfaites par la famille de matrices $P_i(\lambda) (1 \leqslant i < n$ et $\lambda \in \Lambda)$ définies comme suit. Posons

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $\lambda \in \Lambda$. Les matrices $P(\lambda)$ ont été introduites par Cohn (voir [1], Chap. 2) pour étendre l'algorithme d'Euclide à certains anneaux non commutatifs et pour donner une présentation du groupe $\mathrm{GL}_2(\Lambda)$ d'une algèbre associative libre. Elles servent aussi au calcul des réduites des fractions continues usuelles.

La matrice $P_i(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(\Lambda)$ est définie comme la somme diagonale des matrices I_{i-1}, $P(\lambda)$ et I_{n-i-1} où I_j est la matrice identité d'ordre j. En d'autres termes, on a

$$P_i(\lambda) = e_{i,i+1}^{\lambda} s_i \tag{2}$$

où nous avons utilisé la même notation pour la transposition s_i et pour la matrice de permutation correspondante.

LEMME 1. *Pour tout* λ, μ, $\nu \in \Lambda$ *et tout* i, $j = 1, \dots, n-1$ *on a les relations*

$$\begin{aligned} &P_i(\lambda)P_i(0)P_i(\mu) = P_i(\lambda+\mu), \\ &P_i(\lambda)P_j(\mu) = P_j(\mu)P_i(\lambda), \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2, \\ &P_i(\lambda)P_{i+1}(\mu)P_i(\nu) = P_{i+1}(\nu)P_i(\mu+\lambda\nu)P_{i+1}(\lambda). \end{aligned} \tag{3}$$

Démonstration. La première relation a été observée par Cohn. La seconde est évidente. La troisième découle des identités

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu+\lambda\nu & \lambda & 1 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \lambda & 1 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il résulte du lemme qu'il existe un homomorphisme de groupes $\Phi\colon G_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$ défini par $\Phi(y_{i,i+1}^{\lambda}) = P_i(\lambda)$ pour tout i et tout $\lambda \in \Lambda$. D'après la relation (2), la restriction de Φ au sous-groupe $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ est l'homomorphisme φ défini plus haut; de plus, Φ envoie l'élément s_i de $G_n(\Lambda)$ sur la matrice de permutation correspondante.

2. Démonstration du théorème 1

Soit H le groupe défini par la présentation du théorème 1. Il s'agit de montrer que H est isomorphe à $G_n(\Lambda)$.

Commençons par construire un homomorphisme de groupes $\psi\colon H \to G_n(\Lambda)$. Posons $y_{ij}^{\lambda} = x_{i,i+1}^{\lambda} s_i \in G_n(\Lambda)$ et montrons que les éléments y_{ij}^{λ} vérifient les relations (1). Il en résultera que $\psi(y_{ij}^{\lambda}) = x_{i,i+1}^{\lambda} s_i$ définit bien un homomorphisme de groupes $\psi\colon H \to G_n(\Lambda)$.

(1.1) En utilisant les relations de Steinberg (S) nous avons

$$\begin{aligned} y_i^\lambda y_i^0 y_i^\mu &= x_{i,i+1}^\lambda s_i \underbrace{x_{i,i+1}^0}\, s_i x_{i,i+1}^\mu s_i \\ &= x_{i,i+1}^\lambda \underbrace{s_i s_i}\, x_{i,i+1}^\mu s_i \\ &= \underbrace{x_{i,i+1}^\lambda x_{i,i+1}^\mu}\, s_i \\ &= x_{i,i+1}^{\lambda+\mu} s_i \\ &= y_i^{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

(1.2) Soit $i+1<j$. D'après les relations (S), la définition de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ et la commutation de s_i et s_j, nous avons

$$\begin{aligned} y_i^\lambda y_j^\mu &= x_{i,i+1}^\lambda \underbrace{s_i x_{j,j+1}^\mu}\, s_j \\ &= \underbrace{x_{i,i+1}^\lambda x_{j,j+1}^\mu}\, \underbrace{s_i s_j} \\ &= x_{j,j+1}^\mu \underbrace{x_{i,i+1}^\lambda s_j}\, s_i \\ &= x_{j,j+1}^\mu s_j x_{i,i+1}^\lambda s_i \\ &= y_j^\mu y_i^\lambda. \end{aligned}$$

(1.3) Si la permutation σ satisfait $\sigma(i)=j$ et $\sigma(i+1)=j+1$, alors $\sigma y_i^\lambda \sigma^{-1}=y_j^\lambda$. Par suite il suffit de vérifier la dernière des relations (1) pour $i=1$. Nous utilisons (S) à chaque étape. On a

$$\begin{aligned} y_1^\lambda y_2^\mu y_1^\nu &= x_{12}^\lambda s_1 x_{23}^\mu \underbrace{s_2 x_{12}^\nu}\, s_1 \\ &= x_{12}^\lambda s_1 \underbrace{x_{23}^\mu x_{13}^\nu}\, s_2 s_1 \\ &= x_{12}^\lambda \underbrace{s_1 x_{13}^\nu}\, x_{23}^\mu s_2 s_1 \\ &= \underbrace{x_{12}^\lambda x_{23}^\nu}\, \underbrace{s_1 x_{23}^\mu}\, s_2 s_1 \\ &= x_{23}^\nu x_{12}^\lambda \underbrace{x_{13}^{\lambda\nu} x_{13}^\mu}\, \underbrace{s_1 s_2 s_1} \\ &= x_{23}^\nu x_{12}^\lambda \underbrace{x_{13}^{\mu+\lambda\nu} s_2}\, s_1 s_2 \\ &= x_{23}^\nu \underbrace{x_{12}^\lambda s_2}\, x_{12}^{\mu+\lambda\nu} s_1 s_2 \\ &= x_{23}^\nu s_2 \underbrace{x_{13}^\lambda x_{12}^{\mu+\lambda\nu}}\, s_1 s_2 \\ &= x_{23}^\nu s_2 x_{12}^{\mu+\lambda\nu} \underbrace{x_{13}^\lambda s_1}\, s_2 \\ &= \underbrace{x_{23}^\nu s_2}\, \underbrace{x_{12}^{\mu+\lambda\nu} s_1}\, \underbrace{x_{23}^\lambda s_2} \\ &= y_2^\nu y_1^{\mu+\lambda\nu} y_2^\lambda. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de construire un homomorphisme de groupes $\chi\colon G_n(\Lambda)\to H$. Puisque $G_n(\Lambda)$ est le produit semi-direct de $\mathfrak{S}_n$ par $\mathrm{St}_n(\Lambda)$, il a la présentation suivante: les générateurs sont $x_{ij}^{\lambda}(1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ et $\lambda \in \Lambda)$ et $s_i(1 \leqslant i < n)$; les relations sont celles de Steinberg (S) pour les générateurs x_{ij}^{λ}, celles de Coxeter

$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1, \qquad s_i s_j = s_j s_i, \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2, \\ &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \end{aligned} \tag{C}$$

pour les générateurs s_i, et les relations "mixtes"

$$\sigma x_{ij}^{\lambda} \sigma^{-1} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}^{\lambda} \tag{CS}$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Ici l'on a identifié $\mathfrak{S}_n$ avec le groupe engendré par $s_1, \dots, s_{n-1}$ et les relations (C).

(C) Posons $\lambda = \mu = 0$ dans les relations (1). Il en résulte que les éléments $s_i = y_i^0$ de H vérifient les relations de Coxeter (C).

(CS) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ avec $\sigma(k) = i$ et $\sigma(k+1) = j$, posons (au prix d'un léger abus de notation) $x_{ij}^{\lambda} = \sigma y_k^{\lambda} s_k \sigma^{-1}$. Il faut vérifier que cet élément de H est bien défini, i.e. que si σ fixe k et $k+1$, alors $\sigma y_k^{\lambda} s_k \sigma^{-1} = y_k^{\lambda} s_k$; mais dans ce cas, σ commute à y_k^{λ} et à s_k (car σ est un produit de $s_1, \dots, s_{k-2}, s_{k+2}, \dots, s_{n-1}$), d'où le résultat.

Vérifions maintenant que si α est une permutation, alors $\alpha x_{ij}^{\lambda} \alpha^{-1} = x_{\alpha(i)\alpha(j)}^{\lambda}$. On a

$$\alpha x_{ij}^{\lambda} \alpha^{-1} = \alpha \sigma y_k^{\lambda} s_k \sigma^{-1} \alpha^{-1} = (\alpha\sigma) y_k^{\lambda} s_k (\alpha\sigma)^{-1} = x_{\alpha(i)\alpha(j)}^{\lambda}$$

par définition des x_{ij}^{λ}, car $(\alpha\sigma)(k) = \alpha(i)$ et $(\alpha\sigma)(k+1) = \alpha(j)$.

Vérifions enfin les relations de Steinberg.

(S.1) Pour la première, en utilisant la première des relations (1), l'on a

$$x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu} = \sigma y_k^{\lambda} s_k \sigma^{-1} \sigma y_k^{\mu} s_k \sigma^{-1} = \sigma y_k^{\lambda} y_k^{0} y_k^{\mu} s_k \sigma^{-1} = \sigma y_k^{\lambda+\mu} s_k \sigma^{-1} = x_{ij}^{\lambda+\mu}$$

(S.2) Pour la seconde relation de Steinberg, il suffit de vérifier que $x_{12}^{\lambda} x_{34}^{\mu} = x_{34}^{\mu} x_{12}^{\lambda}$ et que $x_{12}^{\lambda} x_{13}^{\mu} = x_{13}^{\mu} x_{12}^{\lambda}$. La première égalité s'obtient clairement de la deuxième relation (1) puisque $x_{12}^{\lambda} = y_1^{\lambda} y_1^0$ et $x_{34}^{\mu} = y_3^{\mu} y_3^0$. Pour la seconde, on a, en utilisant plusieurs fois la relation de tresse dans (1),

$$\begin{aligned} x_{12}^{\lambda} x_{13}^{\mu} &= y_1^{\lambda} s_1 s_2 y_1^{\mu} s_1 s_2 \\ &= y_1^{\lambda} \underbrace{y_1^0 y_2^0 y_1^{\mu}} y_1^0 y_2^0 \\ &= \underbrace{y_1^{\lambda} y_2^{\mu} y_1^0} \underbrace{y_2^0 y_1^0 y_2^0} \\ &= y_2^0 y_1^{\mu} \underbrace{y_2^{\lambda} y_1^0 y_2^0} y_1^0 \\ &= y_2^0 y_1^{\mu} y_1^0 y_2^0 y_1^{\lambda} y_1^0 \\ &= \underbrace{s_2 y_1^{\mu} s_1 s_2} \underbrace{y_1^{\lambda} s_1} \\ &= x_{13}^{\mu} x_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

(S.3) Enfin, la dernière relation de Steinberg se vérifie comme suit en utilisant (S) et plusieurs fois la relation $y_i^0 y_i^0 = 1$:

$$\begin{aligned}
x_{12}^{\lambda} x_{23}^{\mu} &= y_1^{\lambda} y_1^0 y_2^{\mu} y_2^0 \\
&= y_1^{\lambda} \underbrace{y_1^0 y_2^{\mu} y_1^0}\, y_1^0 y_2^0 \\
&= \underbrace{y_1^{\lambda} y_2^0 y_1^{\mu}}\, y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\
&= y_2^{\mu} y_1^{\lambda\mu} y_2^{\lambda} y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\
&= \underbrace{y_2^{\mu} y_2^0}\, \underbrace{y_2^0 y_1^{\lambda\mu} y_2^{\lambda}}\, y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\
&= x_{23}^{\mu} y_1^{\lambda} y_2^{\lambda\mu} y_1^0 y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\
&= x_{23}^{\mu}\, \underbrace{y_1^{\lambda} y_1^0}\, y_1^0 y_2^{\lambda\mu}\, \underbrace{y_1^0 y_2^0 y_1^0}\, y_2^0 \\
&= x_{23}^{\mu} x_{12}^{\lambda} y_1^0 y_2^{\lambda\mu} y_2^0 y_1^0\, \underbrace{y_2^0 y_2^0} \\
&= x_{23}^{\mu} x_{12}^{\lambda}\, \underbrace{y_1^0 y_2^{\lambda\mu} y_2^0 y_1^0} \\
&= x_{23}^{\mu} x_{12}^{\lambda} x_{13}^{\lambda\mu}.
\end{aligned}$$

Les calculs précédents montrent que $\chi(x_{i,i+1}^{\lambda}) = y_i^{\lambda} y_i^0$ et $\chi(s_i) = y_i^0 \in G_n(\Lambda)$ définissent un homomorphisme de groupes $\chi : G_n(\Lambda) \to H$ qui est clairement inverse de ψ.

3. Stabilisation

Soit $\mathrm{GL}(\Lambda)$ (resp. $\mathfrak{S}_\infty$) la limite inductive des groupes $\mathrm{GL}_n(\Lambda)$ (resp. des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$) suivant l'injection standard $\mathrm{GL}_n(\Lambda) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\Lambda)$ (resp. $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n+1}$). On considère aussi le groupe de Steinberg stabilisé $\mathrm{St}(\Lambda)$ qui est la limite inductive des groupes $\mathrm{St}_n(\Lambda)$. L'homomorphisme φ du paragraphe 1 s'étend en un homomorphisme φ: $\mathrm{St}(\Lambda) \to \mathrm{GL}(\Lambda)$ dont l'image est le sous-groupe $E(\Lambda)$ engendré par les matrices élémentaires. Le noyau de φ est le groupe de K-théorie algébrique $K_2(\Lambda)$ introduit par Milnor (voir [3], Chap. 5).

Le groupe $\mathfrak{S}_\infty$ opère sur $\mathrm{St}(\Lambda)$, ce qui permet de définir le produit semi-direct $G(\Lambda)$ de $\mathfrak{S}_\infty$ par $\mathrm{St}(\Lambda)$. Il est clair que $G(\Lambda)$ est la limite inductive des groupes $G_n(\Lambda)$. De même que $\mathrm{St}(\Lambda)$ est engendré par les symboles x_{ij}^{λ} où i et j parcourent tous les entiers distincts $\geqslant 1$, le groupe stabilisé $G(\Lambda)$ admet la présentation donnée dans le théorème 1 avec pour générateurs les symboles y_i^{λ} où i parcourt maintenant tous les entiers $\geqslant 1$.

L'homomorphisme Φ du paragraphe 1 s'étend en un homomorphisme de groupes Φ: $G(\Lambda) \to \mathrm{GL}(\Lambda)$. Son image $ES(\Lambda)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\Lambda)$ engendré par $E(\Lambda)$ et les matrices de permutation.

LEMME 2. *Soit S le sous-groupe de $\mathfrak{S}_\infty$ formé des matrices de permutation appartenant à $E(\Lambda)$. S'il existe une matrice de permutation impaire dans $E(\Lambda)$, alors* *toutes les matrices de permutation sont dans $E(\Lambda)$ et l'on a $ES(\Lambda) = E(\Lambda)$ et $S = \mathfrak{S}_\infty$. Sinon, $E(\Lambda)$ est un sous-groupe d'indice deux dans $ES(\Lambda)$ et S s'identifie au sous-groupe $\mathfrak{A}_\infty$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_\infty$.*

Démonstration. On sait que toute matrice de permutation paire appartient à $E(\mathbf{Z})$, donc à $E(\Lambda)$ (cf. [3], Chap. 9). Par conséquent, $\mathfrak{A}_\infty \subset S \subset \mathfrak{S}_\infty$. Comme $\mathfrak{A}_\infty$ est d'indice deux dans $\mathfrak{S}_\infty$, on a soit $S = \mathfrak{S}_\infty$, soit $S = \mathfrak{A}_\infty$.

Nous dirons que l'anneau Λ est *normal* si $ES(\Lambda)$ contient $E(\Lambda)$ comme sous-groupe d'indice deux. Dans le cas où $ES(\Lambda) = E(\Lambda)$, nous dirons qu'il est *pathologique*. Parmi les anneaux normaux l'on trouve les anneaux Λ munis d'un morphisme $\varphi\colon \Lambda \to \Lambda'$ vers un anneau commutatif Λ' dans lequel $-1 \neq 1$. En effet, si σ est la matrice d'une transposition dans $\mathrm{GL}(\Lambda)$, on a $\det(\varphi(\sigma)) = -1$. Il en résulte qu'une algèbre de groupe ou une algèbre de polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/n$ avec $n > 2$ est normale. Par contre, une $\mathbf{Z}/2$- algèbre est pathologique. L'anneau $\mathbf{Z}/4\langle a, b\rangle/(ab - 2, ba)$ est un exemple d'anneau pathologique qui n'est pas une $\mathbf{Z}/2$- algèbre.

Soit $N'(\Lambda)$ le noyau de l'homomorphisme $\Phi\colon G(\Lambda) \to \mathrm{GL}(\Lambda)$.

PROPOSITION 1. *Le groupe $N'(\Lambda)$ est le centralisateur de $\mathrm{St}(\Lambda)$ dans $G(\Lambda)$.*

Démonstration. Elle est inspirée de celle du théorème 5.1 de [3]. Si x est un élément du centralisateur, alors la matrice $\Phi(x)$ commute à toutes les matrices élémentaires e_{ij}^{λ}. Donc $\Phi(x)$ est une matrice scalaire. On conclut en remarquant qu'une matrice scalaire de $\mathrm{GL}(\Lambda)$ est nécessairement la matrice identité. Ainsi $x \in N'(\Lambda)$.

Réciproquement, soit $y \in G(\Lambda)$ tel que $\Phi(y) = 1$. Il suffit de montrer que y commute à tous les générateurs x_{ij}^{λ} du groupe de Steinberg. Soit n assez grand pour que y soit le produit d'éléments x_{ij}^{λ} avec $i, j < n$ et d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Soit P_n le sous-groupe de $St(\Lambda)$ engendré par $x_{1n}^{\mu_1}, x_{2n}^{\mu_2}, \ldots, x_{n-1,n}^{\mu_{n-1}}$ où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1} \in \Lambda$. D'après le lemme 5.2 de [3], le sous-groupe P_n est commutatif et la restriction de Φ à P_n est injective; de plus, $x_{ij}^{\lambda} P_n x_{ij}^{-\lambda} \subset P_n$ si $i < n$ et $j < n$. De même si $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$, on a $\sigma P_n \sigma^{-1} \subset P_n$ car σ permute $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ et fixe n. Par conséquent, $y P_n y^{-1} \subset P_n$.

Pour tout $x \in P_n$, on a $yxy^{-1} \in P_n$ d'après ce qui précède. Les égalités

$$\Phi(yxy^{-1}) = \Phi(y)\Phi(x)\Phi(y)^{-1} = \Phi(x)$$

montrent que $yxy^{-1} = x$ puisque la restriction de Φ à P_n est injective. Il en résulte que y commute aux éléments x_{kn}^{μ} avec $k < n$. On montrerait de même que y commute aux éléments $x_{n\ell}^{\mu}$ avec $\ell < n$. Par conséquent, y commute à $x_{kn}^{\mu} x_{n\ell}^{1} x_{kn}^{-\mu} x_{n\ell}^{-1} = x_{k\ell}^{\mu}$. On conclut en prenant n arbitrairement grand.

COROLLAIRE 1. *On a une extension centrale de groupes*

$$0 \to K_2(\Lambda) \to N'(\Lambda) \xrightarrow{\pi} S \to 1$$

où π est la composée de l'inclusion de $N'(\Lambda)$ dans $G(\Lambda)$ et de la surjection canonique de $G(\Lambda)$ sur $\mathfrak{S}_\infty = G(\Lambda)/\mathrm{St}(\Lambda)$.

Démonstration. Montrons d'abord que la suite précédente est exacte. L'image de π est S. En effet, soit $x = w\sigma$ un élément de $N'(\Lambda)$ avec $w \in \mathrm{St}(\Lambda)$ et $\sigma = \pi(x) \in \mathfrak{S}_\infty$. Par définition de $N'(\Lambda)$ on a $1 = \Phi(x) = \varphi(w)\sigma$ où, comme précédemment, l'on identifie σ avec la matrice de permutation correspondante. On voit ainsi que $\pi(x) = \sigma = \varphi(w)^{-1}$ appartient à la fois à $\mathfrak{S}_\infty$ et à l'image de φ, donc à S. Réciproquement, soit $\sigma \in S = E(\Lambda) \bigcap \mathfrak{S}_\infty$. Comme l'image de φ est $E(\Lambda)$, il existe un élément w de $\mathrm{St}(\Lambda)$ tel que $\varphi(w) = \sigma^{-1}$. Par suite, $w\sigma$ appartient à $N'(\Lambda)$ et $\pi(w\sigma) = \sigma$.

Déterminons le noyau de π: $N'(\Lambda) \to S$. Soit $x = w\sigma$ un élément du noyau avec $w \in \mathrm{St}(\Lambda)$ et $\sigma = \pi(x) \in \mathfrak{S}_\infty$. On a $\pi(x) = 1$ et

$$1 = \Phi(x) = \varphi(w)\sigma = \varphi(w)\pi(x) = \varphi(w).$$

Donc $x = w$ avec $\varphi(w) = 1$. Il appartient donc au noyau de φ, c'est-à-dire à $K_2(\Lambda)$. Réciproquement, si $x = w$ avec $w \in K_2(\Lambda)$, alors $\pi(x) = 1$ et $\Phi(x) = \varphi(w)\pi(x) = 1$.

D'après la proposition 1, tout élément de $N'(\Lambda)$ commute à tout élément du groupe de Steinberg et donc à tout élément du sous-groupe $K_2(\Lambda)$. Il en résulte que l'extension est centrale.

Nous considérons maintenant le sous-groupe $N(\Lambda)$ constitué des éléments x de $N'(\Lambda)$ tels que $\pi(x)$ appartient à $\mathfrak{A}_\infty$. Il est clair que $N(\Lambda) = N'(\Lambda)$ si Λ est un anneau normal. Si Λ est pathologique, alors $N(\Lambda)$ est un sous-groupe d'indice deux de $N'(\Lambda)$.

Le reste de cet article est consacré à la détermination de la structure du groupe $N(\Lambda)$ (c'est-à-dire du noyau de Φ: $G(\Lambda) \to \mathrm{GL}(\Lambda)$ si Λ est normal).

Si l'on restreint l'extension du corollaire 1 à $\mathfrak{A}_\infty$, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 2. *L'extension* $0 \to K_2(\Lambda) \to N(\Lambda) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_\infty \to 1$ *est centrale.*

On sait depuis Schur [5] (voir aussi [2], Théorème 2.12.5) que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ d'ordre n a une extension centrale universelle de noyau $C \cong \mathbf{Z}/2$ dès que $n > 7$. Il en est de même de $\mathfrak{A}_\infty$ dont l'extension centrale universelle sera notée $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$. L'universalité de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$ et le corollaire 2 appliqué à l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs impliquent que l'on a un unique morphisme d'extension centrales

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 1 \\
0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{Z}) \arrow[r] & N(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Comme $K_2(\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2$ (cf. [3], Corollaire 10.2), la question se pose de savoir si l'application u: $C \to K_2(\mathbf{Z})$ ainsi définie est nulle ou non. La réponse est donnée au théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Les morphismes* u: $C \to K_2(\mathbf{Z})$ *et* u: $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \to N(\mathbf{Z})$ *du diagramme (4) sont des isomorphismes.*

Ce théorème sera démontré au paragraphe 4. Nous l'utilisons pour déterminer la structure du groupe $N(\Lambda)$ pour un anneau Λ général.

THÉORÈME 3. *Soit i: $K_2(\mathbf{Z}) \to K_2(\Lambda)$ l'application induite par l'homomorphisme canonique d'anneaux $\mathbf{Z} \to \Lambda$. On a l'isomorphisme de groupes*

$$N(\Lambda) \cong (\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \times K_2(\Lambda))/\langle (u^{-1}(\gamma), i(\gamma))\rangle$$

où γ est le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$ et $\langle (u^{-1}(\gamma), i(\gamma))\rangle$ est le sous-groupe d'ordre deux engendré par l'élément central $(u^{-1}(\gamma), i(\gamma))$ de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \times K_2(\Lambda)$. En particulier, si l'application i: $K_2(\mathbf{Z}) \to K_2(\Lambda)$ est nulle, alors $N(\Lambda) \cong \mathfrak{A}_\infty \times K_2(\Lambda)$. Si Λ est un anneau augmenté (autrement dit, s'il est muni d'un homomorphisme d'anneaux ε: $\Lambda \to \mathbf{Z}$), on a $N(\Lambda) \cong \widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \times K_2(\Lambda)/i(K_2(\mathbf{Z}))$.

Démonstration. Le théorème 2 implique que l'extension centrale $N(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_\infty$ est universelle. D'après le corollaire 2 il existe donc un unique morphisme d'extensions centrales

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_2(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & N(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty & \longrightarrow & 1 \\ & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2(\Lambda) & \longrightarrow & N(\Lambda) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Puisqu'il est unique, i est nécessairement induit par le morphisme canonique $\mathbf{Z} \to \Lambda$.

(a) Soit $M = N(\mathbf{Z}) \times K_2(\Lambda)$. Comme $K_2(\mathbf{Z})$ est abélien, $x \mapsto (x, i(x)^{-1})$ définit un homomorphisme de groupes δ: $K_2(\mathbf{Z}) \to M$. On voit immédiatement que δ est injectif et que son image est un sous-groupe distingué de M.

Pour tout $(x, y) \in M$, posons $f(x, y) = i(x)y \in N(\Lambda)$. Comme $K_2(\Lambda)$ est central dans $N(\Lambda)$, l'application f est un homomorphisme de groupes. Si $x \in K_2(\mathbf{Z})$, on a

$$(f \circ \delta)(x) = f(x, i(x)^{-1}) = i(x)i(x)^{-1} = 1,$$

ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes f': $M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) \to N(\Lambda)$ par

$$f'((x, y) \bmod \delta(K_2(\mathbf{Z}))) = i(x)y.$$

Considérons l'homomorphisme composé $\pi \circ f'$: $M \to \mathfrak{A}_\infty$. Montrons d'abord qu'il est surjectif. En effet, si $\sigma \in \mathfrak{A}_\infty$, il existe $x \in N(\mathbf{Z})$ tel que $\pi(x) = \sigma$. Par conséquent,

$$(\pi \circ f')((x, 1) \bmod \delta(K_2(\mathbf{Z}))) = \pi(i(x)) = \pi(x) = \sigma.$$

Etablissons maintenant que le noyau de $\pi \circ f'$ est isomorphe à $K_2(\Lambda)$. Soit $(x, y) \in M$ tel que $\pi(i(x)y) = 1$. Alors il existe $z \in K_2(\Lambda)$ tel que $i(x)y = z$. Il en résulte que dans M on a

$$(x, y) \equiv (x, y)(x^{-1}, i(x)) = (x, y)(x^{-1}, zy^{-1}) = (1, yzy^{-1})$$

modulo $\delta(K_2(\mathbf{Z}))$, ce qui prouve que tout élément du noyau de $\pi \circ f'$ provient de $K_2(\Lambda)$. Il reste à voir que l'homomorphisme $z \mapsto (1, z) \bmod \delta(K_2(\mathbf{Z}))$ de $K_2(\Lambda)$ dans $M/\delta(K_2(\mathbf{Z}))$ est injectif. Mais si $(1, z) = (x, i(x)^{-1})$, alors $x = 1$ et donc $z = i(x)^{-1} = 1$.

Nous avons ainsi construit un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2(\Lambda) \arrow[r] & M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) \arrow[r, "\pi\circ f'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 1 \\ 0 \arrow[r] & K_2(\Lambda) \arrow[r] & N(\Lambda) \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

On vérifie sans peine que f' induit l'identité sur les noyaux. Il en résulte que $f'\colon M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) \to N(\Lambda)$ est un isomorphisme. On conclut à l'aide du théorème 2.

(b) Si $i\colon K_2(\mathbf{Z}) \to K_2(\Lambda)$ est nulle, alors $\delta(x) = (x, 1)$, et donc d'après (a)

$$N(\Lambda) \cong M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) \cong (N(\mathbf{Z})/K_2(\mathbf{Z})) \times K_2(\Lambda) \cong \mathfrak{A}_\infty \times K_2(\Lambda).$$

(c) Si Λ est un anneau augmenté, l'on a par fonctorialité le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & N(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 1 \\ 0 \arrow[r] & K_2(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & N(\Lambda) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 1 \\ 0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{Z}) \arrow[r] & N(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Ceci montre que le groupe abélien $K_2(\Lambda)$ se met sous la forme $K_2(\Lambda) = K_2(\mathbf{Z}) \oplus \tilde{K}_2(\Lambda)$ et que le noyau de ε: $N(\Lambda) \to N(\mathbf{Z})$ est $\tilde{K}_2(\Lambda)$. Comme le morphisme ε est scindé par i et que $\tilde{K}_2(\Lambda) \subset K_2(\Lambda)$ est central dans $N(\Lambda)$, l'extension centrale

$$0 \to \tilde{K}_2(\Lambda) \to N(\Lambda) \xrightarrow{\varepsilon} N(\mathbf{Z}) \to 1$$

est scindée. Par conséquent, $N(\Lambda) \cong N(\mathbf{Z}) \times \tilde{K}_2(\Lambda)$. On conclut à nouveau à l'aide du théorème 2.

4. Quelques calculs dans des extensions centrales de groupes

Soit $0 \to C \to S \to E \to 1$ une extension centrale de groupes. Si deux éléments α et β du groupe E commutent, c'est- à-dire si leur commutateur $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ vaut 1, ils définissent un élément $\alpha * \beta$ du noyau C par la formule

$$\alpha * \beta = [x, y] \tag{5}$$

où x et y sont des relèvements quelconques dans S de α et de β respectivement (voir [3], Chap. 8).

Appliquons cette construction aux permutations paires $\alpha = (12)(34)$ et $\beta = (13)(24)$. Comme elles commutent, elles définissent un élément $\alpha *_A \beta$ du noyau $C \cong \mathbf{Z}/2$ de l'extension centrale $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$.

Considérons maintenant l'extension centrale $0 \to K_2(\mathbf{Z}) \to N(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_\infty \to 1$ du corollaire 2. La construction (5) fournit un élément $\alpha *_N \beta$ du noyau $K_2(\mathbf{Z})$. Il est clair que $\alpha *_N \beta$ est l'image de $\alpha *_A \beta$ par l'homomorphisme u du diagramme (4).

Démonstration du Théorème 2. Au vu de ce qui précède, il suffit de vérifier que l'élément central $\alpha *_N \beta$ de $N(\mathbf{Z})$ n'est pas trivial. Pour le calculer, il faut tout d'abord relever α et β dans $N(\mathbf{Z})$. Pour tout $i \neq j$ posons $w_{ij} = x_{ij}^1 x_{ji}^{-1} x_{ij}^1$ et $H_{ij} = w_{ij}^{-2}$ (l'élément H_{ij} est noté $h_{ij}(-1)$ dans [3], Chap. 9). Observons qu'une permutation σ opère sur w_{ij} et sur H_{ij} par ${}^\sigma w_{ij} = w_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et ${}^\sigma H_{ij} = H_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Définissons

$$A = w_{12}w_{34}H_{13}^{-1} \quad \text{et} \quad B = w_{13}w_{24}H_{12}^{-1} \tag{6}$$

dans le groupe de Steinberg $\mathrm{St}(\mathbf{Z})$. On a

$$\varphi(A) = \widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(B) = \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Les matrices $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ sont les matrices des permutations α et β respectivement. Nous affirmons que l'élément $A^{-1}\alpha$ (resp. l'élément $B^{-1}\beta$) de $G(\mathbf{Z})$ est un relèvement de α (resp. de β) dans $N(\mathbf{Z})$. En effet,

$$\Phi(A^{-1}\alpha) = \varphi(A)^{-1}\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}^{-1}\widehat{\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \pi(A^{-1}\alpha) = \alpha.$$

De même pour $B^{-1}\beta$.

L'élément $\alpha *_N \beta$ du noyau $K_2(\mathbf{Z})$ de l'extension centrale $N(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_\infty$ se calcule donc comme suit:

$$\begin{aligned} \alpha *_N \beta &= [A^{-1}\alpha, B^{-1}\beta] \\ &= A^{-1}\alpha B^{-1}\beta\alpha^{-1}A\beta^{-1}B \\ &= A^{-1}\alpha B^{-1}\alpha^{-1}\beta A\beta^{-1}B \\ &= A^{-1}\,{}^{\alpha}(B^{-1})\,{}^{\beta}A B \end{aligned}$$

car α et β commutent. En remplaçant A et B par leur valeur, on a

$$\alpha *_N \beta = H_{13}w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}w_{34}w_{12}H_{31}^{-1}w_{13}w_{24}H_{12}^{-1}$$

Le corollaire 9.4 de [3] implique que w_{13} et w_{24} commutent. Par ailleurs,

$$\varphi(w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une autre application de *loc. cit.* montre alors que

$$w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}w_{34}w_{12}H_{31}^{-1}w_{13}w_{24} = w_{12}w_{34}H_{13}^{-1},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\alpha *_N \beta &= H_{13}w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}\underbrace{w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}w_{34}w_{12}H_{31}^{-1}w_{13}w_{24}}H_{12}^{-1}\\ &= H_{13}w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{12}w_{34}H_{13}^{-1}H_{12}^{-1}.\end{aligned}$$

Toujours d'après le corollaire 9.4 de [3], les éléments w_{12} et w_{34} commutent également et

$$\varphi(w_{12}^{-1}w_{34}^{-1}) = \left(\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right).$$

Par conséquent, $w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{12}w_{34} = H_{12}$, d'où nous tirons

$$\begin{aligned}\alpha *_N \beta &= H_{13}\underbrace{w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{12}w_{34}}H_{13}^{-1}H_{12}^{-1}\\ &= H_{13}H_{12}H_{13}^{-1}H_{12}^{-1}\\ &= [H_{12}, H_{13}]^{-1},\end{aligned}$$

qui n'est autre, d'après Milnor (voir [3], Chap. 8–10), que le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$.

COROLLAIRE 3. *L'élément $\alpha *_A \beta$ est le générateur du noyau $C \cong \mathbf{Z}/2$ de l'extension centrale universelle $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$.*

Nous terminons en donnant une expression du générateur du groupe $K_2(\mathbf{Z})$ à l'aide des matrices de permutation $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ de (7). Ces matrices appartiennent à $E(\mathbf{Z})$. Par la construction (5) elles définissent donc un élément $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta}$ du noyau $K_2(\mathbf{Z})$ de l'extension centrale $\mathrm{St}(\mathbf{Z}) \to E(\mathbf{Z})$.

PROPOSITION 2. *L'élément $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta}$ engendre le groupe $K_2(\mathbf{Z})$.*

Démonstration. Soit A et B les éléments de $\mathrm{St}(\mathbf{Z})$ définis par (6). Comme ils relèvent $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, on a $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta} = [A, B]$. Un calcul similaire à celui de la démonstration du théorème 2 permettrait de montrer que le commutateur $[A, B]$ est le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$.

Nous allons procéder différemment. Rappelons (voir [3], Chap. 7–10) qu'il existe un isomorphisme naturel de $K_2(\mathbf{Z})$ vers le groupe fondamental $\pi_1\mathrm{SL}(\mathbf{R}) \cong \mathbf{Z}/2$ où $\mathbf{R}$ est le corps des nombres réels et où $\mathrm{SL}(\mathbf{R})$ est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{GL}(\mathbf{R})$ de déterminant 1. Il suffit donc de montrer que l'image de $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta}$ dans le groupe $\pi_1\mathrm{SL}(\mathbf{R}) \cong \pi_1\mathrm{SL}_4(\mathbf{R})$ n'est pas triviale. Pour établir ce dernier point, nous allons montrer que $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta}$ s'envoie sur le générateur du centre du groupe de revêtement universel du groupe SO(4) des matrices spéciales orthogonales, ce dernier étant un rétract par déformation de $\mathrm{SL}_4(\mathbf{R})$.

Soit $\mathbf{H}$ le corps des quaternions muni de la structure euclidienne induite par la norme $\|x\| = (xx^*)^{1/2}$ où x^* désigne le conjugué de x. Notons S^3 le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1. Si u et v sont des éléments de S^3, l'application linéaire $x \mapsto uxv^*$ est une isométrie positive $\rho(u, v)$ de $\mathbf{H}$. Dans la base orthonormée $(1, i, j, k)$ formée par les générateurs standard de $\mathbf{H}$, on peut identifier $\rho(u, v)$ à un élément de SO(4). Ceci définit un homomorphisme surjectif de groupes $\rho\colon S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}(4)$ dont le noyau, d'ordre deux, est engendré par $(-1, -1)$. Il est bien connu que cette extension centrale est le groupe de revêtement universel de SO(4) (voir par exemple [4], Chap. 10).

Revenons aux matrices $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. Le calcul montre que $\widehat{\alpha} = \rho(k, j)$ et $\widehat{\beta} = \rho(i, k)$. Par conséquent, $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta}$ s'envoie sur le commutateur

$$\kappa = (k, j)(i, k)(k, j)^{-1}(i, k)^{-1} \in S^3 \times S^3.$$

On conclut en observant que dans le corps de quaternions l'on a

$$\kappa = (kik^*i^*, jkj^*k^*) = (-1, -1).$$

COROLLAIRE 4. *L'extension centrale universelle* $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$ *de* $\mathfrak{A}_\infty$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{St}(\mathbf{Z})$ *formé des éléments dont l'image par* φ *est une matrice de permutation paire:* $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \cong \{w \in \mathrm{St}(\mathbf{Z}) \mid \varphi(w) \in \mathfrak{A}_\infty\}$.

Démonstration. Par universalité de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$, l'inclusion des matrices de permutation paires dans $E(\mathbf{Z})$ induit un unique morphisme d'extensions de groupes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \mathfrak{A}_\infty \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{Z}) \arrow[r] & \mathrm{St}(\mathbf{Z}) \arrow[r] & E(\mathbf{Z}) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{8}$$

Par construction, j envoie le générateur $\alpha *_A \beta$ de C sur l'élément $\widehat{\alpha} *_{\mathrm{St}} \widehat{\beta}$ dont nous venons de montrer que c'est le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$. Il en résulte que $j\colon C \to K_2(\mathbf{Z})$ est un isomorphisme. Ceci, joint à la commutativité du diagramme (8), implique que l'homomorphisme $j\colon \widetilde{\mathfrak{A}}_\infty \to \mathrm{St}(\mathbf{Z})$ induit un isomorphisme de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$ sur le sous-groupe des éléments dont l'image par φ est une matrice de permutation paire.

Références

1. Cohn, P. M.: *Free Rings and Their Relations*, London Math. Soc. Monogr., Academic Press, London, 1971.
2. Karpilovsky, G.: *The Schur Multiplier*, London Math. Soc. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1987.
3. Milnor, J.: *Introduction to Algebraic K-theory*, Ann. Math. Stud. 72, Princeton University Press, University of Tokyo Press, Princeton, 1971.
4. Porteous, I.: *Topological Geometry*, 2nd edn, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
5. Schur, J.: Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Reine Angew. Math.* **139** (1911), 155–250.