

MATHÉMATIQUES

Le jeu de taquin de Schützenberger

Christophe Reutenauer¹

Le jeu de taquin, au sens où on l'entend ici, a été introduit par Schützenberger [1] dans les années 70, au cours de ses recherches sur les tableaux de Young, la transformation de Robinson-Schensted, les relations de Knuth et leur interprétation algébrique, le monoïde plaxique² de Lasoux et Schützenberger. Le jeu de taquin se définit et s'étudie de manière élémentaire et sa beauté intrinsèque un peu magique se révèle aisément à tout mathématicien. Il comporte les traits typiques du génie schützenbergien, à savoir des subtilités d'ordre combinatoire mélangées à des incidences algébriques. Le jeu de taquin a permis à Schützenberger de donner une des deux premières preuves complètes de la profonde règle de Littlewood-Richardson (l'autre preuve, apparue au même moment, est due à G.P. Thomas [4]). Cette règle, énoncée dans les années 30, permet de multiplier les fonctions de Schur et de calculer les produits tensoriels externes des représentations du groupe symétrique, et par conséquent a aussi des applications en physique théorique.

Ceci constitue un sujet moins élémentaire, que nous essaierons de présenter sans trop rentrer dans les détails spécialisés. Nous utiliserons pour la règle de Littlewood-Richardson le formalisme des fonctions symétriques, dont une base sur \mathbb{Z} est formée par les fonctions de Schur s_λ , indexées par les partages³. Les fonctions de Schur sont en bijection avec les représentations irréductibles des groupes symétriques et les représentations polynomiales irréductibles des groupes linéaires. On a donc $s_\mu s_\nu = \sum c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$ et ce sont les entiers naturels $c_{\mu\nu}^\lambda$ que calcule la règle de Littlewood-Richardson.

1. Jeu de taquin

Une *forme* est une partie finie et convexe⁴ de \mathbb{Z}^2 , muni de son ordre naturel. Un *tableau* est une bijection croissante $F \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, où F est une forme de cardinalité n . Un *coin inférieur* d'une forme F est un élément u de $\mathbb{Z}^2 \setminus F$ tel que $F \cup \{u\}$ soit convexe et qu'il existe $v \in F$ tel que $u < v$. Voir la figure 1, où les éléments de \mathbb{Z}^2 et de F sont représentés par des cases, et le tableau T par le contenu des cases.

¹ Université du Québec à Montréal.

² L'adjectif « plaxique » est forgé du grec et signifie « des tableaux ».

³ Un *partage* de n est un multi-ensemble d'entiers strictement positifs dont la somme vaut n . On dit aussi souvent *partition*.

⁴ Une partie P d'un ensemble ordonné E est *convexe* si : $\forall x, z \in P, \forall y \in E, x \leq y \leq z \Rightarrow y \in P$.

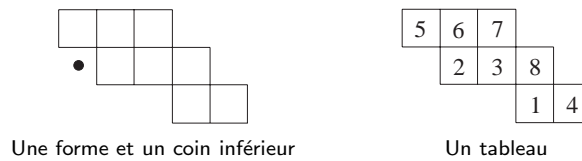


Figure 1

Appelons *voisin supérieur* d'une case (x, y) de \mathbb{Z} l'une ou l'autre des cases $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$. Étant donné un tableau et un coin inférieur u_0 de sa forme, nous définissons la *traînée* correspondante comme l'ensemble des cases $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ de T , où $u_i (i = 1, \dots, k)$ est celui des voisins supérieurs de u_{i-1} dont le contenu est le plus petit (si un seul des deux voisins supérieurs de u_{i-1} est dans T , c'est lui qu'on prend pour u_i). Le *glissement* est l'opération qui transforme le tableau T en le tableau T' , obtenu en mettant dans u_i le contenu de u_{i+1} , pour $i = 0, \dots, k - 1$; la forme de T' est $F \setminus \{u_k\} \cup \{u_0\}$. Voir la figure 2, où la traînée est représentée par les nombres encadrés.

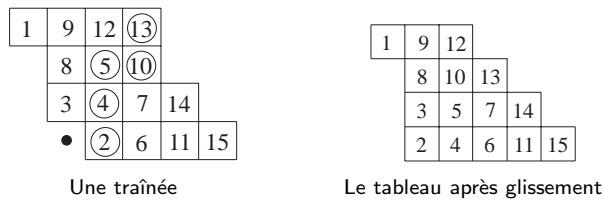


Figure 2

Rappelons qu'à un partage $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ est associée une forme définie à translation près; on la note encore λ . Si μ est un autre partage, on écrit $\mu \subseteq \lambda$ pour désigner l'inclusion des formes correspondantes, et on note λ/μ la forme complémentaire de μ dans λ . Par exemple, la forme à gauche de la figure 3 est 431, et celle à gauche de la figure 2 est 6544/211.

2. Règle de Littlewood-Richardson

Nous pouvons maintenant énoncer la règle de Littlewood-Richardson, du moins dans sa version par jeu de taquin : soient λ, μ, ν des partages; choisissons un tableau T de forme ν . Alors $c_{\mu\nu}^\lambda$ est égal au nombre de tableaux de forme λ/μ qu'on peut transformer en T par une suite de glissements.

Par exemple, prenons $\lambda = 543$, $\mu = 31$, $\nu = 431$. Alors $c_{\mu\nu}^\lambda = 2$. En effet, choisissant T comme dans la figure 3, il y a deux tableaux de forme λ/μ , indiqués dans cette figure. Les glissements pour l'un d'eux sont indiqués dans la figure 4.

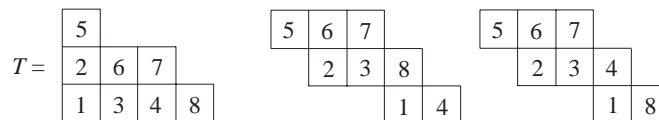


Figure 3

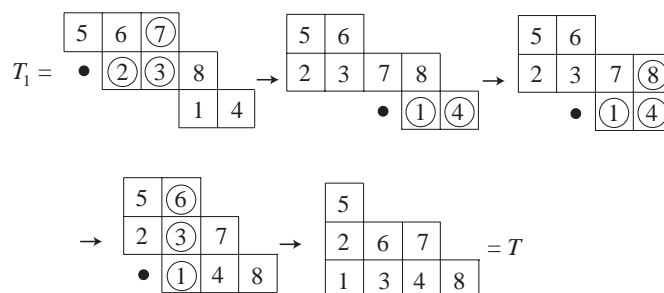


Figure 4

3. Confluence du jeu de taquin

Après ce qui précède, il se pose naturellement la question suivante : comment le choix des glissements (de manière équivalente, le choix des coins inférieurs) influe-t-il sur le tableau obtenu ? Pour y répondre, appelons *forme normale* une forme correspondant à un partage ; c'est-à-dire, une forme ayant un unique élément minimal (comme la forme de T dans la figure 3).

On a alors : *quel que soit le choix des glissements, le tableau de forme normale obtenu à partir d'un tableau donné, est unique.*

Pour esquisser une preuve de ce théorème de Schützenberger, nous associons à tout tableau un invariant de sa classe d'équivalence sous le jeu de taquin ; cet invariant sera une classe d'équivalence de permutations sous une relation appelée *équivalence plaxique* (introduite par Knuth [2]) ; enfin, on verra qu'il y a un unique tableau normal ayant le même invariant.

D'abord, étant donné un tableau T , nous notons π_T la permutation, vue comme un mot, obtenue en lisant les entrées de T de gauche à droite, et de haut en bas. Par exemple, pour T_1 comme dans la figure 4, on a $\pi_{T_1} = 56723814$. L'équivalence plaxique, notée \equiv , est la fermeture réflexive et transitive de la relation suivante : celle-ci identifie deux permutations, vues comme des mots, qui ne diffèrent que par un facteur (= sous-mot connexe) de longueur 3, qui pour l'une est bac et l'autre bca , ou alors acb et cab , où $a < b < c$ (on peut voir les 2 relations : $bac \equiv bca$ et $acb \equiv cab$ comme la commutation de a et de c , sous la condition que le « témoin de commutation » b soit placé à côté d'eux, et ait une valeur intermédiaire entre a et c). On montre alors (ce n'est pas très commode) que si T_2 s'obtient de T_1 par glissement, alors $\pi_{T_1} \equiv \pi_{T_2}$ (voir [1] Th. 2.4 ou [6] Prop. 3.9.4). Il reste donc à vérifier que si T est un tableau normal, alors T ne dépend que de la classe modulo \equiv de π_T .

On utilise pour cela la méthode d'insertion de Schensted [3], qui associe à toute permutation un tableau normal, voir par exemple [6] 3.3. On montre que deux permutations, qui sont équivalentes pour \equiv , donnent le même tableau (la réciproque est vraie aussi ; ces résultats sont dus à Knuth). Enfin, on montre que si T est un tableau normal, l'algorithme de Schensted associe à π_T le tableau T .

Nous illustrons l'algorithme de Schensted dans la figure 5, ainsi que la dernière assertion.

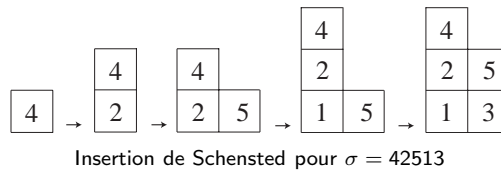
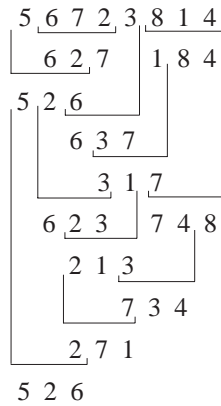


Figure 5

Le fait que π_{T_1} et π_T soient plaxiquement équivalents est montré dans la figure 6.



Équivalence plaxique de $\pi_{T_1} = 56723814$ et $\pi_T = 526748134$

Figure 6

4. Preuve de la règle de Littlewood-Richardson

Pour esquisser une preuve de la règle de Littlewood-Richardson, nous suivons la méthode de Schützenberger. Le *mélange* $u \sqcup v$ de deux mots u et v est la somme des mots w obtenus en écrivant les lettres de u dans leur ordre, ainsi que celles de v , de toutes les manières possibles. Par exemple, $12 \sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312$. Définissons alors un produit associatif $*$ sur $\bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}S_n$: si

σ, α sont des permutations dans S_n et S_p , respectivement, soit $\bar{\alpha}$ obtenue en additionnant n à chaque chiffre de α ; alors $\sigma * \alpha = \sigma \sqcup \bar{\alpha}$. Par exemple, $12 * 21$ est l'élément $12 \sqcup 43$ ci-dessus. On observe alors, à la suite de Schützenberger, que si A, B sont des classes plaxiques⁵, alors $A * B$ est une somme de classes plaxiques.

Ci-dessus par exemple, nous multiplions les classes 12 et 21 (ces classes sont des singletons) et l'on a bien que $\{1243, 1423, 4123\}$ et $\{1432, 4132, 4312\}$ sont des classes plaxiques. Comme, par l'algorithme de Schensted, les classes plaxiques sont en bijection avec les tableaux normaux, nous obtenons une structure d'anneau sur le \mathbb{Z} -module libre de base les tableaux normaux. Le produit sur les tableaux se décrit directement ainsi : soient U, V deux tableaux ; soit \bar{V} le tableau obtenu en ajoutant n à chaque entrée de V , où n est le nombre de cases dans U . Alors $U * V$ est égal à la somme des tableaux normaux T tels que : T restreint à $\{1, \dots, n\}$

⁵ Par classe plaxique, nous entendons la somme des éléments d'une telle classe.

est identique à U ; T restreint aux autres entiers se réduit à \bar{V} par jeu de taquin (voir [7] 5c, qui est une variante de [5] Th. 2.22). Un exemple est donné dans la figure 7.

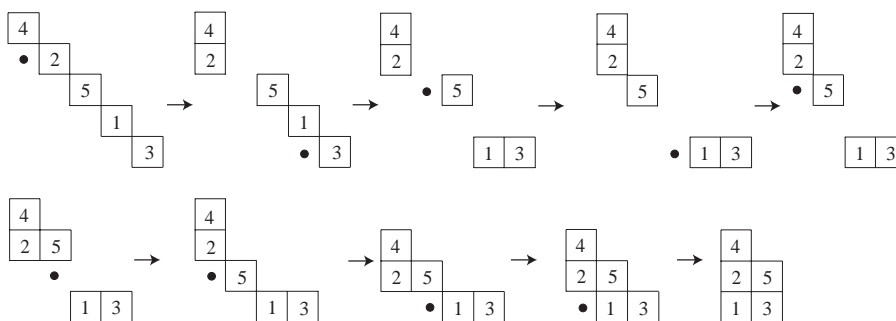
$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Figure 7

Pour retrouver la règle de Littlewood-Richardson énoncée plus haut, il reste à montrer que l'algèbre obtenue, de base les tableaux, s'envoie surjectivement sur l'algèbre des fonctions symétriques. Ceci se fait en envoyant le tableau normal T , de forme λ , sur la fonction de Schur s_λ ; voir par exemple [7] Th. 4.3.

5. L'algorithme de Schensted revu par jeu de taquin

À toute permutation σ , on associe le tableau, de forme anti-diagonale, dont les contenus sont donnés par σ ; voir la figure 8. Si on applique le jeu de taquin à ce tableau, on retrouve le tableau normal obtenu par l'algorithme de Schensted. Voir la figure 8 et comparer à la figure 5.



Le jeu taquin simule l'algorithme de Schensted : $\sigma = 42513$

Figure 8

6. Commentaires et références

Pour comprendre mieux ce qui a été brièvement expliqué ici, on pourra consulter le livre de B. Sagan, qui en donne une présentation très simple. D'autres démonstrations existent : M. Haiman [8] donne une approche totalement planaire, sans passer par les permutations, et a aussi une équivalence duale de tableaux; S. Fomin [9] donne une approche par tableaux de croissance de partages; une preuve de la règle de Littlewood-Richardson proche de la preuve originelle de Schützenberger, ainsi qu'une introduction au monoïde plaxique, se trouve dans [10]; voir [11]

pour une approche par algèbres de Hopf ; voir aussi M. van Leeuwen [12], où le lecteur trouvera aussi toutes les références supplémentaires, ainsi qu'un historique.

[1] M. P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson*, Lecture Notes in mathematics 579, 59-113, 1977.

[2] D.E. Knuth, Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* 34, 1970, 709-727.

[3] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, *Canadian Journal of mathematics* 13, 1961, 179-191.

[4] G. P. Thomas, On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions, *Advances in Mathematics* 30, 1978, 8-32.

[5] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, Quaderni della Ricerca 109, 1981, 129-156, CNR, Rome.

[6] B. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1991 (seconde édition Springer 2001).

[7] S. Poirier, C. Reutenauer, *Algèbres de Hopf de tableaux*, *Annales des Sciences mathématiques du Québec* 19, 1995, 79-90.

[8] M. Haiman, Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor, *Discrete Mathematics* 99, 1992, 79-113.

[9] S. Fomin, Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood-Richardson rule, Appendice au livre de R.Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol.2, Cambridge univ. Press, 1999.

[10] A. Lascoux, B. Leclerc, J.-Y. Thibon, The plactic monoid, dans : M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 90. Cambridge University Press, 2002.

[11] D. Blessenohl, M. Schocker, *Noncommutative character theory of the symmetric group*, Imperial college Press, 2005.

[12] M. van Leeuwen, *The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics*, *Interaction of combinatorics and representation theory*, 95-145, *MSJ Mem.*, 11, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.