Semigroup Forum Vol. 22 (1981) 93-95

SHORT NOTE

SUR MON ARTICLE "UNE TOPOLOGIE DU MONOIDE LIBRE".

Le but de cette note est de donner une nouvelle caractérisation des sous-monoïdes du monoïde libre qui sont rationnels et fermés pour la topologie introduite dans [4]. Cette caractérisation est la suivante : ces sous-monoïdes sont exactement les intersections avec le monoïde libre des sous-groupes de type fini du groupe libre. En fait, il ne manquait dans [4] pour établir ce résultat qu'un théorème de Michèle Benois que nous rappellerons ici.

Nous donnons rapidement toutes les définitions nécessaires : soit X un alphabet fini non vide, X^* le monoïde libre engendré par X et G_X le groupe libre engendré par X. $\mathcal{T}_G$ désigne la topologie de G_X pour laquelle les sous-groupes d'index fini de G_X constituent un système fondamental de voisinages de l'élément neutre 1 (cf. [3]) ; $\mathcal{T}$ désigne la topologie de X^* obtenue par restriction, grâce à l'inclusion

$$X^* \subset G_X$$

Un sous-monoïde M de X^* est dit fermé s'il est une partie fermée de X^* pour la topologie $\mathcal{T}$.

Théorème. _Soit_ M _une partie de_ X^*. _Les conditions suivantes sont équivalentes._

(i) M _est un sous-monoïde rationnel et fermé de_ X^*.

(ii) M _est égal à l'intersection de_ X^* _et d'un sous-groupe de type fini du groupe libre_ G_X.

(iii) _L'automate minimal de_ M _est fini, à transitions injectives et son unique état final coïncide avec l'état initial._

Preuve. L'équivalence de (i) et (iii) découle du théorème 2 de [4], article auquel nous renvoyons également le lecteur pour la définition des automates à transitions injectives (définition 3). Montrons que

0037-1912/81/0022-0093 $01.00

(i) implique (ii) : soit H le sous-groupe de G_X engendré par M. H est une partie rationnelle de G_X, donc d'après un théorème d'Anisimov et Seifert (th. III.2.7 de [1]) H est un sous-groupe de type fini de G_X. On a évidemment $M \subset H \cap X^*$. Pour montrer l'inclusion inverse, rappelons qu'on a pour la topologie considérée

$$1 = \lim_{n \to \infty} g^{n!}$$

(voir [4] lemme 7). Soit $w \in H \cap X^*$. On a

$$w = u_o\, v_1^{-1} u_1 \dots v_n^{-1} u_n$$

pour des mots u_i et v_i dans M. Par suite

$$w = \lim_{n \to \infty} w_n$$

$$\text{avec } w_n = u_o\, v_1^{n!-1} u_1 \dots v_n^{n!-1} u_n$$

donc $w_n \in M$. Puisque M est fermé, on a $w \in M$.

Montrons que (ii) implique (i). Soit H un sous-groupe de type fini du groupe libre G_X et $M = H \cap X^*$. M est clairement un sous-monoïde de X^*. D'après un théorème de M. Hall Jr. ([2] th. 5.1.) H est fermé dans G_X pour la topologie $\mathcal{C}_G$. Par suite, M est fermé dans X^*. Montrons que M est une partie rationnelle de X^*. Soit $\bar{X}$ une copie de X disjointe de X ; tout élément de G_X admet dans le monoïde $(X \cup \bar{X})^*$ une image canonique qui est son écriture sous forme de mot réduit. Soit

$$i : G_X \to (X \cup \bar{X})^*$$

l'application ainsi obtenue. D'après un théorème de M. Benois (th. III.2.9. de [1]) l'image par i de toute partie rationnelle de G_X est rationnelle dans $(X \cup \bar{X})^*$. Or H est rationnel dans G_X, donc i(H) l'est dans $(X \cup \bar{X})^*$. Par suite $M = i(H) \cap X^*$ est rationnel dans X^* et le théorème est démontré.

Une question se pose naturellement, c'est de savoir à quelle condition sur le sous-groupe de G_X, le sous-monoïde M est de type fini (i.e. engendré par un code fini ; ce n'est pas toujours le cas).

Références

1. Berstel, J., Transductions and context-free languages, Teubner (1979).

2. Hall, M. Jr., Coset representations in free groups, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949) 421-432.

3. Hall, M. Jr., A topology for free groups and related groups, Ann. Math. 52 (1950) 127-139.

4. Reutenauer, C., Une topologie du monoïde libre, Semigroup Forum 18 (1979) 33-49.

Christophe Reutenauer
Institut de Programmation
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05
France

Received June 20, 1980 and in final form October 7, 1980.