Analyse 1

UQàM MAT1130

Christophe Reutenauer et Frédéric Rochon
Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

4 mai 2025

Table des matières

1 Introduction

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (≥ 0 ou ≤ 0), et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{p/q, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. On note $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ ces mêmes ensembles privés de 0.

Remerciements : Marie-Ève Martel, pour les coquilles.

2 Les nombres réels

La construction mathématique des nombres réels, à partir des nombres rationnels [1], est plutôt longue et compliquée. Nous donnerons seulement les propriétés principales des nombres réels : les opérations et l'ordre ($x \leq y$), déjà connus des étudiants, puisqu'ils les manipulent au secondaire et au cegep ; et le théorème du supremum (aussi appelé axiome de complétude), qui devrait être nouveau, mais constitue un des fondements de toutes les démonstrations sur les nombres réels, les suites et les fonctions.

2.1 Addition et multiplication

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Il possède une *addition*, notée $a + b$, et une *multiplication*, notée $a \cdot b$ (pour tous les réels a, b).

1. Les nombres rationnels, eux, sont construits plus facilement, à partir des entiers, en considérant les fractions d'entiers.

— L'addition est *commutative*, c'est-à-dire : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.
— La multiplication est *commutative*, c'est-à-dire : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
— L'addition est *associative*, c'est-à-dire : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
— La multiplication est *associative*, c'est-à-dire : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
— La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition, c'est-à-dire : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
— L'addition et la multiplication possèdent des éléments neutres, respectivement notés 0 et 1, c'est-à-dire qu'on a : $0 + a = a = a + 0$ et $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
— Chaque $a \in \mathbb{R}$ a un *opposé*, noté $-a$, et on a $a + (-a) = 0$; et chaque $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ a un *inverse*, noté a^{-1} et on a $a \cdot a^{-1} = 1$.

Conventions de notations et de priorités d'opérations On écrit xy au lieu de $x \cdot y$. De plus, par convention, la multiplication a priorité sur l'addition ; on peut donc omettre certaines parenthèses. Par exemple, on écrit $ab + ac$ pour $(a \cdot b) + (a \cdot c)$.

De plus, grâce à l'associativité, on peut écrire, par exemple, $a + b + c$ (qui désigne à la fois $(a + b) + c$ et $a + (b + c)$), et abc.

Règle des signes : $x(-y) = -(xy), (-x)(-y) = xy$.

Loi des exposants Si n est un entier naturel, et x un réel, on écrit x^n pour $xx \cdots x$, avec n facteurs x. Cas particulier : $x^1 = x$, et par convention, $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. Si n est un entier avec $n < 0$, et $x \neq 0$, on note $x^n = (x^{-1})^{-n}$. Avec cette notation, on a les lois des exposants usuelles.

Égalité et opérations Une propriété importante de l'addition et de la multiplication est la suivante, utilisée constamment. Pour tous réels x, y, a

$$x = y \Rightarrow x + a = y + a, xa = ya.$$

Exercice 1. *La soustraction est-elle commutative ? associative ? A-t-elle un élément neutre ?*

2.2 L'ordre des nombre réels

L'*ordre* des nombres réels est la relation $x \leq y$, qui se lit "x est inférieur ou égal à y", ou aussi "x est plus petit ou égal à y".

On a les trois propriétés suivantes :
— $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$;
— $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$;
— $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $\leq z$ implique $x \leq z$.

On dit que la relation $\leq$ est *réflexive*, *anti-symétrique* et *transitive* . On dit aussi que c'est un ordre *total*, ce qui signifie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

On écrit $a < b$ pour dire que : $a \leq b$ et $a \neq b$. On écrit aussi $b > a$ pour dire $a < b$, et $b \geq a$ pour exprimer que $a \leq b$. L'inégalité $a < b$ est dite *stricte*, tandis que l'inégalité $a \leq b$ est dite *large*.

Ordre et opérations On a

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow x + a < y + a$$

et

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x < y, a > 0 \Rightarrow xa < ya.$$

Autrement dit, on peut ajouter à une inégalité une même quantité de chaque côté ; et on peut multiplier de chaque côté par un nombre, à condition que celui-ci soit strictement positif. Quant à la multiplication par un nombre strictement négatif, elle *renverse* l'inégalité, c'est-à-dire

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x < y, a < 0 \Rightarrow xa > ya.$$

Dans les exercices qui suivent, on doit prouver les assertions en utilisant seulement les propriétés des nombres réels rappelées ci-dessus.

Exercice 2. *Prouver que*
- $x^2 > 0$.
- $1 > 0$.
- $x > 0$ *implique* $x^{-1} > 0$.
- *Montrer que* $x \leq y$ *implique* $x + a \leq y + a$
- *Montrer que* $x \leq y$ *et* $a \geq 0$ *implique* $xa \leq ya$.
- *Montrer que* $x \leq y$ *et* $a \leq 0$ *implique* $xa \geq ya$.

Exercice 3. *Montrer que :*
- $a < b \leq c$ *implique* $a < c$.
- $x < y$ *et* $x' \leq y'$ *implique* $x + x' < y + y'$.
- $x \leq y$ *et* $x' \leq y'$ *implique* $x + x' \leq y + y'$.
- $0 \leq a < b$ *et* $0 \leq c < d$ *implique* $ac < bd$.
- $0 \leq a \leq b$ *et* $0 \leq c \leq d$ *implique* $ac \leq bd$.

  Montrer que les deux dernières implications ne sont pas vraies en général si on ne suppose pas que a *et* c *soient* ≥ 0.

Exercice 4. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des réels* ≥ 0 $(n \geq 1)$. *Montrer que si leur somme est nulle, alors ils sont tous nuls.*

2.3 Le théorème du supremum

Définition 2.1. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A a un* maximum*, ou* un plus grand élément*, s'il y a dans A un élément a tel que : $\forall x \in A, x \leq a$; alors a est appelé le maximum de A, et aussi le plus grand élément de A.*

En fait, pour que la dernière phrase dans cette définition soit correcte, il faut vérifier que si le maximum existe, alors il est unique : si a, b sont des maximums (maxima pour les puristes) de A, alors, en appliquant la définition de maximum, on trouve : $b \leq a$ et $a \leq b$; par anti-symétrie, on a alors $a = b$.

On définit symétriquement *minimum*, ou *plus petit élément.* Notation : $\max(A)$ et $\min(A)$.

Définition 2.2. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Une* borne supérieure *de A est un élément x de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A, a \leq x$.*

On définit aussi *borne inférieure.*

On remarque que si A a un maximum, celui-ci est forcément une borne supérieure de A.

Définition 2.3. *On considère l'ensemble A' des bornes supérieures de A ; si cet ensemble A' a un minimum, on l'appelle le* supremum de A dans E*, noté* $\sup(A)$*.*

On définit symétriquement l'*infimum* de A, noté $\inf(A)$: c'est le maximum des bornes inférieures de A.

On remarque que si A a un maximum, celui-ci est la plus petite borne supérieure de A, donc c'est le supremum de A.

Remarque sur la terminologie Ce qu'on appelle ici borne supérieure (resp. borne inférieure) est appelé en France *majorant* (resp. *minorant*). Et ce qu'on appelle ici supremum (resp. infimum) est appelé en France *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*). Donc, attention aux confusions possibles.

La terminologie anglaise est respectivement : upper bound, lower bound, least upper bound (ou supremum), largest lower bound (ou infimum).

La notation est cependant uniforme : $\sup(A)$ et $\inf(A)$ pour le supremum et l'infimum.

Une propriété fondamentale de R est la suivante, qu'on appelle *théorème du supremum.*

Théorème 2.4. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, qui a une borne supérieure, a un supremum.*

On a aussi le *théorème de l'infimum*, que l'on peut déduire du précédent.

Théorème 2.5. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, qui a une borne inférieure, a un infimum.*

Exercice 5. *Montrer que si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ a un maximum, alors il est non vide. En déduire que si un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ a un supremum, alors il a une borne supérieure.*

Exercice 6. *Vrai ou faux : tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ borné supérieurement a un maximum.*

Exercice 7. *Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui a un infimum et un supremum, mais pas de de maximum, ni de minimum.*

Exercice 8. *Déterminer, s'ils existent, le maximum, le minimum, l'infimum et le supremum de l'ensemble $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.*

Exercice 9. *Déterminer, s'ils existent, le supremum et l'infimum des ensembles suivants :*

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \textit{et} \quad B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Indication : faire la liste des éléments de A et B.

Exercice 10. *Soient A, B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ d'intersection non vide. On suppose que B a une borne supérieure et que A a une des borne inférieure. Montrer que* $\inf(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 11. *Soient A et B deux sous-ensembles non vides et bornés inférieurement de $\mathbb{R}$.*

1. *Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que* $\inf(A \cap B)$ *existe et que* $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.
2. *Trouver deux ensembles A et B tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et* $\inf(A \cap B) > \max\{\inf A, \inf B\}$.

Exercice 12. *Soient A et B des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall\, x \in A$ et $\forall\, y \in B$, on a que $x \leq y$.*

1. *Montrer que* $\sup A$ *existe et que* $\sup A \leq y \;\forall\, y \in B$.
2. *Montrer que* $\inf B$ *existe et que* $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 13. *Soient A, B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ d'intersection non vide. On suppose que* $\inf(A)$ *et* $\sup(B)$ *existent. Montrer que* $\inf(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 14. *Déterminer, s'ils existent, le supremum et l'infimum de l'ensemble*

$$E = \{q \in \mathbb{Q} \mid \; |q - 1| < 2\}.$$

2.4 Rationnels et réels

Théorème 2.6. $\mathbb{R}$ *contient* $\mathbb{Q}$ *strictement.*

Démonstration. 1. On montre qu'il y a une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Elle envoie tout entier naturel n sur $1+1+\cdots+1$ (n fois). La preuve est esquissée dans l'exercice 16.

2. On prouvera plus loin, indépendamment, qu'il existe dans R un élément dont le carré est 2 ; c'est une application facile du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 5.18).

3. Il n'existe pas dans $\mathbb{Q}$ un élément dont le carré est 2 ($*$).

Commençons par vérifier que si un nombre entier est impair [2], son carré aussi. En effet, si n est entier, $(2n+1)^2 = 2(2n^2+2n)+1$. La contraposée est que si le carré d'un entier est pair, celui-ci l'est aussi.

Maintenant, nous prouvons que si x est rationnel et $x^2 = 2$, alors on aboutit à une contradiction. Le principe du raisonnement par l'absurde nous permet alors de conclure à la véracité de ($*$). Comme x est rationnel, on a $x = p/q$ où p, q sont des entiers non nuls. On peut supposer sans perte de généralité qu'ils ne sont pas pairs tous les deux. On a $2 = x^2 = p^2/q^2$, donc $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2r$, r entier. Alors $4r^2 = p^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2r^2$, donc q^2 pair, et q aussi. Il en découle que p, q sont tous deux pairs : c'est la contradiction cherchée. $\square$

On note $\sqrt{2}$ le réel positif dont le carré est 2. Il existe !

Exercice 15. *Montrer que* $r+\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel, que que soit le rationnel* r.

Exercice 16. *Montrer que la fonction* $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *qui envoie* n *sur* $i(n) = 1+1+\cdots+1$ *(n fois est injective). Etendre cette fonction à* $\mathbb{Z}$ *par* $-n \mapsto -i(n)$*, si* $n \in \mathbb{N}$*, et montrer que la fonction* $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *ainsi obtenue est encore injective ; on la note aussi* i*. On étend maintenant la fonction* i *à* $\mathbb{Q}$ *en posant* $i(p/q) = i(p)i(q)^{-1}$*. Montrer qu'on obtient ainsi une injection de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

2. Mais c'est quoi, un nombre pair, ou impair ? Par définition, un nombre pair est le double d'un nombre entier, donc de la forme $2n$, $n \in \mathbb{Z}$; et un nombre impair est un nombre de la forme $2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.5 La valeur absolue

Définition 2.7. *La* valeur absolue *d'un réel x, notée $|x|$, est définie par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Théorème 2.8. *Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$ avec $a \geq 0$.*
(o) $|0| = 0$.
(i) $|x| \geq 0$.
(ii) $x = 0$ *si et seulement si* $|x| = 0$.
(iii) $|-x| = |x|$.
(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$.
(v) $|x| \leq a$ *si et seulement si* $-a \leq x \leq a$.
(vi) (inégalité du triangle) $|x+y| \leq |x| + |y|$.
(vii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
(viii) $|xy| = |x||y|$.

Démonstration. (o) découle directement de la définition de la valeur absolue.

(i) Si $x \geq 0$, c'est clair. Si $x < 0$, alors $-x > 0$, donc c'est clair aussi.

(ii) Si $|x| = 0$, alors on ne peut avoir $x < 0$ (sinon $|x| = -x > 0$), donc $x \geq 0$, et $x = |x| = 0$.

(iii) C'est clair si $x = 0$. Si $x \neq 0$, on applique la définition de la valeur absolue, sachant que : $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$, et : $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$.

(iv) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$; donc $-|x| \leq 0 \leq x \leq |x|$. Si $x < 0$, alors on applique ce qu'on vient de voir à $-x$: $-|-x| \leq -x \leq |-x|$; donc $-|x| \leq -x \leq |x|$; en multipliant par -1, ce qui renverse les inégalités, on obtient $|x| \geq x \geq -|x|$.

(v) Si $|x| \leq a$, alors $-a \leq -|x|$, et (iv) implique $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Réciproquement, si $-a \leq x \leq a$, alors : soit $x \geq 0$, $x = |x|$, et donc $|x| \leq a$; soit $x < 0$, $|x| = -x$, et $a \geq -x = |x|$.

(vi) On a $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, donc $x + y \leq |x| + |y|$. En appliquant ceci à $-x$ et $-y$, on trouve $-x - y \leq |x| + |y|$, donc $-(|x| + |y|) \leq x + y$. Par (v), on en tire l'inégalité du triangle.

(vii) Par (v), on a $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. Symétriquement (on échange x et y), on a $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Donc $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$. Donc par (v), on obtient (vii).

(viii) C'est une conséquence de la définition de la valeur absolue et de la règle des signes. □

Exercice 17. *Montrer que* $|x| = \max\{x, -x\}$.

Exercice 18. *Montrer que le maximum de* x, y *est égal à la moitié de* $x + y + |x - y|$.

Exercice 19. *Un ensemble de réels est dit* borné *s'il a une borne supérieure et une borne inférieure. On suppose que* E *est une partie de* R *et que l'ensemble* $\{|x|, x \in E\}$ *est borné. Est-ce que* E *est borné ? Et la réciproque ?*

Exercice 20. *Trouver* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > N$ *implique que* $\left|\frac{2n}{2n+3} - 1\right| < \frac{1}{327}$.

2.6 $\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème 2.9. *Pour tout réel* x*, il existe un entier naturel* n *tel* $n > x$*. De manière équivalente, pour tous réels* x *et* a*, avec* $a > 0$*, il existe un entier naturel* n *tel que* $na > x$.

Dire que R *est archimédien* exprime que R satisfait à l'énoncé précédent.

Démonstration. 1. Supposons par l'absurde que n n'existe pas. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$. Donc x est une borne supérieure de $\mathbb{N}$, lequel a donc un supremum M par l'axiome de complétude. Alors $M - 1$ n'est pas une borne supérieure de $\mathbb{N}$, et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M - 1 < n$. Alors $M < n + 1 \in \mathbb{N}$, et M n'est pas une borne supérieure de $\mathbb{N}$: contradiction.

2. Soit x, a comme dans l'énoncé. Par la première partie, il existe $n \in N$ tel que $n > x/a$. Alors $na > x$. Réciproquement, si la deuxième assertion du théorème est vraie, la première aussi : prendre $a = 1$. □

Corollaire 2.10. *Si un réel* a *satisfait :* $\forall \epsilon > 0, |a| \leq \epsilon$*, alors* $a = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque et non nul ; alors $1/n > 0$. L'hypothèse implique que $|a| < 1/n$, donc $n|a| < 1$.

Supposons par l'absurde que $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$, par le théorème 2.8, (i) et (ii). Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|a| > 1$ (n est alors non nul) : on obtient une contradiction. □

Exercice 21. *En utilisant la propriété archimédienne de* $\mathbb{R}$*, montrer que pour tout réel* $\epsilon > 0$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Exercice 22. *Soient* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *des nombres tels que* $x \leq y \leq x + \frac{z}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. Montrer que* $x = y$.

2.7 Partie entière

Théorème 2.11. *Pour tout réel x, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.*

L'entier n est appelé *partie entière* de x est noté $\lfloor x \rfloor$ (ou aussi $[x]$).

Démonstration. Par le théorème 2.9, on sait qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|x| \leq p$. Alors $-p \leq x \leq p$ (Théorème 2.8 (iv)). Par l'exercice 23, il existe deux entiers consécutifs, disons n et $n+1$ tels que $n \leq x < n+1$.

Supposons maintenant qu'il existe deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq x < m+1$ et $n \leq x < n+1$. Alors $m \leq x < n+1$ et $n \leq x < m+1$. Donc $m < n+1$ et $n < m+1$. Donc $n-1 < m < n+1$, et forcément $m = n$. □

Exercice 23. *Soit $m \leq p$ des entiers. Montrer que si un réel x satisfait $m \leq x \leq p$, alors il existe un entier n tel que $n \leq x < n+1$. Indication : récurrence sur $p - m$.*

Exercice 24. *Montrer que pour tout réels a, b, avec $b > 0$, il existe un unique entier q et un unique réel r tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Indication : prendre $q = \lfloor a/b \rfloor$. Montrer que si a, b sont entiers, r aussi.*

2.8 Densité des rationnels et des irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre réel qui n'est pas rationnel. Par exemple, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Théorème 2.12. *Pour tous réels, a, b tels que $a < b$ il existe un rationnel r et un irrationnel i tels que $a < r < b$ et $a < i < b$.*

Démonstration. Par le théorème 2.9, il existe un entier naturel n tel que $n > \frac{1}{b-a}$. On peut supposer $n \neq 0$. Donc $b - a > \frac{1}{n}$.

Par le théorème 2.11, il existe aussi un entier m tel que $m - 1 \leq na < m$; donc $na < m \leq na + 1$. On en déduit $a < m/n \leq a + 1/n < a + b - a = b$.

Par ce qu'on vient de prouver, il existe un rationnel r tel que $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$. Alors $a < r + \sqrt{2} < b$. On peut conclure, car $r + \sqrt{2}$ est irrationnel (sinon $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ serait rationnel). □

Corollaire 2.13. *Soient a, b des réels tels que $a < b$. Il existe une infinité de rationnels, et une infinité d'irrationnels, entre a et b.*

Démonstration. Il existe un rationnel r_1 tel que $a < r_1 < b$. Puis il existe un rationnel r_2 tel que $r_1 < r_2 < b$. On construit ainsi pour tout n, des rationnels $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$, compris entre a et b.

Preuve analogue pour les irrationnels. □

2.9 Les intervalles

On va définir huit types de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, appelés des *intervalles*. Pour des réels $a < b$, on note

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, [a,b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, (a,b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

Ces intervalles sont appelés *intervalles finis*. On définit encore, pour a réel,

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}, a < x\},$$

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}.$$

Ceux-ci sont appelés *intervalles infinis*.

Autre notation : $]a,b[$ pour (a,b) etc...

Exercice 25. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x < y < z$ et $x,z \in I$, on a $y \in I$.*

Exercice 26. *Déterminer l'ensemble des nombres réels satisfaisant aux relations suivantes :*

1. $|x-2| > 3$,
2. $|x| + |x-1| > 1$.

Indication : écrire chacun de ces deux ensembles comme une réunion d'intervalles.

3 Les suites

3.1 Notations pour les suites

Définition 3.1. *Une* suite numérique *(ou simplement* suite*) est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.*

La notation standard pour une suite est $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; elle désigne la fonction $n \mapsto f_n$. Par exemple, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à la fonction $n \mapsto n$. Autre exemple : la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. On écrit aussi $(f_n)_{n\geq 0}$, ou même (f_n), en omettant donc l'indice $n \in \mathbb{N}$.

On appelle f_n le *terme de rang* n de la suite, ou *terme d'indice* n.

On a souvent besoin de suites qui commencent à 1, au lieu de 0. On écrira $(f_n)_{n\geq 1}$, ou $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Exemple : la suite $(1/n)_{n\geq 1}$. Ou même des suites qui commencent à 2, etc...

Exercice 27. *Soit* (a_n) *une suite telle que* $a_0 = 4, a_1 = 2$ *et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$a_{n+2} = \frac{4}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n.$$

Montrer que $a_n = 1 + 3(\frac{1}{3})^n$.

Exercice 28. *Prouver la formule*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Limites

Dans la définition qui suit, comme dans beaucoup d'autres, on écrit $\epsilon > 0$ pour signifier : $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ (donc $\epsilon \in \mathbb{R}$ est sous-entendu).

Définition 3.2. *Soit* (a_n) *une suite. Soit* $\ell \in \mathbb{R}$. *On dit que* ℓ *est une* limite *de cette suite si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, |a_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge *vers* ℓ, *ou aussi* tend vers ℓ, *ou encore qu'elle* a la limite ℓ.

Si une suite a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, *on dit qu'elle est* convergente. *Si elle n'en a pas, on dit que la suite est* divergente.

Notation : $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

On reformule souvent la définition mathématique de la limite, de manière plus littéraire : a_n tend vers ℓ si a_n est aussi proche qu'on veut de ℓ, pourvu que n soit assez grand. C'est assez imprécis, ça ne permet pas en général de faire des démonstrations rigoureuses, mais cela fait image.

On vérifie dans l'exercice 29 que la définition 3.2 est équivalente à celle qu'on obtient en remplaçant les deux dernières inégalités, ou l'une d'elles, par l'inégalité large. Mais pas la première, voir l'exercice 35.

Exercice 29. *Montrer que* (a_n) *tend vers* ℓ *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, |a_n - \ell| \leq \epsilon,$$

si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |a_n - \ell| < \epsilon,$$

si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |a_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Exercice 30. *On suppose que la suite* (x_n) *a pour limite* h *; on pose* $y_n = x_n + 1$*. Montrer que la suite* (y_n) *a pour limite* $h+1$*.*

Exercice 31. *1. On considère une suite* (x_n) *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $|x_n| \leq \frac{1}{n}$*. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, et l'exercice 21, que* x_n *tend vers 0.*

2. On considère une suite (x_n) *et un réel* ℓ*. Montrer que* x_n *tend vers* ℓ *si et seulement si* $x_n - \ell$ *tend vers 0.*

Exercice 32. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exercice 33. *Montrer que* $\sqrt[n]{2}$ *tend vers 1.*

3.3 Unicité de la limite

Théorème 3.3. *Si la suite* (a_n) *a pour limite* ℓ*, celle-ci est unique.*

Démonstration. Supposons que (a_n) ait les limites ℓ_1, ℓ_2. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/2 > 0$. Il existe alors N_1, N_2 tels que pour $i = 1, 2$, $\forall n > N_i, |a_n - \ell_i| < \epsilon/2$. Choisissons $n > N_1, N_2$. On a alors par l'inégalité du triangle,

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

On applique alors le corollaire 2.10. □

3.4 Suites constantes

Une suite (x_n) est dite *constante* si tous les x_n sont égaux à un même nombre x. Elle dite *ultimement constante*, ou *constante à partir d'un certain rang* s'il existe un réel x, et un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $x_n = x$.

Proposition 3.4. *Toute suite constante est ultimement constante. Toute suite ultimement constante tend vers* x *(avec les notations ci-dessus).*

Démonstration. Prouvons la deuxième assertion, avec les notations ci-dessus. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\forall n > n_0$, on a $|x_n - x| = 0 < \epsilon$. □

Exercice 34. *Montrer que si une suite convergente ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est ultimement constante.*

Exercice 35. *Que peut-on dire si on remplace* $\epsilon > 0$ *par* $\epsilon \geq 0$ *dans la définition 3.2, ou dans une des trois conditions de l'exercice 29 ?*

3.5 Suites bornées

Définition 3.5. *Une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* bornée *s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$*, on a* $|a_n| \leq M$*.*

De manière équivalente, une suite est bornée si et seulement s'il existe A, B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $A \leq a_n \leq B$.

Théorème 3.6. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (a_n) une suite ayant la limite ℓ. Comme $1 > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$, $|a_n - \ell| < 1$. On a alors $|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$. Posons $M =$ le maximum de $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |\ell|$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq M$. □

Exercice 36. *On dit qu'une suite* (a_n) *a une borne supérieure (resp. inférieure) si l'ensemble* $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ *en a une. Montrer que* (a_n) *est bornée si et seulement si elle a une borne supérieure et une borne inférieure.*

3.6 Passage à la limite des inégalités

Théorème 3.7. *On suppose que* (x_n) *a la limite* $\ell \in \mathbb{R}$*. Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* $a \in \mathbb{R}$*. Si pour tout* $n > n_0$*,* $x_n \geq a$ *(resp.* $x_n \leq a$*), alors* $\ell \geq a$ *(resp.* $\ell \leq a$*).*

Démonstration. Supposons que $\forall n > n_0$, $x_n \geq a$. Par l'absurde, supposons $\ell < a$. Il existe N tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < a - \ell$. Prenons $n > \max(N, n_0)$. Alors $x_n - \ell < a - \ell$ et $x_n < a$: contradiction. □

On dit que "l'inégalité $x_n \geq a$ est passée à la limite", car la limite ℓ satisfait $\ell \geq a$. Attention ce ne sont que les inégalités larges qui passent à la limite, pas le inégalités strictes ; par exemple, la suite $(1/n)$ est > 0, mais sa limite est $\ell = 0$ et ne satisfait pas $\ell > 0$.

3.7 Opérations sur les suites et les limites

La *somme* de deux suites (a_n) et (b_n) est la suite $(a_n + b_n)$. Le *produit* de deux suites (a_n) et (b_n) est la suite $(a_n b_n)$.

Théorème 3.8. *Soient* $(a_n), (b_n)$ *deux suites, et* $k \in \mathbb{R}$*. On suppose que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *et* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Alors :*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *;*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(k a_n) = ka$ *;*

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ *;*

(iv) Si b_n *est non nul pour tout* n*, et si* b *est non nul, alors* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$*.*

On appelle *somme* et *produit* des suites (a_n) et (b_n) les suites $(a_n + b_n)$ et $(a_n b_n)$.

Lemme 3.9. *Si* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$*, alors il existe* M *et* $\beta > 0$ *tel que* $\forall n > M$*,* $|b_n| > \beta$*.*

Démonstration. Posons $\beta = |b|/2$. Alors $\beta > 0$ (Théorème 2.8 (i) et (ii)). Il existe donc M tel que pour tout $n > M$, $|b_n - b| < \beta$. Donc pour tout $n > M$, $|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| < \beta + |b_n|$; par suite $|b_n| > |b| - |b|/2 = \beta$. $\square$

Preuve du théorème 3.8. (i) Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/2 > 0$. Il existe N_a, N_b tel que $\forall n > N_a, |a_n - a| < \epsilon/2$ et $\forall n > N_b, |b_n - b| < \epsilon/2$. Soit $N = \max(N_a, N_b)$. Alors $\forall n > N$, on a $|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$.

(ii) Si $k = 0$, $ka_n = 0$ et il est clair que la suite nulle tend vers 0. Supposons maintenant $k \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/|k| > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n\, N$, $|a_n - a| < \epsilon/|k|$. Alors $|ka_n - ka| = |k||a_n - a| < |k|\epsilon/|k| = \epsilon$.

(iii) Par le théorème 3.6, les suites $(a_n), (b_n)$ sont bornées. Il existe donc K tel que $\forall n$, $|a_n|, |b_n| \leq K$. On en déduit que $|a| \leq K$ (Théorème 3.7).

Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/2K > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N$, $|a_n - a|, |b_n - b| < \epsilon/2K$. Alors on a $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| < (\epsilon/2K)K + K\epsilon/2K = \epsilon$.

(iv) Comme on a déjà prouvé (iii), il suffit de prouver que la limite de la suite $(1/b_n)$ est $1/b$. On applique le lemme 3.9. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon|b|\beta > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N$, $|b_n - b| < \epsilon|b|\beta$. Alors pour tout $n > \max(N, M)$, on a $|1/b_n - 1/b| = |b - b_n|/|bb_n| < \epsilon|b|\beta/|b||\beta| = \epsilon$. $\square$

Corollaire 3.10. *On suppose qu'on a deux suites* (a_n)*,* (b_n) *convergeant vers les limites respectives* a, b*. Si pour tout* $n \geq n_0$*, on a* $a_n \leq b_n$*, alors* $a \leq b$*.*

Démonstration. On applique le théorème 3.7 à la suite $(b_n - a_n)$, laquelle tend vers $b - a$, par le théorème 3.8. $\square$

Exercice 37. *Soit* (x_n) *la suite définie par* $x_0 = 2$ *et* $x_{n+1} = 2x_n^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Montrer que si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *existe, alors* $x = 0$ *ou* $x = \frac{1}{2}$*.*
2. *Est-ce que cette limite existe ?*

Exercice 38. *Trouver la limite de la suite $\{x_n\}$ donnée par $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$. Indications : utiliser $a - b = (a^2 - b^2)/a + b$ et mettre $\sqrt{n}$ en facteur.*

3.8 Théorème des gendarmes

Théorème 3.11. *Si (a_n) tend vers ℓ, (c_n) tend vers ℓ, et si pour tout n, $a_n \leq b_n \leq c_n$, alors (b_n) tend vers ℓ.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $\forall n > N$, $|a_n - \ell|, |c_n - \ell| < \epsilon$. Alors $-\epsilon < a_n - \ell$ et $c_n - \ell < \epsilon$; donc $\ell - \epsilon < a_n$ et $c_n < \ell + \epsilon$. Donc $\ell - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \epsilon$. On en déduit que $-\epsilon < b_n - \ell < \epsilon$ et enfin $|b_n - \ell| < \epsilon$. □

Corollaire 3.12. *Une suite a_n tend vers 0 si et seulement si $|a_n|$ tend vers 0.*

Démonstration. Supposons que a_n tende vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n > N$, $|a_n| = |a_n - 0| < \epsilon$. Comme $||a_n| - 0| = |a_n|$, la suite $|a_n|$ tend aussi vers 0.

Réciproquement, si $|a_n|$ tend vers 0, alors $-|a_n|$ tend vers 0 (opérations sur les limites). La réciproque découle donc de l'inégalité

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

et du théorème des gendarmes. □

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prouvera plus tard, comme conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, que pour tout réel $a \geq 0$, il existe un unique réel $b \geq 0$ tel que $b^n = a$; voir l'exercice 98. On écrit $b = \sqrt[n]{a}$ et on appelle b la *racine n-ème de a*.

Corollaire 3.13. *On a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.*

On commence par un lemme.

Lemme 3.14. *Si u_n est positif et tend vers 0, alors $\sqrt{u_n}$ tend vers 0 aussi.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\epsilon^2 > 0$, et que u_n tend vers 0, il existe N tel que $\forall n > N$, $u_n < \epsilon^2$. Alors $\forall n > N$, $\sqrt{u_n} < \epsilon$. Donc $\sqrt{u_n}$ tend vers 0. □

Preuve du corollaire 3.13. On suppose ici $n \geq 1$. Comme $\sqrt[n]{n} > 1$ pour $n \geq 2$, on a $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, $h_n > 0$. Donc, par le binôme de Newton, $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+h_n)^n = 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+$ des termes positifs $\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$. Par suite, $n-1 \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$ et donc, en divisant par $n-1$ (qui est positif), $1 \geq nh_n^2/2$, d'où $h_n^2 \leq 2/n$ et enfin $h_n \leq \sqrt{2/n}$. Comme $2/n$ tend vers 0, $\sqrt{2/n}$ tend aussi vers 0 (lemme 3.14), donc par le théorème des gendarmes, h_n tend vers 0. Donc $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ tend vers 1. □

Exercice 39. *Montrer que si $a > 1$, alors $\sqrt[n]{a}$ tend vers 1.*

Exercice 40. *Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\sqrt{n}} = 1$. Indication : montrer que $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{2n}$; utiliser le théorème des gendarmes, avec l'aide de l'exercice 33 et du corollaire 3.13.*

3.9 Limites infinies

Définition 3.15. *Soit (x_n) une suite.*

On dit que x_n tend vers l'infini *(ou pour être plus précis,* tend vers plus l'infini*), ce qu'on écrit $x_n \to \infty$, si pour tout M, il existe N tel que $\forall n > N$, on a $x_n > M$.*

On dit que x_n tend vers moins l'infini*, ce qu'on écrit $x_n \to -\infty$, si pour tout M, il existe N tel que $\forall n > N$, on a $x_n < M$.*

On utilise aussi la notation $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $-\infty$.

Proposition 3.16. *Soit a un entier ≥ 1. Alors la suite (n^a) tend vers l'infini.*

Démonstration. En effet, pour tout $M > 0$, il existe, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, un entier N tel que $N > \sqrt[a]{M}$. Alors, pour tout $n > N$, on a $n > \sqrt[a]{M}$, donc $n^a > M$. □

3.10 Opérations sur les suites (suite)

Théorème 3.17. *Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites.*

(i) Si a_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et que b_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ (resp. $\ell = -\infty$), alors $a_n + b_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(ii) Si a_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et que b_n tend vers $\ell \neq 0$, alors a_nb_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\ell > 0$, et $-\infty$ (resp. $+\infty$) si $\ell < 0$.

(iii) On suppose a_n non nul pour tout n. Alors $|a_n|$ tend vers ∞ si et seulement si $1/a_n$ tend vers 0.

Démonstration. (i) Supposons que a_n tend vers $+\infty$, et que b_n tend vers ℓ. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N' tel que $\forall n > N'$, $|b_n - \ell| < 1$, et donc $b_n > \ell - 1$. En appliquant la définition 3.15 à $M - \ell + 1$ (au lieu de M), on obtient qu'il existe N tel que $\forall n > N$, $a_n > M - \ell + 1$. Donc, si $n > \max(N, N')$, on a $a_n + b_n > M - \ell + 1 + \ell - 1 = M$. Donc $a_n + b_n$ tend vers $+\infty$.

(ii) Supposons que a_n tend vers $+\infty$ et que b_n tend vers $\ell > 0$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N' tel que pour tout $n > N'$ on ait $|b_n - \ell| < \ell/2$; alors $b_n > \ell/2$. Il existe N tel que pour tout $n > N$ on ait $a_n > 2M/\ell$. Alors $a_n b_n > (2M/\ell)(\ell/2) = M$. Donc $a_n b_n$ tend vers ∞.

(iii) Supposons que $|a_n|$ tend vers ∞. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n > N$, on ait $|a_n| > 1/\epsilon$. Alors $|1/a_n| < \epsilon$. La suite $1/a_n$ tend donc vers 0.

Réciproquement, si $1/a_n$ tend vers 0, alors pour tout M, il existe $M' > 0$ tel que $M' \geq M$. Il existe alors N tel que $\forall n > N$, $|1/a_n| < 1/M'$. Alors $|a_n| > M' \geq M$. Donc $|a_n|$ tend vers ∞. □

Théorème 3.18. *On suppose que la suite* $(|a_n|)$ *tend vers* ∞. *Si pour tout* $n \geq n_0$, *on a* $a_n \geq 0$ *(resp.* $a_n \leq 0$*), alors* a_n *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

La preuve est laissée au lecteur.

3.11 Exemples

Proposition 3.19. *Soit* a *un nombre réel. Considérons la suite* $(a^n)_{n\geq 1}$ *; on a :*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Si $a \leq -1$, a^n n'a pas de limite, voir la section 3.14.

Démonstration. Supposons $a > 1$. Alors $a = 1 + h$, $h > 0$. Alors $a^n = (1+h)^n = 1 + nh +$ des termes positifs, donc $a^n > nh$. Soit $M > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $Nh > M$ ($\mathbb{R}$ archimédien). Alors pour tout $n > N$, on a $a^n > nh > Nh > M$. Donc a^n tend vers l'infini.

Si $a = 1$, la suite est constante, donc elle converge vers $a = 1$.

Si $a = 0$, la suite est constante, donc elle converge vers 0.

Si a est non nul, et $|a| < 1$, alors $1/|a| > 1$, donc $1/|a|^n = (1/|a|)^n$ tend vers l'infini par ce que nous venons de voir, et donc $|a|^n$ tend vers 0 par le théorème 3.17 (iii), et enfin a^n tend vers 0 par le corollaire 3.12. □

Dans l'énoncé suivant, on considère une *fraction rationnelle* $P(x)/Q(x)$, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont des polynômes. On note

$$P(x) = a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0, Q(x) = b_j x^j + \cdots + b_1 x + b_0,$$

et on suppose

$$i \geq 0, j \geq 0, a_i \neq 0, b_j \neq 0,$$

ce qui implique que P est de *degré* i et $Q(x)$ de degré j.

Proposition 3.20. *On suppose que $Q(n) \neq 0$ pour tout entier naturel n. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_i}{b_j} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i < j, \\ +\infty & \text{si } i > j \text{ et } a_i, b_j \text{ de même signe,} \\ -\infty & \text{si } i > j \text{ et } a_i, b_j \text{ de signes opposés.} \end{cases}$$

Démonstration. L'astuce ici est d'écrire

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = n^{i-j} \frac{a_i + a_{i-1}n^{-1} + \cdots + a_1 n^{1-i} + a_0 n^{-i}}{b_j + b_{j-1}n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-j} + b_0 n^{-j}}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent alors respectivement vers a_i et b_j. Donc la proposition découle de la proposition 3.16 et des théorèmes 3.8 (iii) et (iv), et 3.17 (ii). □

Exercice 41. *Trouver la limite de la suite (x_n) définie récursivement par $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Indication : on peut trouver i et j tels que $x_n = i + j(-1/2)^n$.*

Exercice 42. *Soit (x_n) une suite telle que $x_0 = 3, x_1 = 2$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+2} = \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$. On voudrait montrer que $x_n = a + b(\frac{1}{2})^n$ (*).*

1) Trouver a, b en posant $n = 0$ et $n = 1$ dans (*) (après solution, ne pas oublier de vérifier que ce sont bien les bons a et b).

2) Avec ce a et ce b, prouver par récurrence sur n que la formule (*) est vraie pour tout n.

3) Montrer que la suite tend vers a.

Exercice 43. *Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$.*

Exercice 44. *Soit* (x_n) *la suite définie par* $x_1 = 0$ *et* $x_n = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2-1}$ *pour* $n \geq 2$.

1) Montrer que $x_n = \dfrac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *(récurrence).*

2) Trouver la limite de la suite (x_n).

3.12 Suites équivalentes

On considère deux suites u_n, v_n, avec $u_n, v_n \neq 0$ pour tout n. On dit que u_n et v_n sont des *suites équivalentes* si $\lim_{n\to\infty} u_n/v_n = 1$.

Proposition 3.21. *C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites dont tous les termes sont non nuls.*

Démonstration. Réflexivité : u_n/u_n tend vers 1.
Symétrie : si u_n/v_n tend vers 1, alors, v_n/u_n tend vers 1.
Transitivité : si u_n/v_n tend vers 1, et si v_n/w_n tend vers 1, alors $u_n/w_n = (u_n/v_n)(v_n/w_n)$ tend vers 1. □

Proposition 3.22. *Deux suites équivalentes sont de même nature, convergentes ou divergentes, et ont la même limite, finie ou infinie.*

Démonstration. Supposons que v_n tend vers une limite ℓ. Alors $u_n = v_n(u_n/v_n)$ tend vers ℓ, d'après le théorème 3.8 (iii).

Supposons que v_n tend vers $+\infty$. Alors $u_n = v_n(u_n/v_n)$ tend vers $+\infty$, d'après le théorème 3.17 (ii). □

3.13 Suites monotones

Définition 3.23. *Une suite* (x_n) *est dite* croissante *(resp.* strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante*) si pour tout* n*, on a* $x_n \leq x_{n+1}$ *(resp.* $x_n < x_{n+1}$*, resp.* $x_n \geq x_{n+1}$*, resp.* $x_n > x_{n+1}$*).*

Une suite est dite monotone *si elle est croissante, ou décroissante.*

Si une suite est strictement croissante (resp. strictement décroissante), elle est croissante (resp. décroissante).

Théorème 3.24. *Toute suite monotone et bornée converge.*

Remarquez qu'une suite croissante est toujours bornée inférieurement, par son premier terme ; donc, une suite croissante est bornée si et seulement si elle a une borne supérieure.

Démonstration. Supposons que la suite est croissante (le cas décroissant est analogue) L'ensemble $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, et il a une borne supérieure, par hypothèse. Il a donc un supremum. Notons le ℓ. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\ell - \epsilon$ n'est pas une borne supérieure de E. Il existe donc N tel que $\ell - \epsilon < x_N$. Pour tout $n \geq N$, on a $x_N \leq x_n$, donc $\ell - \epsilon < x_n$. Donc $\ell - x_n < \epsilon$. On a aussi $x_n \leq \ell$ (car ℓ est une borne supérieure de E). Donc $0 \leq \ell - x_n < \epsilon$ et par suite $|\ell - x_n| < \epsilon$. $\square$

La preuve montre aussi le résultat suivant.

Corollaire 3.25. *Si une suite croissante a pour limite ℓ, alors chaque terme de la suite est $\leq \ell$.*

Corollaire 3.26. *La suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ est convergente (on suppose $n \geq 1$).*

On note e la limite de cette suite, et la preuve montrera que $2 \leq e \leq 3$. Le nombre e joue un grand rôle en mathématiques.

Démonstration. On a $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} (\frac{1}{n})^i = \sum_i \frac{n!}{(n-i)!i!} \frac{1}{n^i}$ $= \sum_i \frac{1}{i!} \frac{n!}{(n-i)!n^i} \leq \sum_i \frac{1}{i!}$. En effet, $\frac{n!}{(n-i)!n^i} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots (n-i) n \cdots n}$, où le facteur n au dénominateur apparaît i fois. Cette quantité vaut donc $\frac{n-i+1}{n} \frac{n-i+2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n} \leq 1$. De plus $I = \sum_i \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \frac{1}{i!} \leq 1 + 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \frac{1}{2^{i-1}}$, car $i! = i \cdot (i-1) \cdots 2 \cdot 1 \geq 2^{i-1}$. Donc $I \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \leq 1 + 2 = 3$.

Nous avons donc prouvé que $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$. Nous montrons maintenant que la suite est croissante. On pourra en déduire qu'elle converge (théorème 3.24), et par passage à la limite, on obtient que sa limite est comprise entre 2 et 3, car chaque terme est $\geq$ le premier terme, qui est $(1 + \frac{1}{1})^1 = 2$.

On a $x_{n+1}/x_n = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} / (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n+1})((1 + \frac{1}{n+1})/(1 + \frac{1}{n}))^n$ $= \frac{n+2}{n+1} (\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n = \frac{n+2}{n+1} (\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2})^n = \frac{n+2}{n+1} (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \geq \frac{n+2}{n+1} (1 - \frac{n}{(n+1)^2})$ (par l'inégalité de Bernoulli, voir l'exercice 45) $= \frac{n+2}{n+1} \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$. $\square$

Proposition 3.27. *Si une suite croissante (resp. décroissante) n'est pas bornée, elle tend vers l'infini (resp. moins l'infini).*

Démonstration. $\square$

Exercice 45. *Prouver par récurrence que $(1 + a)^n \geq 1 + an$, pour tout $a \geq -1$ et tout entier $n \geq 1$.*

Exercice 46. *Soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $x_1 = 1$ *et* $x_{n+1} = \dfrac{n}{x_n + n}$ *pour tout* $n \geq 1$.

1. *Montrer que* $0 \leq x_n \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Exercice 47. *Soit* x_n *une suite définie par* $x_0 > 0$ *et pour tout* n, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, *où* $a > 0$.

(i) Montrer que $x_n > 0$ *pour tout* n.

(ii) Montrer que $x_n^2 \geq a$. *Indication : calculer* $x_{n+1}^2 - a$.

(iii) Montrer que la suite est décroissante et bornée ; en déduire qu'elle a une limite $x > 0$. *Indication : calculer* $x_{n+1} - x_n$.

(iv) Montrer que la suite (x_{n+1}) *tend vers* x, *et que la suite* $(\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}))$ *tend vers* $\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. *En déduire que* $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, *que* $x^2 = a$ *et que* $x = \sqrt{a}$.

Exercice 48. *Soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *et* $(y_n)_{n\geq 1}$ *deux suites de nombres réels définies par*

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{2n+1}.$$

1. *Montrer que* (x_n) *est une suite croissante et que* (y_n) *est une suite décroissante.*
2. *Monter que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Indications : suites monotones bornées ; calculer la limite de $y_n - x_n$.

Exercice 49. *Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n$. *Indications : se ramener à* $(1 + 1/n)^n$ *vu en cours.*

Exercice 50. *On considère une suite croissante* (x_n) *et une suite décroissante* (y_n) *telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$.

1) Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_p$ *(considérer les deux cas* $n \geq p$ *et* $n \leq p$*).*

2) Montrer que les deux suites ont une limite.

3) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n - x_n \leq \frac{1}{n}$. *Montrer que ces deux suites ont la même limite.*

Exercice 51. *Déterminer si les suites ci-dessous, définies par récurrence, convergent ou divergent. Lorsqu'elles convergent, trouver leur limite.*

1. $x_0 = 1$ *et* $x_{n+1} = 3 + \sqrt{x_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. $x_0 = 1$ *et* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1+3x_n}{1+7x_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3. $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \sqrt{2}$ *et* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n - x_{n-1}}$ *pour* $n \geq 1$.

Indications : pour 1, suite croissante (récurrence) et bornée (par 6) ; pour 2, suite croissante et non bornée, elle tend vers ∞. *Pour 3, critère de divergence par sous-suites, appliqué à* $a_n = x_{n+1} - x_n$.

Exercice 52. *On considère un réel* $a > 0$, *et une suite* (x_n) *telle que* $x_0 > 0$ *et que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

0. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ *(récurrence).*
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n^2 \geq a$.
3. Montrer que la suite est bornée inférieurement.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\frac{a - x_n^2}{x_n}$.
5. Montrer que la suite est décroissante.
6. Montrer que la suite est bornée supérieurement.
7. Montrer qu'elle a une limite x.
8. Montrer que la limite satisfait $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
9. Montrer que $x = \sqrt{a}$.

3.14 Sous-suites

Définition 3.28. *Soit* x_n *une suite ; on dit que la suite* (y_n) *est une* sous-suite*, ou une* suite extraite*, de la suite* (x_n)*, s'il existe une suite d'entiers naturels* (k_n)*, strictement croissante, telle que* $\forall n, y_n = x_{k_n}$.

Exemples : pour p fixé, $y_n = x_{n+p}$. Les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont des sous-suites de la suite (x_n) (appelées suites des termes pairs, et suite des termes impairs), de même que la suite x_{2^n}.

Théorème 3.29. *Si une suite a une limite, finie ou infinie, alors toute sous-suite a la même limite.*

Lemme 3.30. *Si* (k_n) *est une suite strictement croissante d'entiers, alors* $\forall n$, $k_n \geq n$.

La preuve se fait facilement par récurrence sur n.

Preuve du théorème 3.29. Nous prouvons le théorème dans le cas d'une limite finie (le cas infini est très similaire). Prenons les notations de la définition 3.28, et supposons que x_n tend vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N

tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < \epsilon$. Alors $\forall n > N, k_n > N$ par le lemme 3.30, donc $|y_n - \epsilon| = |x_{k_n} - \ell| < \epsilon$. □

Corollaire 3.31. *Si deux sous-suites d'une suite ont des limites différentes, alors la suite ne converge pas.*

Exemple : $(-1)^n$: la suite des termes pairs tend vers 1, et celle des termes impairs tend vers -1. Donc la suite ne converge pas.

Le corollaire est vrai aussi dans le cas de limites infinies. On laisse au lecteur le soin d'énoncer cette variante. Comme exemple, considérons la suite $(-a)^n$, où $a > 1$. La suite des termes pairs tend vers ∞, et celle des termes impairs vers $-\infty$ (voir la proposition 3.19 et le théorème 3.17 (ii)) ; donc la suite n'a pas de limite, ni finie, ni infinie.

Corollaire 3.32. *Soit (x_n) une suite, p un entier naturel, et (y_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+p}$. Alors x_n tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si y_n tend vers ℓ.*

Démonstration. Si x_n tend vers ℓ, alors y_n aussi, car y_n est une suite extraite.

Réciproquement, supposons que y_n tend vers ℓ, et nous nous limitons au cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $\forall n > N$, $|y_n - \ell| < \epsilon$. Alors, $\forall n > N + p$, $n - p > N$, donc $|x_n - \ell| = |y_{n-p} - \ell| < \epsilon$. □

Théorème 3.33. *Soit (x_n) une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n. On suppose que x_{n+1}/x_n tend vers ℓ.*

(i) Si $\ell < 1$, alors x_n tend vers 0.

(ii) Si $\ell > 1$, alors x_n tend vers ∞.

Démonstration. (i) Il existe r tel que $\ell < r < 1$. Il existe p tel que $\forall n \geq p$, $|x_{n+1}/x_n - \ell| < r - \ell$. Alors $x_{n+1}/x_n - \ell < r - \ell$ et $x_{n+1}/x_n < r$. Posons $y_n = x_{n+p}$. On a alors $\forall n, y_{n+1}/y_n < r$. Une récurrence facile implique que $\forall n, y_n < r^n y_0$. Donc $0 \leq y_n \leq r^n y_0$. La proposition 3.19 et le théorème des gendarmes impliquent alors que y_n tend vers 0. Donc x_n tend vers 0 par le corollaire 3.32.

(ii) On applique (i) à la suite $1/x_n$. On obtient que $1/x_n$ tend vers 0. Donc x_n tend vers ∞, par le théorème 3.17 (iii). □

Exercice 53. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par*

$$x_n = \prod_{i=0}^{n} (1 + x^{2^i}) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^n}).$$

Indication : calculer le produit en fonction d'une série géométrique : montrer qu'il est égal à $\sum_{0\leq i\leq 2^{n+1}-1} x^i$.

Exercice 54. *Déterminer si la suite* $(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}))$ *converge. Indications : calculer les valeurs.*

Exercice 55. *Soit* $a>1$ *un nombre réel et* $k\in\mathbb{N}$. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} = +\infty$ *et que* $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$. *Indication : utiliser le théorème 3.33.*

Exercice 56. *Pour tout nombre réel* a, *montrer que* $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

3.15 Théorème de Bolsano-Weierstrass

Théorème 3.34. *Toute suite bornée a une sous-suite convergente. Précisément, si les termes de la suite sont dans l'intervalle* $[a,b]$, *alors il existe une sous-suite ayant une limite dans cet intervalle.*

Lemme 3.35. *Toute suite possède une sous-suite monotone.*

Démonstration. Appelons *sommet* de la suite (x_n) un entier naturel k tel que pour tout $n>k$, $x_k>x_n$. Supposons que (x_n) a une infinité de sommets. Soient $k_0<k_1<k_2<\cdots$ la suite de ces sommets. On a donc $\forall i,\forall n>k_i, x_n<x_{k_i}$. En particulier, $x_{k_{i+1}}<x_{k_i}$. Donc la suite $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. On a donc trouvé une sous-suite monotone.

Supposons au contraire que l'ensemble des sommets est fini. Soit k_0 strictement plus grand que tous les sommets. Alors k_0 n'est pas un sommet, et il existe donc $n=k_1$ tel que $n>k_0$ et $x_{k_1}=x_n\geq x_{k_0}$. Maintenant, k_1 n'est pas un sommet, puisqu'il est plus grand que k_0. Il existe donc $k_2>k_1$ tel que $x_{k_2}\geq x_{k_1}$. On construit ainsi une suite strictement croissante $k_0<k_1<k_2<\ldots$ telle que $\forall i, x_{k_{i+1}}\geq x_{k_i}$. On construit ainsi une sous-suite $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, qui est croissante. □

Preuve du Théorème 3.34. L'existence de la sous-suite convergente découle du lemme 3.35 et du théorème 3.24, puisque la suite, donc la sous-suite, est bornée. Chaque terme de la sous-suite est dans $[a,b]$ et par passage à la limite (théorème 3.7), la limite aussi. □

Exercice 57. *Montrer que si on a deux suites* (a_n) *et* (b_n) *dont les termes sont dans* $[a,b]$, *alors il existe une suite* (k_n) *strictement croissante d'entiers naturels telle que les deux suites* (a_{k_n}) *et* (b_{k_n}) *convergent.*

3.16 Densité et suites

Une partie E de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ si pour tous réels $a < b$, E rencontre l'intervalle (a, b). Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.36. *E est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) dont la limite est x et dont tous les termes sont dans E.*

Démonstration. Supposons que E soit dense dans R. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, il existe $x_n \in E \cap (x - 1/n, x + 1/n)$. On construit ainsi une suite qui tend vers x, car $\forall n \geq 1, |x - x_n| < 1/n$ (voir exercice 31) ; de plus $x_n \in E$.

Réciproquement, supposons que pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) dont la limite est x et dont tous les termes sont dans E. Soit (a, b) un intervalle tel que $a < b$. Posons $x = \frac{a+b}{2}$, le milieu de cet intervalle. Soit (x_n) une suite dont la limite est x et dont tous les termes sont dans E. Prenons $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, la moitié de la longueur de l'intervalle. Comme la suite tend vers x, il existe x_n tel que $|x - x_n| < \epsilon$. Alors $x_n \in E$ et $x_n \in (a, b)$. □

Exercice 58. *Montrer que si E est dense dans $\mathbb{R}$ et que F est fini, alors $E \setminus F$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.*

3.17 Suites de Cauchy

Définition 3.37. *Une suite (x_n) est appelée* suite de Cauchy *si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n, p > N$, $|x_n - x_p| < \epsilon$.*

Il est parfois utile de reformuler ceci en : (x_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$.

Théorème 3.38. *(Cauchy) Une suite est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Lemme 3.39. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit x_n une suite de Cauchy. En prenant $\epsilon = 1$ dans la définition, on trouve qu'il existe N tel que $\forall n > N, |x_n - x_{N+1}| < 1$; donc $|x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| = 1 + |x_{N+1}|$. Soit $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$. Alors, pour tout n, $|x_n| \leq M$. □

Preuve du théorème de Cauchy. 1. Si x_n tend vers la limite ℓ, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < \epsilon/2$. Alors, $\forall n, p > N$, $|x_n - x_p| = |x_n - \ell + \ell - x_p| \leq |x_n - \ell| + |\ell - x_p| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

2. Si (x_n) est une suite de Cauchy, elle est bornée (lemme 3.39). Par le théorème de Bolsano-Weirstrass, il existe une sous-suite (x_{k_n}) de la suite (x_n) qui a une limite ℓ, où la suite d'entiers (k_n) est strictement croissante. Montrons que x_n tend vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 tel que si $n > N_1$, alors $|x_{k_n} - \ell| < \epsilon/2$. Comme la suite (x_n) est de Cauchy, il existe N_2 tel que si $n, p > N_2$, alors $|x_n - x_p| < \epsilon/2$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour tout $n > N$, on a $n > N_1$ et $n > N_2$; de plus, par le lemme 3.30, $k_n \geq n > N \geq N_2$, donc $|x_n - \ell| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - \ell| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \ell| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. □

Exercice 59. *On considère la suite définie par* $x_0 = 1, x_1 = 1/3, x_{n+2} = (x_{n+1} + 2x_n)/3$ *pour tout entier naturel* n.

(i) Montrer que $x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1}(2/3)^{n+1}$.

(ii) Montrer que $|x_{n+p} - x_n| \leq 3(2/3)^{n+1}$. *Indication : écrire que* $x_{n+p} - x_n = x_{n+p} - x_{n+p-1} + \cdots + x_{n+1} - x_n$, *appliquer la formule donnant la somme d'une série géométrique, et utiliser (i).*

(iii) Montrer que (x_n) *est une suite de Cauchy.*

(iv) Après avoir vérifié que la formule de récurrence pour x_{n+2} *ne permet pas de la calculer la limite, montrer que la limite est* $3/5$. *Indication : calculer* $x_n - x_0$ *avec la même astuce qu'en (ii), puis passer aux limites de chaque côté.*

3.18 Limites supérieures et limites inférieures*

Exercice 60. ** (forme indéterminée* 1^∞*) Montrer que* $(1+1/n)^n$ *tend vers* e. *Montrer que* $(1+1/n)^{n\ln(a)}$ *tend vers* a, $a > 0$. *Montrer que* $(1+1/n)^{n^2}$ *tend vers* $+\infty$. *Montrer que* $(1+1/n)^{\sqrt{n}}$ *tend vers 0. Indication : prendre le logarithme.*

4 Les séries

4.1 Convergence d'une série et exemples

Définition 4.1. *Soit* (a_n) *une suite. On définit* $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. *La suite* (S_n) *est appelée* série .

On appelle S_n la somme partielle *de la série, et a_n est appelé le* terme général *de la série. On dit que la série converge si la suite (S_n) converge.*

La limite est alors notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ou $\sum_{n\geq 0} a_n$, ou simplement $\sum a_n$, et on l'appelle la somme *de la série.*

Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$. On a donc $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$. Donc S_n tend vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. On écrit $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$.

Plus généralement, $\sum a^n$ est appelée la *série géométrique de raison a*. Si $-1 < a < 1$, elle tend vers $\frac{1}{1-a}$. Le calcul est le même que ci-dessus. Si $a \geq 1$, elle tend vers $+\infty$. Si $a \leq -1$, elle n'a pas de limite finie, ni infinie.

Parfois, on considère des séries commençant au rang 1 : $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Elle converge vers 1. En effet, on a $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Donc la somme partielle de rang n est $S_n = \sum_{1\leq i\leq n}(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ (*somme télescopique*), donc S_n tend vers 1.

La *série harmonique* est la série de terme général $\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, notée donc $\sum \frac{1}{n}$. Elle ne converge pas. En effet la somme partielle de rang 2^n est

$$
\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + n\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

qui tend vers l'infini. Donc S_n ne peut pas converger, par le critère des sous-suites (théorème 3.29).

Un résultat très simple sur les séries convergentes est le suivant ; il fournit une condition suffisante de *non convergence*.

Proposition 4.2. *Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.*

Démonstration. On a $a_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge, alors S_n tend vers une limite S, de même que S_{n-1}. Donc leur différence tend vers 0. □

Définition 4.3. *Deux séries sont dites de* même nature *si elles convergent toutes deux, ou si elles divergent toutes deux.*

Proposition 4.4. *Si deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors elles sont de même nature.*

Démonstration. Si on note S_n et T_n les sommes partielles de ces séries, on a, comme conséquence de l'hypothèse, $S_n = T_n + a$, si n est assez grand, pour un certain réel a. $\square$

Exercice 61. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n}$ *converge et calculer sa limite.*

Exercice 62. *Soit* $a > 0$*. Montrer que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{a}$*. Indications : imiter le cas* $a = 0$ *vu en cours.*

Exercice 63. *On suppose que la série* $\sum a_n$ *converge ; montrer que la série* $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n^2 + 1}$ *diverge.*

Exercice 64. *Soit* $\{a_n\}$ *la suite définie récursivement par* $a_0 = 1$ *et* $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + a_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Montrer par récurrence que* $a_n \geq 1$, $a_{2n-1}^2 > 2$ *et* $a_{2n}^2 < 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
2. *Montrer que les sous-suites* $\{a_{2n}\}$ *et* $\{a_{2n-1}\}$ *convergent.*
3. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$*, ce qui donne le développement en* fraction continue *de* $\sqrt{2}$*, à savoir*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2+\cdots}}.$$

4.2 Séries à termes positifs

Une série *à termes positifs* est une série dont tous les termes sont ≥ 0.

Théorème 4.5. *Une série à termes positifs converge si et seulement si les sommes partielles sont bornées (c'est-à-dire, s'il existe* M *tel que* $\forall n, S_n \leq M$*). Si elles ne sont pas bornées, la série tend vers* ∞*.*

Dans le deuxième cas, on écrit $\sum a_n = \infty$. Donc, pour une série à termes positifs, soit elle converge, soit elle tend vers ∞.

Démonstration. Si $S_n < M$ pour tout M, alors la suite des S_n est croissante est bornée. Elle converge par le théorème 3.24.

Si les S_n ne sont pas bornés, alors S_n tend vers ∞ par la Proposition 3.27. □

Corollaire 4.6. *(critère de comparaison) Si on a deux séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, si $a_n \leq b_n$ pour tout n, et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*

Lemme 4.7. *Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs qui converge vers A. Alors pour tout n, $S_n \leq A$.*

Démonstration. La suite des S_n est croissante. On applique le corollaire 3.25. □

Démonstration. (Preuve du corollaire 4.6) Soit S_n la somme partielle de $\sum a_n$, et T_n celle de b_n. On a $S_n \leq T_n$. Par le lemme 4.7, on a $T_n \leq B$, où $B = \sum b_n$. On conclut avec le théorème 4.5. □

Exemple : considérons la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$. On a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. On a déjà vu en 4.1 que la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge. On applique le corollaire. C'est un résultat célèbre, mais hors d'atteinte dans ce cours, que la limite est $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corollaire 4.8. *Si on a deux séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, si $a_n \leq b_n$ pour tout n, et si $\sum a_n = \infty$, alors $\sum b_n = \infty$ converge.*

Démonstration. C'est la contraposée du corollaire 4.6, en tenant compte du théorème 4.5. □

Corollaire 4.9. *(critère des suites équivalentes, ou critère du quotient) Soient deux suites (a_n) et (b_n), strictement positives, et équivalentes. Alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.*

Démonstration. Comme $\lim a_n/b_n = 1$, il existe N tel que $n > N$ implique $|a_n/b_n - 1| < 1/2$; donc $-1/2 < a_n/b_n - 1 < 1/2$, et par suite $1/2 < a_n/b_n < 3/2$, d'où $(1/2)b_n < a_n < (3/2)b_n$. Par le critère de comparaison (corollaire 4.6), tenant compte de la proposition 4.4, les deux séries sont de même nature. □

Attention Ce critère s'applique seulement aux séries à termes strictement positifs.

Corollaire 4.10. *(critère de d'Alembert) Soit* (a_n) *une suite à termes strictement positifs telle que* $\lim a_{n+1}/a_n = \ell$.

(i) Si $\ell < 1$, *alors* $\sum a_n$ *converge.*

(ii) Si $\ell > 1$, *alors* $\sum a_n$ *diverge.*

Démonstration. (i) Il existe r tel que $\ell < r < 1$. Soit $\epsilon = r - \ell > 0$. Il existe N tel que si $p \geq N$, alors $|a_{p+1}/a_p - \ell| < r - \ell$; alors $a_{p+1}/a_p - \ell < r - \ell$, donc $a_{p+1}/a_p < r$ et enfin $a_{p+1} \leq r a_p$. Il s'ensuit que pour tout n, on a $a_{N+n} \leq r^n a_N$. Par le critère de comparaison (corollaire 4.6), la série $\sum_{p \geq 0} a_{N+n}$ converge, car $\sum r^n$ converge (série géométrique de raison r). Par suite, la série $\sum a_n$ converge aussi.

(ii) Il existe r tel que $1 < r < \ell$. Avec $\epsilon = \ell - r$, on trouve un N tel que $\forall n \geq N$, $|a_{n+1}/a_n - \ell| < \ell - r$; alors $r - \ell < a_{n+1}/a_n - \ell$, et par suite $1 < r < a_{n+1}/a_n$ et enfin $a_n < a_{n+1}$. Donc pour tout $n > N$, on a $a_n > a_N$, et par suite a_n ne tend pas vers 0. Il s'ensuit que $\sum a_n$ diverge, par la proposition 4.2. □

Corollaire 4.11. *(critère de Cauchy, ou critère de la racine) Soit* (a_n) *une suite à termes strictement positifs telle que* $\lim (a_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$.

(i) Si $\ell < 1$, *alors* $\sum a_n$ *converge.*

(ii) Si $\ell > 1$, *alors* $\sum a_n$ *diverge.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du critère de d'Alembert. □

Théorème 4.12. *(critère de condensation de Cauchy)) Soit* a_n *une suite décroissante de termes positifs. Alors* $\sum a_n$ *converge si et seulement si* $\sum 2^n a_{2^n}$ *converge.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous faisons commencer la suite a_n à $n = 1$, et la suite $2^n a_{2^n}$ à $n = 0$.

Par décroissance de la suite a_n, on a

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}.$$

Soit $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ et $T_n = 2^0 a_{2^0} + \cdots + 2^n a_{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + \cdots + 2^n a_{2^n} = T_n. \end{aligned}$$

De plus

$$S_{2^{n+1}-1} \geq a_1 + \sum_{1\leq i\leq n} 2^i a_{2^{i+1}} = a_1 + \frac{1}{2}(\sum_{1\leq i\leq n} 2^{i+1} a_{2^{i+1}})$$

$$= a_1 + \frac{1}{2}(-2^0 a_{2^0} - 2^1 a_{2^1} + T_{n+1}) = \frac{1}{2}T_{n+1} + \frac{1}{2}a_1 - a_2.$$

On en déduit que $T_{n+1} \leq 2S_{2^{n+1}-1} - a_1 + 2a_2$. Si $\sum a_n$ converge vers S, alors S_n est borné supérieurement par S (lemme 4.7) ; donc T_{n+1} est borné supérieurement par $2S - a_1 + 2a_2$; donc T_n est borné pour $n \geq 1$, et enfin T_n est borné pour tout n (car $0 \leq T_0 \leq T_1$) ; la série $\sum 2^n a_{2^n}$ converge donc, par le théorème 4.5.

Réciproquement, si cette série converge, alors ses sommes partielles T_n sont bornées, donc les $S_{2^{n+1}-1}$ sont bornées, et par positivité, les S_n sont bornées (voir l'exercice 67). Donc les sommes partielles S_n de la série $\sum a_n$ (qui sont les a_0+S_n) sont bornées, et la série converge par le même théorème. □

Corollaire 4.13. *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge si et seulement si $p > 1$.*

Démonstration. Si $p \leq 0$, alors le terme général ne tend pas vers 0, donc la série ne converge pas.

Supposons donc $p > 0$. Alors la suite $1/n^p$ est décroissante. Appliquons le critère de condensation. Il faut examiner la série $\sum_{n\geq 0} 2^n(1/(2^n)^p)$. Son terme général est $(2^{1-p})^n$, et c'est donc une série géométrique de raison 2^{1-p}. Elle converge si et seulement si $2^{1-p} < 1$ (section 4.1), ce qui est équivalent à $1 - p < 0$, donc à $p > 1$. □

On note, pour $p > 1$, $\zeta(p) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$. On obtient ainsi la célèbre *fonction zeta* de Riemann (nous avons déjà rencontré $\zeta(2)$ après le lemme 4.7).

Exercice 65. *Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} nr^n$ converge, où $0 < r < 1$.*

Exercice 66. *Soit s_n la suite $s_n = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$. On admettra la formule de Stirling (qui donne une approximation de $n!$) :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{s_n} = 1.$$

Montrer que la série $\sum \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge (comparer par quotient à la série $\sum \sqrt{n}$, et utiliser le corollaire 4.13).

Exercice 67. *Soit a_n une suite à termes positifs et S_n ses sommes partielles. Soit (k_n) une suite d'entiers naturels qui tend vers l'infini. Montrer que si les S_{k_n}, $n \in \mathbb{N}$, sont bornées, alors les S_n sont bornées.*

Exercice 68. *Montrer que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Indication : condensation. En déduire que si a_n tend vers 0, alors la série $\sum a_n/n$ ne converge pas nécessairement.*

Exercice 69. *Soit (a_n) une suite décroissante de nombres positifs telle que Σa_n converge. Montrer que $\lim na_n = 0$. Indication : utiliser la condensation pour montrer que $2^k a_{2^k}$ tend vers 0 ; pour n quelconque, intercaler n entre deux puissance de 2.*

Exercice 70.

Classer les séries suivantes en séries convergentes et en séries divergentes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$,
2. $\displaystyle\sum \frac{\cos^2 n}{3^n}$,
3. $\displaystyle\sum \frac{n^n}{n!}$,
4. $\displaystyle\sum \frac{3^n+2}{7^n+5}$,
5. $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}$,
6. $\displaystyle\sum \frac{a^n}{n!}$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+$,
7. $\displaystyle\sum \frac{9}{3\sqrt{n}+2}$,
8. $\displaystyle\sum \frac{2^n+6n^3}{n!+4n^2}$,
9. $\displaystyle\sum \frac{n^3+4n^2}{2n^4+n^3}$.

Exercice 71. *Soit (a_n) une suite décroissante de nombres positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Indications : utiliser la condensation pour montrer que $2^k a_{2^k}$ tend vers 0 ; pour n quelconque, intercaler n entre deux puissances de 2.*

4.3 Critère de Cauchy

Théorème 4.14. *Une série converge* $\sum a_n$ *si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* N *tel que pour tout* $n > N$ *et tout* p*, on a* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$*.*

Démonstration. On applique le théorème 3.38 à S_n. La somme dans l'énoncé. est $S_{n+p} - S_n$. □

Montrons avec ce théorème que la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge. On a $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+p)}) \leq \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{2}{(n+1)!}$. Donc le théorème s'applique. On peut montrer que la somme de cette série est le nombre e, déjà rencontré au Corollaire 3.26.

4.4 Opérations sur les séries

Théorème 4.15. *Si* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont deux séries convergentes, de sommes* A *et* B*, alors pour tous réels* a, b*, la série* $\sum(aa_n + bb_n)$ *converge vers* $aA + bB$*.*

Démonstration. Soit A_n, B_n, S_n les somme partielles de rang n de ces trois séries. Alors $S_n = aA_n + bB_n$. On applique le théorème 3.8 (i) et (ii). □

Exercice 72. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ *converge et calculer sa somme sachant que* $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Exercice 73. *On sait que* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et que sa somme vaut* $\frac{\pi^2}{6}$*. En déduire la somme des séries* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

4.5 Associativité de la somme infinie

Théorème 4.16. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *une série convergente. Soit* $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$ *une suite strictement croissante d'entiers naturels. On définit* $b_n = \sum_{k_n \leq i < k_{n+1}}$*. Alors la série* $\sum b_n$ *est convergente, avec la même limite.*

Par exemple, on pourrait avoir $b_0 = a_0 + a_1 + a_2, b_1 = a_3, b_2 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \ldots$.

Démonstration. On note S_n les sommes partielles de $\sum a_n$. Alors $S_{k_{n+1}-1}$ est une sous-suite de la suite (S_n). Cette sous-suite est convergente (théorème 3.29). Or $b_0+b_1+\cdots+b_n = S_{k_{n+1}-1}$. La série $\sum b_n$ est donc convergente. □

Sous une condition supplémentaire, on a une réciproque.

Théorème 4.17. *Soit Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série. Soit $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. On définit $b_n = \sum_{k_n \leq i < k_{n+1}}$. On suppose que a_n tend vers 0, et qu'il existe K tel que pour tout i, $k_{i+1} - k_i \leq K$. Alors la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum b_n$ est convergente.*

Démonstration. Supposons que $\sum b_n$ converge. Soit $\epsilon > 0$.

- On a $n < p \Leftrightarrow k_n < k_p$, car la suite k_n est strictement croissante.
- Il existe K tel que pour tout n, $k_{n+1} - k_n < K$.
- Il existe M tel que pour tout $i > M$, $a_i < \epsilon/2K$.
- Comme la série $\sum b_n$ converge, il existe S et L tel que pour tout $n \geq L$, $|\sum_{0\leq i\leq n} b_i - S| = |S_{k_{n+1}-1} - S| < \epsilon/2$, où $S_n = \sum_{0\leq i\leq n} a_i$.
- On peut supposer $k_L \geq M$, quitte à remplacer L par un nombre plus grand, puisque la suite k_n tend vers l'infini par le lemme 3.30.

Soit $m > k_{L+1}$. Il existe n tel que $k_n \leq m < k_{n+1}$. Alors $k_{L+1} < m < k_{n+1}$, donc $n+1 > L+1$, et $n > L$. Donc $n-1 \geq L$ et par suite $|S_{k_n-1} - S| < \epsilon/2$. De plus, si $i \geq k_n > k_L \geq M$, alors $|a_i| < \epsilon/2K$. Donc $|S_m - S| \leq |S_m - S_{k_n-1}| + |S_{k_n-1} - S| \leq |\sum_{k_n\leq i\leq m} a_i| + \epsilon/2 \leq \sum_{k_n\leq i\leq m} |a_i| + \epsilon/2 \leq K\epsilon/2K + \epsilon/2 = \epsilon$. □

4.6 Convergences absolue et conditionnelle

Définition 4.18. *Une série $\sum a_n$* converge absolument *si la série $\sum |a_n|$ converge. Une série $\sum a_n$* converge conditionnellement *si elle converge et si la série $\sum |a_n|$ ne converge pas.*

Théorème 4.19. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; comme $\sum |a_n|$ converge, il existe par le théorème 4.14 N tel que pour tout $n > N$ et tout p, on a $|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}| < \epsilon$. On a alors, par l'inégalité triangulaire, $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$. Donc $\sum a_n$ satisfait le critère du théorème 4.14, et par suite, converge. □

On a une caractérisation de la convergence absolue, et une condition nécessaire pour la convergence conditionnelle.

Soit a_n une suite et posons $p_n = a_n$ si $a_n > 0$ et $p_n = 0$ si $a_n \leq 0$; de plus $q_n = 0$ si $a_n \geq 0$ et $q_n = a_n$ si $q_n < 0$. En examinant les trois cas $a_n > 0$, $a_n = 0$, $a_n < 0$, on établit que que

$$a_n = p_n + q_n, |a_n| = p_n - q_n.$$

Théorème 4.20. *a) $\sum a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum p_n$ et $\sum q_n$ convergent. Dans ce cas, $\sum a_n = \sum p_n + \sum q_n$.*

b) Si $\sum a_n$ converge conditionnellement, alors $\sum p_n$ et $\sum q_n$ divergent.

Démonstration. a) Si les deux dernières séries convergent, alors la série $\sum |a_n|$ aussi, car $|a_n| = p_n - q_n$.

Si $\sum |a_n|$ converge, alors, comme $|p_n| \leq |a_n|$ et $|q_n| \leq |a_n|$ (vérifier), les deux séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$ convergent absolument, donc converge.

La dernière égalité vient de $a_n = p_n + q_n$.

b) Par a), les deux séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$ ne peuvent pas être toutes deux convergentes. Supposons que $\sum p_n$ converge ; alors, comme $q_n = a_n - p_n$, $\sum q_n$ converge aussi : contradiction. De même, si $\sum q_n$ converge, alors $\sum p_n$ aussi : contradiction. En conclusion, aucune des deux ne converge. $\square$

Exercice 74. *Montrer que dans le cas b) du théorème 4.20, on a $\sum p_n = \infty$ et $\sum q_n = -\infty$.*

Exercice 75. *Soit $\displaystyle\sum a_n$ une série absolument convergente et $\{b_n\}$ une suite bornée. Montrer que la série $\displaystyle\sum a_n b_n$ converge absolument.*

Exercice 76. *En justifiant pleinement chacune de vos réponses, déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent :*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+n^2}{\sqrt{n^5+2n^3+7}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}$

4.7 Séries alternées

Définition 4.21. *Une série* $\sum a_n$ *est dite* alternée *si les* a_n *sont alternativement* ≥ 0 *et* ≤ 0.

Théorème 4.22. *Soit* a_n *une suite décroissante de termes positifs, qui tend vers 0. Alors la série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ *converge.*

Application La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, appelée la *série harmonique alternée*, converge. Comme la série harmonique diverge, elle converge conditionnellement.

Démonstration. Considérons la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum a_n$. On a pour tout $n \geq 0$, $S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n}$, car la suite a_n décroît ; de même, $S_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq S_{2n+1}$. Donc la sous-suite S_{2n} est décroissante, alors que la sous-suite S_{2n+1} est croissante. De plus $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$. Il s'ensuit que $S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$. Les deux sous-suites sont donc bornées, et elles convergent d'après le théorème 3.24. Soit donc $S = \lim S_{2n}$ et $S' = \lim S_{2n+1}$. Donc $S - S' = \lim(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim a_{2n+1} = 0$ (théorème 3.29). Donc $S = S'$. Comme S_{2n} et S_{2n+1} tendent toutes deux vers S, il s'ensuit que S_n tend vers S'. □

Exercice 77. *Déterminer si les séries suivantes convergent ou non, et lorsqu'elles convergent, déterminer si elles convergent absolument ou conditionnellement :*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2+\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^4}{3^n}$

Exercice 78. *Des contre-exemples : on définit, pour* $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. *Montrer que les deux suites sont équivalentes.*
2. *Montrer que* $\sum u_n$ *converge.*
3. *Montrer que* $v_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$.
4. *Montrer que* $\sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ *converge.*

5. *En déduire que* $\sum v_n$ *diverge.*
6. *Pourquoi le corollaire 4.9 ne s'applique-t-il pas ?*
7. *Pourquoi le théorème 4.22 ne s'applique-t-il pas à* $\sum v_n$ *?*

4.8 Réarrangements de séries

On sait bien que l'addition des nombres est commutative : $a+b=b+a$. Même, si on addition plusieurs nombres, on peut le faire dans n'importe quel ordre, et on trouvera toujours le même résultat ; ça s'exprime formellement comme suit : étant donnés n nombres réels, et f une bijection de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ dans lui-même, on a $a_1+a_2+\cdots+a_n = a_{f(1)}+a_{f(2)}+\cdots+a_{f(n)}$.

Qu'en est-il de la commutativité des sommes infinies ? Les résultats de cette section-ci et de la suivante répondent complètement à la question.

Définition 4.23. *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une bijection. La série* $\sum a_{f(n)}$ *est appelée un* réarrangement *de la série* $\sum a_n$.

Théorème 4.24. *Soit* $\sum a_n$ *une série absolument convergente. Tout réarrangement de cette série est convergente, avec la même limite.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Posons $b_i = a_{f(i)}$. Alors $\sum_{0\le i\le m} |b_i| = \sum_{0\le i\le m} |a_{f(i)}| \le \sum_{0\le i\le M} |a_i|$, où $M = \max\{f(0), f(1), \ldots, f(m)\}$. Par le lemme 4.7, cette dernière somme est $\le \sum |a_i|$, car cette série converge. Donc les sommes partielles de la série $\sum |b_n|$ sont bornées, et il s'ensuit que la série $\sum b_n$ converge absolument, donc elle converge (théorème 4.19).

Notons B_n, T_n, S_n les sommes partielles des séries $\sum b_n, \sum |a_n|, \sum a_n$, et T, S les somme des séries $\sum |a_n|, \sum a_n$. Il reste à montrer que $\sum b_n = S$. Soit $\epsilon > 0$. Par le critère de Cauchy (théorème 4.14), il existe N_1 tel que : (*) pour tout $n \ge N_1$ et tout k, on a $T_{n+k} - T_n = \sum_{n+1\le i\le n+k} |a_i| < \epsilon/2$. Il existe aussi N_2 tel que : (**) pour tout $n \ge N_2$, $|S_n - S| < \epsilon/2$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Comme f est une bijection, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\{0,1,\ldots,N\} \subset \{f(0), f(1), \ldots, f(M)\}$.

Alors pour tout $m > M$, on a $|B_m - S| = |B_m - S_N + S_N - S| \le |B_m - S_N| + |S_N - S|$. La deuxième valeur absolue est bornée par $\epsilon/2$, par (**). La première est égale à $|\sum_{0\le i\le m} a_{f(i)} - \sum_{0\le i\le N} a_i|$. A cause de l'inclusion ci-dessus, la somme $\sum_{0\le i\le N} a_i$ est incluse dans la somme $\sum_{0\le i\le m} a_{f(i)}$. La différence est donc égale à $\sum_{j\in J} a_j$, où J est l'ensemble des $j > N$ de la forme $j = f(i), i = 0, \ldots, m$. Sa valeur absolue est, par l'inégalité du triangle, $\le \sum_{j\in J} |a_j|$, et ceci est $\le \sum |a_j|$, où la somme est sur les j tels que $N+1 \le j \le \max\{f(i), i = 0, \ldots m\}$. Par (*), c'est $\le \epsilon/2$, puisque $N \ge N_2$. Finalement, on obtient que $|B_m - S| < \epsilon$. □

Finissons cette partie sur les séries par un théorème de Riemann, a priori surprenant.

Théorème 4.25. *Soit $\sum a_n$ une série convergente conditionnellement. Pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, il existe un réarrangement de cette série qui tend vers ℓ.*

Démonstration. Avec les notations précédant le théorème 4.20, on a : $\sum p_n = \infty, \sum q_n = -\infty$. Soit (a_{k_n}) la sous-suite des termes strictement positifs de la suite (a_n), et (b_{h_n}) la sous-suite de ses termes négatifs. On a donc $\sum_n a_{k_n} = \infty$ et $\sum_n a_{h_n} = -\infty$. De plus, comme $\sum a_n$ converge, on a $\lim a_n = 0$ et par suite, a_{k_n} et a_{h_n} tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

1) Prenons $\ell = \infty$. La sous-suite (a_{k_n}) tend vers l'infini. On peut donc trouver $k_0, k_1, \ldots, k_{n_0}$ tels que $a_{k_0} + a_{k_1} + \cdots + a_{k_{n_0}} + a_{h_0} \geq 1$. On choisit ensuite $k_{n_0+1}, k_{n_0+1}, \ldots, k_{n_1}$ tels que $a_{k_0} + a_{k_1} + \cdots + a_{k_{n_0}} + a_{h_0} + a_{k_{n_0+1}} + a_{k_{n_0+2}} + \cdots + a_{k_{n_1}} + a_{h_1} \geq 2$. On continue ainsi, et cela définit un réarrangement tel que la série réarrangée tend vers l'infini.

2) Le cas $\ell = -\infty$ est analogue.

3) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. □

Exercice 79. *On sait que la série $S = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1}/(n+1)$ est conditionnellement convergente. Soit ℓ sa limite. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} 1/(2k+1) - 1/(4k+2) - 1/(4k+4)$ converge vers $\ell/2$. Montrer que cette série est un réarrangement de S.*

Exercice 80. *On dit qu'une série est* commutativement convergente *si et seulement si tous les réarrangements de cette série ont la même limite finie. Montrer qu'une série est commutativemnt convergente si et seulement si elle est absolument convergente.*

5 Limites de fonctions et continuité

5.1 Fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a un domaine de définition D_f, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; elle associe a tout $x \in D_f$ un nombre réel y, noté $f(x)$: $y = f(x)$. On écrit

$$f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x).$$

On appelle D_f le *domaine de définition* de f.

5.2 Limite d'une fonction en un point

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on note

$$V(a,\epsilon) = (a-\epsilon, a+\epsilon), V'(a,\epsilon) = V(a,\epsilon) \setminus \{a\}.$$

La notation V peut se comprendre avec le mot "voisinage", utilisé en topologie : $V(a,\epsilon)$ est l'ensemble des réels qui sont "voisins" de a, qui sont à un distance de a inférieure à ϵ.

Définition 5.1. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a la limite ℓ en x_0, ou que f tend vers x_0 quand x tend vers x_0, si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V'(x_0,\eta), x \in D_f \Rightarrow f(x) \in V(\ell,\epsilon).$$

Notation : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. On dit aussi "en a" au lieu de "quand x tend vers a".

Ça s'écrit aussi comme suit : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x$, $0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Cette définition ne prend du sens que lorsque x_0 est un point d'accumulation de D_f, dont la définition suit.

Définition 5.2. *Soit $D \subset \mathbb{R}$. Un* point d'accumulation *de D est un réel a tel que pour tout $\epsilon > 0$, $V'(a,\epsilon)$ rencontre D.*

Si x_0 n'est pas un point d'accumulation de D_f, alors n'importe quel nombre réel est limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 : voir exercice 86).

Théorème 5.3. *La limite d'une fonction en un point d'accumulation de son domaine est unique.*

La preuve est très semblable à celle de l'unicité de la limite d'une suite (théorème 3.3), par l'application du corollaire 2.10. On remarquera où intervient l'hypothèse que x_0 est un point d'accumulation (si cette hypothèse n'est pas satisfaite, la limite n'est pas unique, voir l'exercice 86).

Démonstration. Soit ℓ_1, ℓ_2 seux nonbres réels, tous deux limite de $f(x)$ en x_0, point d'accumulation de D_f. Nous montrons que pour tout $\epsilon > 0$, $|\ell_1 - \ell_2| < \epsilon$; le corollaire 2.10 implique alors que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit donc $\epsilon > 0$; alors $\epsilon/2 > 0$. Donc, pour $i = 1, 2$, il existe δ_i tel que pour tout $x \in D_f \cap V'(x_0, \delta_i)$, on a $f(x) \in V(\ell_i, \epsilon/2)$. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Il existe $x \in D_f \cap V'(x_0, \delta)$. Alors $x \in V'(x_0, \delta_i)$ pour $i = 1$ et pour $i = 2$. Donc $f(x) \in V(\ell_i, \epsilon/2)$. On a donc $|f(x) - \ell_i| < \epsilon/2$, et enfin $|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \epsilon$. □

La notion de limite d'une fonction se ramène à celle de limite d'une suite.

Théorème 5.4. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et a un point d'accumulation de D_f. Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de $D_f \setminus \{a\}$ qui tend vers a, la suite $f(a_n)$ tend vers ℓ.*

Démonstration. 1) Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Soit (a_n) une suite d'éléments de $D_f \setminus \{a\}$ qui tend vers a. Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que pour tout $x \in V'(a,\delta)$, on a $f(x) \in V(\ell,\epsilon)$. Il existe N tel que pour tout $n > N$, $a_n \in V(a,\delta)$, et par suite, $a_n \in V'(a,\delta)$. En conséquence, $f(a_n) \in V(\ell,\epsilon)$.

2) Démontrons la contraposée : l'hypothèse que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a n'est pas ℓ, implique qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $D_f \setminus \{a\}$ qui tend vers a, et que la suite $(f(x_n)$ ne tend pas vers ℓ.

L'hypothèse ci-dessus implique qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in D_f \cap V'(a,\delta)$ tel que $f(x) \notin V(\ell,\epsilon)$. On applique cette propriété à chaque $\delta = 1/n$, pour chaque entier naturel non nul n. Il existe donc $x_n \in D_f \cap V'(a,1/n)$ tel que $f(x_n) \notin V(\ell,\epsilon)$. On a alors $|x_n - a| < 1/n$, et la suite x_n tend donc vers a. De plus, $|f(x_n] - \ell \geq \epsilon$, et la suite $f(x_n)$ ne tend donc pas vers ℓ. □

Exercice 81. *Montrer que $V'(a,\epsilon)$ est réunion disjointe de deux intervalles ouverts.*

Exercice 82. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit x un point d'accumulation de A ; montrer que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $V'(x,\delta) \cap A$ possède une infinité d'éléments.*

Exercice 83. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On suppose que x n'est pas un point d'accumulation de A ; montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $V'(x,\delta) \cap A = \emptyset$.*

Exercice 84. *Montrer que tout nombre réel est un point d'accumulation de l'ensemble Q.*

Exercice 85. *Déterminer quels sont les points d'accumulation de l'intervalle $[0,1)$.*

Exercice 86. *Avec les notations de la définition 5.1, supposons que x_0 n'est pas un point d'accumulation de D_f. Montrer que n'importe quel réel ℓ est limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0.*

5.3 Limite à gauche et à droite

Définition 5.5. *Soit a un point d'accumulation de $D_f \cap (a, \infty)$ (resp. de $D_f \cap (-\infty, a)$), et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est* limite à droite *(resp.* à gauche*) de $f(x)$ quand x tend vers a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap (a, a+\delta)$ (resp. $x \in D_f \cap (a-\delta, a)$), on a $|f(x] - \ell| < \epsilon$.*

Notations : $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.
Exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La limite à gauche en 0 est -1, et à droite c'est $+1$; la valeur en 0 de f (qui est b) ne joue pas de rôle pour ces limites.

Théorème 5.6. *La limite de $f(x)$ en a est ℓ si et seulement si les limites de $f(x)$ à droite et à gauche en a sont toutes deux égales à ℓ.*

La preuve est laissée en exercice. On laisse aussi en exercice l'énoncé d'un théorème pour les limites à droite, et pour les limites à gauche, d'un théorème analogue au théorème 5.4.

5.4 Limites en l'infini

Définition 5.7. *Soit $\ell \in R$. Soit f une fonction dont le domaine de définiiton n'est pas borné supérieurement (resp. inférieurement). On dit que $f(x)$ a la limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe A tel que pour tout $x > A$ (resp. $x < A$), $x \in D_f$ implique que $|f(x) - \ell| < \epsilon$.*

Notations : $\ell = \lim_{x\to\infty} f(x)$; $\ell = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
La restriction que le domaine n'est pas borné est l'analogue de la restriction que x_0 est un point d'accumulation du domaine (voir les définitions 5.1 et 5.2).

Théorème 5.8. *Dans les conditions de la définition 5.7, la limite est unique.*

5.5 Limites infinies

Les notations sont $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, ainsi que quelque autres variantes, incluant les limites à gauche et à droite en un point. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire tous les cas.

On a, par exemple

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall A, \exists \delta, \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A).$$

Proposition 5.9. *Soit n un entier naturel non nul. On a*

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty,$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair,} \\ +\infty & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

5.6 Opérations sur les limites

Théorème 5.10. *Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et a un point d'accumulation de D. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = F$ et $\lim_{x \to a} g(x) = G$. Alors*

a) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = F + G$;

b) $\lim_{x \to a} (fg)(x) = FG$;

c) $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = F/G$, sous l'hypothèse que g ne s'annule pas sur D et que $G \neq 0$.

Démonstration. On se ramène au théorème analogue sur les suites, en appliquant les théorèmes 5.4 et 3.8. □

5.7 Théorème des gendarmes

Théorème 5.11. *Soient trois fonction réelles f, g, h de domaine commun D. Soit a un point d'accumulation de D. On suppose que $\forall x \in D$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} h(x)$ existent et sont égales. Alors $\lim_{x \to a} g(x)$ existe aussi et elle est égale à cette limite.*

Démonstration. C'est une conséquence des théorèmes 5.4 et 3.11. □

Exercice 87. *Évaluer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$.

5.8 Continuité

Définition 5.12. *Soit une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in D_f$. On dit que f est* continue *en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $|x-a| < \delta$ implique $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.*

Si f n'est pas continue en $a \in D_f$, on dit que f est *discontinue* en a.

Définition 5.13. *Une fonction est dite* continue *si elle est continue en tout point de son domaine de définition.*

Théorème 5.14. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$, qui est point d'accumulation de D_f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) f est continue en a ;
b) la limite $f(x)$ en a est $f(a)$;
c) pour toute suite (a_n), d'éléments de D_f, qui tend vers a, la suite $(f(a_n))$ tend vers $f(a)$.

Démonstration. L'équivalence de a) et b), facile, est laissée au lecteur. L'équivalence de b) et c) se prouve de manière analogue au théorème 5.4. □

Exercice 88. *Montrer que f est continue en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(D_f \cap V(a,\delta)) \subset V(f(a),\epsilon)$.*

Exercice 89. *Soit $\eta > 0$. Montrer que dans la définition 5.12, on peut remplacer "pour tout $\epsilon > 0$" par "pour tout $\epsilon \in (0,\eta)$".*

Exercice 90. *On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ suivante, due à Dirichlet :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible avec } q \text{ positif.} \end{cases}$$

On veut montrer que f est continue aux points irrationnels, et discontinue aux points rationnels.

1) Soit a irrationnel dans $[0,1]$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de $\frac{p}{q} \in [0,1]$ tels que $q \leq \frac{1}{\epsilon}$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $V(a,\delta)$ ne contient aucune de ces fractions. En déduire que pour tout $x \in V(a,\delta]) \cap [0,1]$, $|f(x)| < \epsilon$, et que f est continue en a.

2) Soit $a = \frac{p}{q}$ rationnel. Alors $f(a) = \frac{1}{q}$. Soit $\epsilon = \frac{1}{q}$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe x irrationnel dans $D_f \cap (a-\delta, a+\delta)$. En déduire que $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.

5.9 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 5.15. *Soient f, g des fonctions, de même domaine et continues en a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f+g$, αf et fg sont continues en a. Si g ne s'annule pas sur D, alors f/g est continue en a.*

Démonstration. Ceci se déduit des théorèmes analogue sur les suites, et de la caractérisation de la continuité par les suites. □

Théorème 5.16. *Soit f, g des fonctions réelles. On suppose que $f(D_f) \subset D_g$, et on peut donc définir $g \circ f$. On suppose que f est continue en a, et que g est continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Soit $b = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en b, il existe $\delta > 0$ tel que $g(D_g \cap V(b,\delta)) \subset V(g(b), \epsilon)$. Comme f est continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que $f(D_f \cap V(a,\eta)) \subset V(f(a), \delta)$. Donc $f(D_f \cap V(a,\eta)) \subset f(D_f) \cap f(D_f \cap V(a,\eta)) \subset D_g \cap V(b,\delta)$. Alors $g \circ f(D_f \cap V(a,\eta)) = g(f(D_f \cap V(a,\eta)) \subset g(V(b,\delta) \cap D_g) \subset V(g(f(a)), \epsilon)$. □

Exercice 91. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0}(f(x+h) - f(x-h)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Est-ce que la fonction f est nécessairement continue ?*

Exercice 92. *Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0.*

Exercice 93. *Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ n'est continue qu'en 0.*

Exercice 94. *Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.*

Exercice 95. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions.*

1. *Montrer que* $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ *et que* $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.
2. *On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D$; montrer que* $\max\{f, g\}$ *et* $\min\{f, g\}$ *sont aussi continues en x_0.*

5.10 Maximum et minimum

Théorème 5.17. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors $c, d \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.*

On dit que f *atteint son minimum* et *atteint son maximum.* L'hypothèse que f est défini sur un intervalle fermé est importante. Pour tous autres intervalles, le théorème n'est pas vrai en général ; par exemple, la fonction $1/x$, définie sur $(0, \infty)$.

Démonstration. On considère $E = f([a, b])$, l'image de f. Alors E est non vide. Nous montrons que E est borné supérieurement. Par l'absurde : si ce n'est pas vrai, il existe pour tout n un $a_n \in [a, b]$ tel que $f(a_n) > n$: donc la suite $(f(a_n)$ tend vers l'infini. Par le théorème de Bolsano-Weierstrass (théorème 3.34), il existe une sous-suite (b_n), de la suite (a_n), qui converge vers une limite $\ell \in [a, b]$. Or, par le théorème 3.29, (b_n) tend vers l'infini : contradiction.

Comme E est borné supérieurement, il a un supremum, soit M. Celui-ci est la plus petite borne supérieure de E. Donc, pour tout n, il existe un élément de E qui est plus grand que $M - 1/n$; il existe donc $x_n \in [a, b]$ tel que $M - 1/n < f(x_n)$, et on a aussi $f(x_n) \leq M$: donc la suite $(f(x_n)$ tend vers M. Par le théorème de Bolsano-Weierstrass, il existe une sous-suite (y_n), de la suite (x_n), qui tend vers une limite $d \in [a, b]$. Alors $f(y_n)$ tend vers $f(d)$ (théorème 5.4). Mais $(f(y_n))$ est une sous-suite de la suite $(f(x_n))$; donc $(f(y_n))$ tend vers M (théorème 3.29). Par unicité de la limite, $f(d) = M$. Donc $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(d)$.

Pour le minimum, le raisonnement est analogue. $\square$

5.11 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.18. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et y un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. On peut supposer $f(a) < f(b)$. On considère l'ensemble E des x dans $[a, b]$ tels que $f(x) \leq y$. Alors E est non vide, car a est dans E.

De plus, E est borné, car $E \subset [a,b]$. Soit $c = \sup(E)$. Alors $c \leq b$, car c est la plus petite borne supérieure de E. De plus $a \leq c$. Donc $c \in [a,b]$.

Nous montrons que $f(c) = y$. Pour tout n, $c - 1/n$ n'est pas une borne supérieure de E, donc il existe $x_n \in E]$ tel que $c - 1/n < x_n$; comme $x_n \in E$, on a $x_n \leq c$. Alors x_n tend vers c, donc $f(x_n)$ tend vers $f(c)$, et comme $f(x_n) \leq y$, par passage à la limite, $f(c) \leq y$.

Par l'absurde, supposons que $f(c) < y$; posons $\epsilon = y - f(c)$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $f([a,b] \cap V(c,\delta)) \subset V(f(c),\epsilon)$. Comme $c < b$, il existe $x \in [a,b] \cap V(c,\delta)$ tel que $c < x$. On a alors $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, donc $f(x) - f(c) < \epsilon = y - f(c)$, donc $f(x) < y$, d'où $x \in E$. Mais $c < x$: contradicton. □

Corollaire 5.19. *1) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

2) L'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.

Démonstration. 1) Cela découle de l'exercice 25 et du théorème des valeurs intermédiaires.

2) On utilise 1) et le théorème 5.17. □

Exercice 96. *Montrer que le polynôme* $x^3 - 2x^2 + 1$ *a une racine dans l'intervalle* $(-1, 0)$.

Exercice 97. *Montrer qu'un polynôme de degré impair a une racine dans* $\mathbb{R}$. *Utiliser la proposition 5.9 et le théorème des valeurs intermédiaires.*

Exercice 98. *Soit* $a > 0$ *et* n *un entier naturel non nul. Montrer que la fonction* $f(x) = x^n - a$, *de domaine* $[0,\infty)$, *satisfait* $f(0) < 0$ *et* $f(c) > 0$ *pour* $c > 0$ *bien choisi. En déduire que* a *a une racine* n*-ème dans* $[0,\infty)$.

5.12 Continuité uniforme

Définition 5.20. *Une fonction* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *est* uniformément continue *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tous* $x \in D_f$, $|x - y| < \delta$ *implique* $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Ici, δ ne dépend ni de x ni de y, contrairement à la définition de continuité en un point. La fonction $x \mapsto |x|$ est uniformément continue, car $||x| - |y|| \leq |x - y|$, et on peut donc prendre $\delta = \epsilon$.

Théorème 5.21. *Une fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. Laissée au lecteur. □

La réciproque n'est pas vraie, sauf avec une hypothèse supplémentaire.

Théorème 5.22. *Toute fonction continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par l'absurde : supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$ tels que $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. En choisissant $\delta = 1/n$, on trouve x_n, y_n tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Par le théorème de Bolsano-Weierstrass (plus précisément l'exercice 57), il existe une suite (k_n) strictement croissante d'entiers naturels telle que les deux suites (x_{k_n}) et (y_{k_n}) convergent, vers x et y respectivement. On a $|x_{k_n} - y_{k_n}| < 1/k_n$, donc par passage à la limite, $x = y$. Comme f est continue, les suites $(f(x_{k_n}))$ et $(f(y_{k_n}))$ convergent, vers $f(x) = f(y)$. Mais l'inégalité $|f(x_{k_n})) - f(y_{k_n})| \geq \epsilon$ donne, par passage à la limite, que $|x - y| \geq \epsilon$: contradiction. $\square$

Théorème 5.23. *Soit f une fonction uniformément continue et a un point d'accumulation de son domaine D, avec $a \notin D$. Alors la limite ℓ de f en a existe, et on peut prolonger f en a en une fonction continue en posant $f(a) = \ell$.*

Démonstration. Nous montrons l'existence de ℓ tel que pour tout suite (x_n) d'éléments de D_f, qui tend vers a, la suite $f(x_n)$ tend vers ℓ. Le théorème découle alors du théorème 5.4.

Soit donc (x_n) une telle suite. Soit $\epsilon > 0$, et δ comme dans la définition 5.20. Comme la suite est une suite de Cauchy, il existe N tel que pour tout $n, p > N$, on ait $|x_n - x_p| < \delta$. Alors $|f(x_n) - f(x_p)| < \epsilon$. Donc $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc, vers une limite que nous notons ℓ.

Soit (y_n) une autre suite qui tend vers a. Il existe donc ℓ', qui est la limite de la suite $(f(y_n))$. Montrons que $\ell = \ell'$, en utilisant le corollaire 2.10. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/3$. Comme x_n et y_n tendent tous deux vers a, que $f(x_n)$ tend vers ℓ et que $f(y_n)$ tend vers ℓ', il existe N tel que : $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \delta/2$, $|y_n - a| < \delta/2$, $|f(x_n) - \ell| < \epsilon/3$, et $|f(y_n) - \ell'| < \epsilon/3$. Pour un tel n, on a $|x_n - y_n| < \delta$, d'où $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon/3$; donc $|\ell - \ell'| = |\ell - f(x_n) + f(x_n) - f(y_n) + f(y_n) - \ell'| < \epsilon$. $\square$

Exercice 99. *Une fonction est* lipschitzienne *de rapport k si pour tous x, y dans son domaine, on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Montrer qu'une telle fonction est uniformément continue.*

Exercice 100. *Montrer que la fonction $f(x) = \sin x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 101. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 102. *Monter que la fonction* $\cos(\frac{1}{x})$ *n'est pas uniformément continue sur l'intervalle* $(0, 1)$.

5.13 Fonction réciproque

Théorème 5.24. *Soit* $f : I \to R$ *une fonction continue strictement monotone, où* I *est un intervalle fermé (resp. ouvert non vide) de* $\mathbb{R}$. *Alors*

a) f *est une bijection de* I *vers* $f(I)$, $f(I)$ *est un intervalle fermé (resp. ouvert), et la fonction réciproque* $f^{-1} : f(I) \to I$ *existe.*

b) f^{-1} *est strictement croissante (resp. décroissante) si* f *l'est.*

c) f^{-1} *est continue.*

Il existe une extension de ce théorème aux intervalles semi-ouverts ; nous laissons au lecteur le soin de la formuler.

Démonstration. a) f est injective car elle est strictement monotone. Elle est aussi surjective de I vers $f(I)$. Celui-ci est un intervalle, par le corollaire 5.19 1). Si I est fermé, $f(I)$ est un intervalle fermé par le corollaire 5.19 2).

Si $I = (a, b)$ est ouvert, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, posons $c = \inf(f(I))$ si cet infimum existe, sinon $c = -\infty$; et $d = \sup(f(I))$ si ce supremum existe, sinon $d = \infty$. Montrons que $f(I) = (c, d)$, et supposons f croissante, sans perte de généralité. On ne peut avoir $c \in f(I)$, sinon $c \in \mathbb{R}$, $c = f(u)$, $u \in (a, b)$, et il existe alors $v \in (a, b)$, tel que $v < u$ et $f(v) < f(u) = c$, contredisant que c est une borne inférieure de $f(I)$. De même, $d \notin f(I)$. Il s'ensuit que $f(I) = (c, d)$.

Enfin, f est une bijection de I vers $f(I)$, et la fonction réciproque existe.

b) Supposons f croissante et $y < y'$, $y, y' \in f(I)$. Il existe x, x' tels que $f(x) = y, f(x') = y'$. On ne peut pas avoir $x \geq x'$ car, f étant croissante, cela impliquerait $y = f(x) \geq f(x') = y'$. Donc $x < x'$, c'est-à-dire $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Donc f^{-1} est strictement croissante.

c) Supposons que f est croissante. Supposons que I est ouvert (le cas I fermé est omis). Donc $I = (a, b), f(I) = (c, d)$, avec a, b, c, d comme expliqué en a). Soit $y_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(y_0 \in (a, b)$, autrement dit, $y_0 = f(x_0)$. Notons $\eta = \min(x_0 - a, b - x_0) > 0$. Soit $\epsilon > 0$. Par l'exercice 89, on peut supposer $\epsilon < \eta$. Alors $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$. D'après a), $f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))$ est un intervalle ouvert ; il contient $y_0 = f(x_0)$, donc il est de la forme $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, donc $f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset f^{-1}((y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Donc f^{-1} est continue en y_0. □

Exercice 103. *Montrer que si une fonction f est croissante, alors $-f$ est décroissante.*

Exercice 104. *Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}, \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, est continue.*

Exercice 105. *1) Sachant que $|\sin\theta| \leq |\theta|$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (ce qu'on peut montrer géométriquement), montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0. Indication : pour le cosinus, utiliser la formule $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ valable au voisinage de $x = 0$.*

2) En utilisant le numéro précédent et les identités trigonométriques $\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\sin\phi + \cos\phi\sin\theta$ et $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$, ainsi que $\cos(\theta) = \sin(\pi/2-\theta)$, montrer que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 106. *On veut montrer qu'une fonction continue injective est strictement monotone. Soit donc $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition est un intervalle I.*

1) Montrer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que si $x < y < z$ et, soit $f(x) < f(y) > f(z)$, soit $f(x) > f(y) < f(z)$, alors f n'est pas injective.

2) On suppose f injective. Déduire de 1) que si $a < b < c < d$ et $f(b) < f(c)$, alors $f(a) < f(b)$ et $f(c) < f(d)$.

3) En déduire que s'il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) < f(y)$, alors f est strictement croissante.

4) Que se passe-t-il lorsque D_f est la réunion de plusieurs intervalles ? Exemple : la fonction $1/x^2$.

6 La dérivée

6.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 6.1. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$ un point d'accumulation de son domaine D_f. On dit que f est* dérivable au point *a si la limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On note $f'(a)$ cette limite, et on l'appelle la* dérivée *de f en a.*

Si f est dérivable en tout point de son domaine, on dit que f est dérivable. *Dans ce cas, la dérivée est une fonction $f' : D_f \to \mathbb{R}$.*

On dit aussi *différentiable* au lieu de dérivable.

Exercice 107. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver $f'(0)$.*

Exercice 108. *Trouver une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est dérivable partout sauf aux points 0,1,2,...,n.*

6.2 Tangente

La quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite qui passe par les deux points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ sur la courbe représentant la fonction f. Une telle droite s'appelle une *sécante* à la courbe. Lorsque x s'approche de a, on "voit" que la sécante "s'approche" de la tangente à la courbe au point $(a, f(a)$. C'est pourquoi on dit que $f'(a)$ est la *pente de la tangente* à la courbe au point $(a, f(a))$.

6.3 La dérivabilité implique la continuité

Théorème 6.2. *Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.*

Démonstration. On a $f(x) = f(a) + (x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si $f'(a)$ existe, on déduit que la limite de $f(x)$, quand x tend vers a, est $f(a)$. Donc f est continue en a (theorem 5.14). □

6.4 Opération sur les fonctions dérivables

Théorème 6.3. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables en a, point d'accumulation de D, et α un réel.*

a) αf et $f+g$ sont dérivables en a, et $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

b) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (formule de Leibniz) ;

c) si g ne s'annule pas, f/g est dérivable en a est $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. b) On a $\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Comme g est continue en a, et que f, g sont dérivables en a, la limite quand x tend vers a de cette quantité est $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

c) Suposons d'abord que $f(x) = 1$, et il s'agit donc de calculer la dérivée en a de $1/g$. On a $\frac{(1/g)(x)-(1/g)(a)}{x-a} = \frac{1/g(x)-1/g(a)}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, dont la limite est $\frac{-g'(a)}{g(a)^2}$, quand x tend vers a.

Le cas général se déduit facilement de ce cas particulier et de la formule de Leibniz. $\square$

Corollaire 6.4. *Si f ne s'annule pas et si elle dérivable en a, alors $1/f$ est dérivable en a et $(1/f)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$.*

Théorème 6.5. *(règle de la chaîne) Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, dérivable en a, point d'accumulation de D, et $g : D_g \to \mathbb{R}$ telle que $f(D_f) \subset D_g$ (donc $g \circ f$ est définie), dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = (g' \circ f)(a)f'(a)$.*

Notons que $f(a)$ est un point d'accumulation de D_g.

Démonstration. On définit $h : D_g \to \mathbb{R}$ par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} - g'(f(a)) & \text{si } y \neq f(a) \\ 0 & \text{si } y = f(a) \end{cases}$$

Comme g est dérivable en $f(a)$, on a $\lim\limits_{y \to f(a)} h(y) = 0$, donc h est continue en $f(a)$. Par suite $h \circ f$ est continue en a (théorème 5.16), et $\lim\limits_{x \to a} h \circ f(x) = 0$. On a $h(y)(y - f(a)) = g(y) - g(f(a)) - g'(f(a))(y - f(a))$. Avec $y = f(x)$, ça nous donne $h(f(x))(f(x) - f(a)) = g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x) - f(a))$. Par suite $\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = h(f(x))\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + g'(f(a))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Quand x tend vers a, le membre droit tend vers $g'(f(a))f'(a)$, et on obtient le théorème. $\square$

Exercice 109. *Sachant que les fonctions constantes, et la fonction x, sont dérivables (ce qu'on peut démontrer facilement), montrer que tout polynôme est une fonction dérivable, ainsi que toute fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) sur son domaine de définition.*

Exercice 110. *Montrer que f^n est dérivable, si f est dérivable, et calculer la formule (récurrence sur n) ; même chose pour $n < 0$, en supposant que f ne s'annule pas.*

Exercice 111. *Montrer que la composée de n fonctions dérivables est une fonction dérivable, et calculer la formule de dérivation (récurrence sur n).*

Exercice 112. *Montrer que si f, g sont deux fois dérivables, alors leur composée aussi, et calculer la formule.*

Exercice 113. *On définit par récurrence $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = e^{f_n(x)}$. Calculer la dérivée des f_n. Indication : la dérivée de e^x est e^x.*

6.5 Fonction réciproque

Théorème 6.6. *Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone (donc $f(a,b)$ est un intervalle ouvert et la fonction réciproque $f^{-1} : f((a,b)) \to \mathbb{R}$ est continue, théorème 5.24). Si $y_0 = f(x_0) \in f((a,b))$ est tel que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$.*

Démonstration. Posons $F(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ si $x \neq x_0$, et $F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Donc F est continue en x_0. Donc $F \circ f^{-1}$ est continue en y_0, ce qui implique que $\lim\limits_{y \to y_0} F \circ f^{-1}(y) = F \circ f^{-1}(y_0) = F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, car $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Mais $F \circ f^{-1}(y) = \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$, d'où le théorème. □

Exemple La fonction $x \mapsto y = x^n$ ($n > 0$ entier naturel), de $(0,\infty)$ dans lui-même, satisfait aux hypothèses. La fonction réciproque est $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{1/n} = x$, dont la dérivée en y est $\frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}(\frac{1}{(y^{1/n})})^{n-1} = \frac{1}{n} y^{1/n-1}$.

Exercice 114.

Montrer que la fonction $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \tan x$ est bijective. Montrer de plus que sa réciproque $\arctan x := f^{-1}(x)$ est dérivable, et qu'elle vaut $\frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 115. *1) Sachant que $|\theta| \leq |\tan\theta|$ pour $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (ce qu'on peut montrer par un argument géométrique), montrer, en utilisant le théorème des gendarmes et l'exercice 105, que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.*

En déduire que la dérivée de $\sin(x)$ en 0 existe et vaut 1. Puis que celle de $\cos(x)$ en 0 est 0. Indications : utiliser les théorèmes 6.5 et 6.6.

2) À l'aide des identités trigonomériques (voir l'exercice 105), montrer que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont dérivables.

6.6 Extrema

Définition 6.7. *Un* maximum *(resp.* minimum*)* local *d'une fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *est un point* $a \in D$ *tel qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in D \cap (a-\delta, a+\delta)$*,* $f(x) \leq f(a)$ *(resp.* $f(x) \geq f(a)$*).*

Un extremum local *de* f *est un maximum local, ou un minimum local, de* f*.*

Théorème 6.8. *(Fermat) Soit* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *une fonction. Si* f *a un extremum local* $x_0 \in (a,b)$*, et si* f *est dérivable en* x_0*, alors* $f'(x_0) = 0$*.*

Démonstration. Supposons que l'extremum soit un maximum. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x) \leq f(x_0)$. On en déduit que pour $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Il s'ensuit que la limite à gauche, quand x tend vers x_0, de cette quantité, est ≥ 0. De manière analogue, la limite à droite est ≤ 0. Donc, par le théorème 5.6 , la limite est nulle ; c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$

Pour un minimum, c'est analogue, ou alors on utilise $-f$. □

L'interprétation géométrique, avec la sécante, de ce résultat, est particulièrement frappant.

Exercice 116. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Si* $f'(a) < 0 < f'(b)$ *(resp.* $f'(a) > 0 > f'(b)$*), montrer qu'il existe* $x \in (a,b)$ *tel que* $f'(x) = 0$*. Indications :* f *possède un minimum (resp. un maximum) dans* $[a,b]$*. Montrer qu'il doit être dans dans* (a,b) *: dans le premier cas, s'il est en* a*, il y a d'après l'hypothèse des* x *proches de* a *tels que* $f(x) < f(a)$*, contradiction. Utiliser le théorème 6.8.*

6.7 Théorème de Rolle

Théorème 6.9. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, avec* $a < b$*, dérivable en tout point de* (a,b)*. Si* $f(a) = f(b)$*, alors il existe* $c \in (a,b)$ *tel que* $f'(c) = 0$*.*

Démonstration. Par le corollaire 5.19, $f([a,b]) = [m, M]$. Si $m = M$, alors f est constante, et par suite $f'(c) = 0$ pour tout c dans (a,b). Sinon, on a $m < M$, et on doit avoir soit $m < f(a)$, soit $f(a) < M$. Supposons qu'on ait le deuxième cas. Alors $M = f(c)$, $c \in (a,b)$, $f(c) > f(a) = f(b)$, donc c'est un maximum local. Par le théorème 6.8, $f'(c) = 0$. Le premier cas est analogue. □

Exercice 117. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, avec $a < b$, dérivable en tout point de (a,b). On suppose qu'il y a deux racines $r < s$ consécutives de l'équation $f'(x) = 0$. Montrer que dans l'intervalle (r,s), il y a au plus une solution de l'équation $f(x) = 0$.*

En déduire que l'équation $2x^4 - 3x^2 + k = 0$ a au plus une solution dans l'intervalle $(0, \sqrt{3}/2)$.

6.8 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.10. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$, dérivable en tout point de (a,b). Il existe $c \in (a,b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Ce théorème a aussi une interprétation géométrique, ainsi que le théorème de Rolle, qu'il généralise, et utilise dans sa preuve.

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction $f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. □

Corollaire 6.11. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable en tout point de (a,b). Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in (a,b)$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Démonstration. Si $x, y \in [a,b]$, $x < y$, alors il existe $c \in (x,y) \subset (a,b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Si $f'(c) > 0$, alors $f(x) < f(y)$. □

Corollaire 6.12. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, dérivable en tout point de (a,b). Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a,b)$, alors f est constante.*

Démonstration. Si $x, y \in [a,b]$, $x < y$, alors il existe $c \in (x,y) \subset (a,b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Donc $f(x) = f(y)$. □

Exercice 118. *Montrer que si deux fonctions ont même dérivée, alors leur différence est une fonction constante.*

Exercice 119. *Montrer que l'équation $\cos x = x^2$ possède exactement deux solutions.*

Exercice 120. *Montrer qu'une fonction dérivée satisfait au théorème des valeurs intermédiaires (*théorème de Darboux*). Indication : utiliser l'exercice 116.*

Exercice 121. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* (a,b)*. Si* $f'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in (a,b)$*, montrer que soit* f' *prend seulement des valeurs strictement positives dans* (a,b)*, soit elle prend seulement des valeurs strictement négatives dans* (a,b)*. En conclure que* f *est strictement monotone. Indication : utiliser l'exercice 116.*

6.9 Théorème de la moyenne de Cauchy

Théorème 6.13. *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions, avec* $a < b$*, dérivables en tout point de* (a,b)*, avec* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in (a,b)$*. Il existe* $c \in (a,b)$ *tel que* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$*.*

Démonstration. D'après le théorème de Rolle, $g(a) \neq g(b)$. On applique le théorème de Rolle à $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. □

6.10 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Lorsqu'une fonction est dérivable sur son domaine de définition, on obtient la fonction dérivée f' de même domaine. On peut continuer ainsi, et on définit la *dérivée seconde* f'', ..., la *dérivée* n*-ème*. Notation : $f^{(n)}$. Si celle-ci existe, on dit que f est n *fois dérivable*.

Théorème 6.14. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* n *fois dérivable sur* $[a,b]$*. Pour tout* $x \in (a,b]$*, existe alors* $c \in (a,x)$ *tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Démonstration. Avec x comme dans l'énoncé, considérons la fonction de la variable $t \in [a,b]$: $F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}$ et $G(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$. On a $F'(t) = -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $G'(t) = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

On a $F(x) = G(x) = 0$. D'après le théorème 6.13 (avec a, b remplacés par a, x) il existe donc $c \in (a,x)$ tel que $\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$. On en déduit $F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)}G(a) = -f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-a)^n}{n!}(-\frac{(n-1)!}{(x-c)^{n-1}}) = f^{(n)}(c)\frac{x-a}{n!}$. D'où la formule. □

Exercice 122. *Ecrire la formule de Taylor pour la fonction* $\sin(x)$*, avec* $n = 5$*,* $a = 0$ *et* $x \geq 0$*. En déduire que* $\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$*.*

Exercice 123. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Exercice 124.

Donner une formule pour la dérivée n-ème de la fonction $f(x) = x \sin x$.

6.11 Règle de l'Hôpital

Théorème 6.15. *Soient f, g deux fonctions dérivables sur (a, b), où $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \infty$. Soit $x_0 = a$ ou b, ou $x_0 \in (a, b)$. On suppose que :*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ *(resp. $= \infty$) ;*

b) $g(x), g'(x) \neq 0$ *pour tout $x \in (a, b)$;*

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Démonstration. □

7 Topologie de $\mathbb{R}$

7.1 Ouverts

Définition 7.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un point x de E est appelé* point intérieur *de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $(x - \delta, x + \delta) \subset E$. On note int$(E)$ l'ensemble des points intérieurs de E, et appelé l'*intérieur *de E. Un ensemble est dit* ouvert *s'il est égal à son intérieur.*

Théorème 7.2. *(i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts.*

(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration. □

Exercice 125. *Montrer que x est un point intérieur de E si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que $[x - \delta, x + \delta] \subset E$.*

Exercice 126. *Montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert.*

7.2 Fermés

Définition 7.3. *Un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *est un* fermé *si son complémentaire est ouver.*

Théorème 7.4. *(i)* $\emptyset$ *et* $\mathbb{R}$ *sont des fermés.*
(ii) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
(iii) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Démonstration. □

Théorème 7.5. *Un ensemble est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.*

Démonstration. Supposons que E soit fermé. On sait que $F = \mathbb{R} \setminus E$ est ouvert. Soit x un élément de F. Il existe $\delta > 0$ tel que $(x - \delta, x + \delta) \subset F$, et par suite $(x - \delta, x + \delta)$ ne rencontre pas E ; donc x n'est pas un point d'accumulation de E. Donc tout point d'accumulation de E est dans E.

Réciproquement, supposons que E contienne tous ses points d'accumulation. Donc pour tout $x \in F$, x n'est pas un point d'accumulation de E ; il existe donc $\delta > 0$ tel que E ne rencontre pas $V'(x, \delta)$; comme $x \in F$, E ne rencontre pas $V(x, \delta)$, et donc $V(x, \delta) \subset F$; F est donc ouvert. □

Corollaire 7.6. *Un ensemble* E *est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de* E *est dans* E*.*

Démonstration. Supposons que la limite de toute suite convergente d'éléments de e est dans E. Tout point d'accumulation de E est la limite d'une suite dont tous les termes sont dans E. Donc la condition du corollaire implique, avec le théorème, que E est fermé.

Réciproquement, supposons E fermé. Soit (x_n) convergeant vers x, $x_n \in E$ pour tout n. Si $x \notin E$, alors x n'est pas un point d'accumulation de E, par le théorème. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ne rencontre pas E. On il existe n tel que $|x - x_n| < \epsilon$. Comme $x_n \in E$, on a une contradiction. □

Exercice 127. *Montrer qu'un intervalle fermé est un fermé. Montrer que* $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ *sont fermés (*$a, b \in \mathbb{R}$*).*

Exercice 128. *On considère le sous-ensemble* $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ *de* $\mathbb{R}$*. Montrer qu'il est fermé.*

Exercice 129. *Montrer que si* F *est fermé et borné, alors son supremum est dans* F*.*

7.3 Adhérence et frontière

Définition 7.7. *x est un* point d'adhérence *de E si pour tout $\delta > 0$, $V(x, \delta)$ rencontre E.*

On appelle adhérence *de E l'ensemble de ses points d'adhérence. Notation : $\bar{E}$.*

Théorème 7.8. *Un point d'adhérence de E soit est dans E, soit est un point d'accumulation de E, et vice-versa. Autrement dit : $\bar{E} = E \cup E'$, où E' est l'ensemble des points d'accumulation de E.*

Notez que la réunion n'est pas disjointe en général : il peut y avoir des points de E qui sont des points d'accumulation de E..

Démonstration. Si x est un point d'adhérence, alors pour tout $\delta > 0$, $V(x, \delta)$ rencontre E. Si ce n'est pas un point d'accumulation, il existe $\delta > 0$ tel que E ne rencontre pas $V'(x, \delta)$; dans ce cas on doit avoir $x \in E$.

Réciproquement, tout élément de E est un point d'adhérence. Et tout point d'accumulation de E est aussi un point d'adhérence. □

Théorème 7.9. $\mathbb{R} \setminus \bar{E} = int(\mathbb{R} \setminus E)$.

Démonstration. $\subset$: soit $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{E}$; alors x n'est pas adhérent à E, donc il existe $\delta > 0$ tel que E ne rencontre pas $V(x, \delta)$; donc $V(x, \delta) \subset \mathbb{R} \setminus E$, et par suite $x \in int(\mathbb{R} \setminus E)$.

$\supset$: soit $x \in int(\mathbb{R} \setminus E)$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $V(x, \delta) \subset \mathbb{R} \setminus E$; donc E ne rencontre pas $V(x, \delta)$, et x n'est pas un point d'adhérence de E. □

Corollaire 7.10. *$\bar{E}$ est fermé et $int(E)$ est ouvert.*

Démonstration. Il suffit de prouver la deuxième assertion, par le théorème 7.9.

Si $x \in int(E)$, il existe $\delta > 0$ tel que $V(x, \delta) \subset E$. Alors, pour tout $y \in V(x, \delta/2)$, $V(y, \delta/2) \subset V(x, \delta) \subset E$, donc $y \in int(E)$. Donc $V(x, \delta/2) \subset int(E)$, ce qui prouve que $int(E)$ est ouvert. □

Définition 7.11. *La* frontière *de E est $\partial(E) = \bar{E} \setminus int(E)$.*

Proposition 7.12. *$\partial(E) = \bar{E} \cap \bar{F}$, où F est le complément de E.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\bar{F} = \mathbb{R} \setminus int(E)$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus in(F)$, alors $x \notin int(E)$. Soit $\delta > 0$ quelconque. Alors $V(x, \delta)$ n'est pas contenu dans E. Donc $V(x, \delta)$ rencontre F. Par suite, $x \in \bar{F}$.

Réciproquement, si $x \in \bar{F}$, alors pour tout $\delta > 0$, $V(x, \delta)$ rencontre F. Donc aucun $V(x, \delta)$ n'est contenu dans E. Donc $x \notin int(E)$. Par suite $x \in \mathbb{R} \setminus int(F)$. □

Exercice 130. *Montrer que l'adhérence de E est égal à l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de E.*

Exercice 131. *Montrer qu'un sous-ensemble de R est dense dans R si et seulement si son adhérence est égale à R.*

7.4 Compacts

Définition 7.13. *Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est dit* compact *si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une suite convergente vers un élément de E.*

Théorème 7.14. *K est compact si et seulement si K est fermé et borné.*

Démonstration. Supposons K fermé et borné. Soit (a_n) une suite telle que $\forall n, a_n \in K$. Comme K est borné, la suite est bornée. D'après le théorème 3.34, elle possède une sous-suite convergente. La limite de celle-ci est dans K car K est fermé (corollaire 7.6). Donc K est compact.

Supposons que K ne soit pas borné. Il existe alors une suite qui tend vers $\pm\infty$. Donc toute sous-suite tend aussi vers $\pm\infty$. Donc K n'est pas compact.

Supposons que K ne soit pas fermé. Il existe alors une suite convergente d'éléments de K dont la limite n'est pas dans K (corollaire 7.6). Donc toute sous-suite tend aussi vers cette limite. Donc K n'est pas compact. □

Exercice 132. *Quels sont les intervalles compacts ?*

Exercice 133. *Montrer que l'ensemble des termes d'une suite convergente, auquel on ajoute sa limite, est compact.*

7.5 Théorème de Heine-Borel

Définition 7.15. *Un* recouvrement *d'un ensemble K est une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ensembles telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. On dit qu'il est* fini *si I est fini. Un* recouvrement extrait *(ou un* sous-recouvrement*) du précédent est un recouvrement de la forme $(U_j)_{j \in J}$, où $J \subset I$.*

Un recouvrement par des ouverts *de E est un recouvrement tel que chaque U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Théorème 7.16. *Un ensemble K est compact si et seulement si de tout recouvrement par des ouverts de K, on peut extraire un recouvrement fini.*

Démonstration. Si K n'est pas borné, alors $((-n, n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement par des ouverts de K, dont on ne peut extraire aucun recouvrement fini.

Si K n'est pas fermé, il a un point d'accumulation $x \notin K$. Alors $(\mathbb{R} \setminus [x - \delta, x + \delta])_{\delta>0}$ est un recouvrement de K par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un recouvrement fini.

Supposons maintenant que K est compact ; donc K est fermé et borné (théorème 7.14). Soit $\mathcal{O} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. Par l'absurde supposons qu'il n'ait pas de sous-recouvrement fini. Comme K est borné, il existe un intervalle fermé $[a, b]$ qui contient K. Soit m le milieu de cet intervalle. Clairement $\mathcal{O}$ est aussi un recouvrement de $K \cap [a, m]$ et de $K \cap [m, b]$. Comme K est la réunion de ces deux ensembles, l'un au moins n'a pas de sous-recouvrement fini. On répète cette dichotomie, et on trouve donc une suite croissante a_n et une suite décroissante b_n telle que : 1) $a_0 = a, b_0 = b$; 2) $b_n - a_n = (b - a)/2^n$; 3) $\mathcal{O}$ est un recouvrement de $E \cap [a_n, b_n]$ qui n'a pas de sous-recouvrement fini.

Comme a_n et b_n sont des suites monotones bornées, elles ont chacune une limite, et par 2), c'est la même limite, soit ℓ. Par 3), qui implique que $E \cap [a_n, b_n]$ est non vide, il existe $e_n \in E \cap [a_n, b_n]$; par le théorème des gendarmes, e_n tend aussi vers ℓ. Comme E est fermé, $\ell \in E$ (grâce au corollaire 7.6). Comme $\mathcal{O}$ est un recouvrement de E, il existe $i \in I$ tel que $U = U_i$ contient ℓ. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $V(\ell, \delta) \subset U$. Choisissons n tel que $b_n - a_n = (b - a)/2^n < \delta$. Puisque $\ell \in [a_n, b_n]$ (parce que pour tous $p \geq n, e_p \in [a_p, b_p] \subset [a_n, b_n]$, cette dernière inclusion découlant de $a_p \geq a_n, b_p \leq b_n$, et en utilisant le passage à la limite quand $p \to \infty$), on a $|\ell - a_n| = \ell - a_n < b_n - a_n < \delta$ et de même, $|b_n - \ell| < \delta$. Donc $[a_n, b_n] \subset V(\ell, \delta) \subset U$. Donc $E \cap [a_n, b_n] \subset U$, et cela contredit 3). □

8 Solutionnaire (esquisses)

1 Non, non, non.

4 Récurrence sur n. Cas de base $n = 1$: évident. Si $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0$, alors soit $a = x_1 + \cdots + x_n$ et $b = x_{n+1}$; on a alors $a + b = 0$. Si $a > 0$, alors en ajoutant b, on trouve $a + b > b \geq 0$, donc $a + b > 0$: contradiction. Donc $a = 0$. Par hypothèse de récurrence, les x_i sont nuls, pour $i = 1, \ldots, n$; donc $x_{n+1} = 0$ aussi.

6 Faux.

7 $(0,1)$.

8 Infimum : 0 ; supremum et maximum : 1 ; pas de minimum.

9 A : l'infimum est 0, le supremum est 1. B : l'infimum est 0, le supremum est $3/2$.

10 Par hypothèse, il existe $x \in A \cap B$. Comme $\inf(A)$ est une borne inférieure de A, et que $x \in A$, on a $\inf(A) \leq x$. Symétriquement, $x \leq \sup(B)$. Donc $\inf(A) \leq x \leq \sup(B)$.

11 1. $\inf(A)$ est une borne inférieure de A, donc de $A \cap B$; celui-ci étant non vide, a un infimum, qui est $\geq \inf(A)$; de même il est $\geq \inf(B)$.

2. $A = \{0,2\}, B = \{1,2\}$.

12 1. Tout $y \in B$ est une borne supérieure de A ; donc, A, B étant non vides, A a un supremum, qui est le minimum de ses bornes supérieures, et donc $\sup(A) \leq y$, $\forall y \in B$.

2. Donc $\sup(A)$ est une borne inférieure de B, et par suite, $\inf(B)$ existe et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

13 Soit $x \in A \cap B$; alors $\inf(A) \leq x \leq \sup(B)$.

14 $E = (-1, 3)$, donc $\inf(E) = -1, \sup(E) = 3$.

16 Aucune somme de 1 plusieurs fois avec lui-même n'est nulle (exercice 4). Maintenant, si deux sommes distinctes donnaient le même résultat, on trouverait que leur différence est nulle, et ça contredirait ce qu'on vient de voir. Donc $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est injective.

2. Supposons $i(n) = i(p)$, $n, p \in \mathbb{Z}$. On peut supposer $n \leq p$. On a $i(p-n) = 0$, donc par la première partie, $n - p = 0$, car $p - n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $i(a+b) = i(a) + i(b)$ et $i(ab) = i(a)i(b)$. Cela se prouve d'abord pour $a, b \in \mathbb{N}$ par récurrence, Puis on l'étend à tout $\mathbb{Z}$ en utilisant la règle des signes. On en déduit $i(a-b) = i(a) - i(b)$.

4. Supposons que $i(p/q) = i(p'/q')$. Alors $i(p)i(q)^{-1} = i(p')i(q')^{-1}$, donc $i(p)i(q') = i(p')i(q)$.Donc par 3, $i(pq' - p'q) = i(pq') - i(p'q) = i(p)i(q') - i(p')i(q) = 0$; donc par 2, $pq' - pq' = 0$; par suite, dans $\mathbb{Q}$ on a $pq' = pq'$ et $p/q = p'/q'$.

17 Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ (Propriété 6 section **??**), donc $-x \leq x$, et $|x| = x = \max(x, -x)$. L'autre cas est analogue.

18 Si $x \geq y$, alors $x + y + |x - y| = x + y + x - y = 2x$, dont la moitié vaut $x = \max(x, y)$. L'autre cas est symétrique.

19 Supposons que $E' = \{|x|, x \in E\}$ soit borné. Il existe alors M tels que $\forall x \in E, |x| \leq M$; on a $-M \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq M$; donc E a la borne inférieure $-M$ et la borne supérieure M : E est borné.

Réciproquement, si E est borné, il existe a, b tels que $\forall x \in E$, $a \leq x \leq b$; alors $|x| = \max(x, -x)$, et donc $|x| \leq \max(b, -a)$, qui est une borne supérieure de E', lequel a 0 pour borne inférieure.

20 On a, pour tout entier naturel n : $|\frac{2n}{2n+3} - 1| < \frac{1}{327} \Leftrightarrow -\frac{1}{327} < \frac{2n}{2n+3} - 1 < \frac{1}{327} \Leftrightarrow -\frac{2n+3}{327} < -3 < \frac{2n+3}{327} \Leftrightarrow -2n - 3 < -981 < 2n + 3 \Leftrightarrow 2n > -984\,\text{et} - 2n < -978 \Leftrightarrow 2n > 978 \Leftrightarrow n > 489$. On peut prendre $N = 489$, ou n'importe quel nombre plus grand que 489.

21 Il existe n entier plus grand que $1/\epsilon$.

22 Si $z = 0$, on obtient le résultat par anti-symétrie de l'égalité. Si $z > 0$, il existe pour tout $\epsilon > 0$ un entier n tel que $z/n < \epsilon$ (variante de l'exercice 21). Alors l'hypothèse implique que $0 \leq y - x \leq z/n < \epsilon$, donc le corollaire 2.10 implique que $y - x = 0$.

26 Le premier ensemble est $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ et le second est $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

27 Il suffit de vérifier que le formule finale est correcte pour $n = 0$ et $n = 1$, et qu'elle est compatible avec le formule de récurrence.

28 Récurrence sur n.

32 Soit $\epsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier N tel que $N > 1/\epsilon^2$. Donc, pour tout entier $n \geq N$, on a $n > 1/\epsilon^2$. Alors $1/\sqrt{n} < \epsilon$ (pourquoi ?).

33 On a $\sqrt[n]{2} > 1$, donc $\sqrt[n]{2} = 1 + h_n$, $h_n > 0$. La formule du binôme implique pour $n \geq 2$, $2 = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \cdots$; donc $2 > 1 + nh_n$, $h_n < 1/n$ et $h_n \to 0$. Donc $1 + h_n \to 1$.

34 Supposons que l'ensemble $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit fini. Soit ℓ la limite de la suite. Supposons par l'absurde que $\ell \notin X$. Posons $\epsilon = \min\{|x - \ell| \mid x \in X\}$; alors $\epsilon > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < \epsilon$. Prenons $n = N + 1$. On a $x_n \in X$, donc $|x_n - \ell| < \epsilon \leq |x_n - \ell|$: une contradiction.

Par suite, $\ell \in X$. Posons $\epsilon' = \min\{|x - \ell|, x \in X \setminus \{\ell\}\}$. Alors $\epsilon' > 0$. Il existe N' tel que $\forall n > N'$, $|x_n - \ell| < \epsilon'$. On doit alors avoir $x_n = \ell$. En effet, dans le cas contraire, comme $x_n \in X \setminus \{\ell\}$, on obtient $\epsilon' \leq |x_n - \ell| < \epsilon'$, une contradiction.

35 Si on prend "$\forall \epsilon \geq 0$" dans la définition, ou dans une des trois conditions de l'exercice 29, on obtient les suites ultimement constantes.

37 1. S'il y a une limite, c,est aussi la limite de la suite décalée (x_{n+1}). De l'égalité $x_{n+1} = 2x_n^2$ on déduit que la limite x doit satisfaire $x = 2x^2$. Donc $x = 0$ ou $x = 1/2$.

2. Une récurrence immédiate montre que $x_n \geq 2$. Donc la limite devrait satisfaire $x \geq 2$: contradiction. On peut montrer que $x_n = 2^{2^{n+1}-1}$, qui tend donc vers l'infini.

38 On a $x_n = \frac{3}{1+\sqrt{1+3/n}}$, qui tend vers $3/2$.

43 $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \to 0$.

41 On écrit l'équation $x_n = i + j(-1/2)^n$ pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui

donne un système de deux équations linéaires en i et j, sachant que $x_0 = a$ et $x_1 = b$, et permet de calculer i et j. Puis, avec les valeurs obtenues de i et j, on vérifie qu'on a pour tout n, $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$.

45 Pour $n = 1$, c'est facile. Supposons que $(1 + a)^n \geq 1 + an$; alors, $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + an)(1 + a)$ (puisque $1 + a \geq 0$) $= 1 + a(n + 1) + a^2 n \geq 1 + an$, puisque $a^2 n \geq 0$.

46 1. Une récurrence immédiate montre que $x_n \geq 0$; on en déduit que $x_{n+1} \leq 1$.

2. Calculer $x_{n+1} - 1$.

51 1. $x_1 - x_0 = 3$; $x_{n+1} - x_n = 3 + \sqrt{x_n} - (3 + \sqrt{x_{n-1}}) \geq 0$ par hypothèse de récurrence : la suite est croissante. Si $x_n \leq 6$, alors $x_{n+1}^2 = 9 + x_n + 6\sqrt{x_n} \leq 9 + 6 + 6 \cdot 3 \leq 36$, donc $x_{n+1} \leq 6$. La suite converge vers x et on a $x = 3 + \sqrt{x}$, donc $x = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, $x^2 - 7x + 9 = 0$; $\Delta = 49 - 36 = 13$, $x = (1/2)(7 \pm \sqrt{13})$, et comme $x \geq x_1 = 4$, $x = (1/2)(7 + \sqrt{13})$.

2. Une récurrence immédiate montre que $x_n \geq 0$. Par suite, $x_{n+1} \geq x_n$: la suite est croissante. Aussi, $3(1 + 3x_n) \geq 1 + 7x_n$; donc $x_{n+1} - x_n \geq 1/3$. Il s'ensuit par récurrence que $x_n - x_0 \geq n/3$. La suite n'est donc pas bornée. Elle vers l'infini.

3. La suite (a_n) prend alternativement deux valeurs distinctes ; elle ne converge donc pas, et la suite (x_n) non plus.

54 Une suite périodique, dont l'ensemble des termes est de cardinalité ≥ 2, ne converge pas ; en effet on peut trouver deux sous-suites constantes distinctes.

57 On va appliquer le résultat simple suivant : une sous-suite d'une sous-suite d'une suite est une sous-suite de cette suite.

Par le théorème de Bolsano-Weierstrass, on trouve d'abord une sous-suite $a'_n = a_{h_n}$ de la suite a_n qui converge dans $[a, b]$. On considère alors la suite $b'_n = b_{h_n}$, et on lui applique le même théorème : elle possède la sous-suite b'_{k_n} convergente dans $[a, b]$. La suite a'_{k_n} est convergente dans $[a, b]$, elle est une sous-suite de a_n, et b'_{k_n} est une sous-suite de b_n.

61 C'est une série géométrique. La somme partielle est $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1/2)^i = \frac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}$. Lorsque n tend vers l'infini, le numérateur tend vers 1, et le dénominateur est constament égal à $3/2$. Donc la limite est $2/3$.

63 a_n tend vers 0, donc $1/(1 + a_n^2)$ ne tend pas vers 0 : la série diverge.

64 1. Pour $a_n \geq 1$, la récurrence est immédiate. On vérifie que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Il s'ensuit que si $a_n \leq \sqrt{2}$ (resp. $\geq \sqrt{2}$), alors $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} \geq$ (resp. $\leq$) $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Comme a_n est rationnel, on n'a pas $a_n = \sqrt{2}$. Par

suite les a_n sont alternativement $<$ et $>$ que $\sqrt{2}$.

2. En appliquant deux fois la formule récurrence, on trouve que (*) $a_{n+2} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n}$. D'où $a_{n+2} - a_n = \frac{2(2-a_n^2)}{3+2a_n}$. La sous-suite des termes pairs est donc croissante, et l'autre et décroissante. Étant bornées, elles convergent donc toutes les deux.

3. La formule (*), par passage à la limite, montre que la limite a des termes pairs (resp. des impairs) satisfait $a = \frac{4+3a}{3+2a}$, donc $a^2 = 2$. Comme la limite est ≥ 1 (car tous les a_n sont ≥ 1), $a = \sqrt{2}$. Comme les deux sous-suites ont la même limite, la suite elle-même tend vers elle.

En appliquant itérativement n fois la formule de récurrence $a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$, on trouve

$$a_n = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{2}}}}.$$

65 Critère de d'Alembert.

67 Par hypothèse, il existe M tel que pour tout n, $|S_{k_n}| \leq M$. Soit maintenant k entier naturel quelconque. Comme k_n tend vers l'infini avec n, il existe n tel que $k_n \geq k$. Alors $S_k \leq S_{k_n} \leq M$.

68 Soit $a_n = 1/n\ln(n)$. On a $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n n \ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge, et on applique la condensation.

69 Par le critère de condensation de Cauchy, $2^n a_{2^n} \to 0$. D'autre part, pour un entier k, soit n tel que

$$2^n \leq k < 2^{n+1}$$

Alors $0 \leq k a_k \leq 2(2^n a_{2^n})$ puisque la suite a_k est décroissante. Comme le terme de droite converge vers zéro lorsque k (et donc n) tend vers l'infini, le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure.

70 1. Appliquer deux fois de suite le critère de condensation.

2. Le terme général est positif et borné par $(1/3)^n$: converge.

3. Critère de d'Alembert, avec la proposition 3.26 : diverge.

4. Le terme général est équivalent à $(3/7)^n$: converge.

5. Comme 3., mais ça converge.

6. Si $a > 0$: critère de d'Alembert : converge.

7. Terme général équivalent à $3/\sqrt{n}$: diverge.

8. Terme général équivalent à $2^n/n!$ (utiliser l'exercice 55 pour le prouver) ; appliquer 6 : converge.

9. Terme général équivalent à $1/2n$: diverge.

72 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 2e$.

73 On a $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$. Si $\sum a_n$ est une série convergente, sa limite est la somme des limites de la séries de ses termes de rang pair, et de la série de ses termes de rang impair (prouver). On en déduit que $\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}$, donc cette dernière est égale à $\frac{\pi^2}{8}$.

4.20 $\sum p_n = \infty$ car ses sommes partielles sont positives et non bornées (proposition 3.27). Le même argument s'applique à $\sum(-q_n)$.

75 Il existe M tel que $b_n \leq M$ pour tout M. La série $\sum M|a_n|$ converge. On a $|a_n b_n| \leq M|a_n|$. On applique le corollaire 4.6.

76 1. Terme général > 1 : diverge.

2. Terme général positif et équivalent à $1/n^{1/2}$: diverge.

3. Appliquer le critère de d'Alembert à la valeur absolue du terme général : converge absolument.

4. Critère de d'Alembert.

77 1. Le terme général est > 1 : diverge.

2. Théorème 4.22 : converge. Corollaires 4.9 et 4.13 : ne converge pas absolument.

3. Converge absolument car $n^4/3^n \leq 1/n^2$ pour n assez grand, car $n^6/3^n$ tend vers 0 (exercice 55).

78 1. $u_n/v_n = 1 + (-1)^n/\sqrt{n}$ tend vers 1.

2. Théorème 4.22.

4. Théorème 4.22, après vérification que $\sqrt{n}/(n-1) > \sqrt{n+1}/n$.

5. D'après 3, v_n est la somme de deux termes, dont l'un correspond à un série convergente, et l'autre à une série divergente.

6. Les suites ne sont pas positives.

7. la suite v_n n'est pas décroissante.

81 $V'(a,\epsilon) = (a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)$.

82 On construit une suite infinie de nombres distincts x_n, et une suite strictement décroissante δ_n de nombres strictement positifs : $\delta_0 = \delta$, $x_0 \in V'(x,\delta_0)$; et récursivement, pour tout $n \geq 1$, $\delta_n = |x - x_{n-1}|$, $x_n \in V'(x,\delta_n)$ (x_n existe).

On a alors $\delta_n < \delta_{n-1}$, car $x_{n-1} \in V'(x,\delta_{n-1})$, donc $|x - x_{n-1}| < \delta_{n-1}$. Alors x_n est différent de $x_0,\ldots,x_{n-1}$, car il est plus proche de x que ceux-ci. Et x_n est dans $V'(x,\delta_n) \subset V'(x,\delta)$.

83 x est un point d'accumulation de A si et seulement si :

$$\forall\epsilon > 0, V'(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

La négation de ceci est

$$\exists \epsilon > 0 \,\text{tel que}\, V'(x, \epsilon) \cap A = \emptyset.$$

84 Soit x un réel et $\delta > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ rencontre l'intervalle $(x, x + \delta)$; donc $\mathbb{Q}$ rencontre $V'(x, \delta)$.

85 Ce sont tous les points de $[0, 1]$.

86 Il existe η tel que D_f ne rencontre pas $V'(x_0, \eta)$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $x \in V'(x_0, \eta) \cap D_f$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$; en effet, $V'(x_0, \eta) \cap D_f$ est vide, donc aucun tel x n'existe.

87 1. Multiplier en haut et en bas par $\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}$. La limite est $\sqrt{2}/4$.

2. On suppose $x > 1$. Comme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, on a $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}$, donc $\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x + 1}$ qui tend vers $\sqrt{2}$ lorsque x tend vers 1. De plus, $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}$ (car $x - 1 = (\sqrt{x - 1})^2$), qui tend vers 0. Donc la limite cherchée est $\sqrt{2}$.

3. $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}$.

89 Faisons l'hypothèse qu'on ait : pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon < \eta$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Nous montrons qu'alors f est continue en a. Soit donc $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \min(\eta/2, \epsilon)$. Alors $0 < \epsilon' < \eta$; il existe donc par hypothèse $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon'$. Mais $\epsilon' \leq \epsilon$, donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

91 Non : un contre-exemple est la fonction $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$. Elle est continue partout, sauf en $x = 0$, mais $f(h) + f(-h) = 0$ pour tout h, et la limite quand h tend vers 0 existe donc.

92 Elle prend la valeur 1 pour des x aussi proches qu'on veut de 0 : en effet, c'est le cas pour $x =$ l'inverse de $\pi/2 + 2n\pi$, n entier naturel.

93 On a $|f(x)| \leq |x|$, donc f est continue en 0, car $f(0) = 0$. Soit a rationnel non nul ; comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ prend la valeur 0 pour des x aussi proches qu'on veut de a, mais $f(a) = a \neq 0$; donc f n'est pas continue en a. Soit a irrationnel ; comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ prend des valeurs $\geq |a|/2$ pour des x aussi proches qu'on veut de a, mais $f(a) = 0$; donc f n'est pas continue en a.

94 On a $|f(x)| \leq |x|$.

95 1. Utiliser l'exercice 18.

2. La fonction valeur absolue est continue ; utiliser les théorèmes 5.15 et 5.16.

96 Ce polynôme représente une fonction continue, qui prend les valeurs -2 et 1 en -1 et 0. On applique le théorème des valeurs intermédiaires.

97 La fonction $f(x)$ associée au polynôme tend vers $-\infty$ (resp. ∞) avec x. Il existe donc $a < b$ tel $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

98 Cette fonction tend vers l'infini avec x.

99 On pose $\delta = \epsilon/k$ pour se conformer à la définition 5.20.

100 La fonction $\sin : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue par le théorème 5.22. Soit $\epsilon > 0$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout a, b dans $[-2\pi, 2\pi]$, $|a - b| < \delta \Rightarrow |\sin(a) - \sin(b)| < \epsilon$; on peut supposer $\delta \leq 2\pi$. Soient x, y dand $\mathbb{R}$ avec $|x - y| < \delta$. Il existe alors $a, b \in [-2\pi, 2\pi]$ tels que $|a - b| < \delta$ et que $x - a, y - b$ sont des multiples entiers de 2π. Alors $|\sin(x) - \sin(y)| = |\sin(a) - \sin(b)| < \epsilon$.

101 On a pour tout réel x, $|x| < 1+x^2$. Donc pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x|+|y| < 2(1+x^2)(1+y^2)$. Par suite, $|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}| = |\frac{y^2-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}| < 2|x-y|$, puisque $|\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}| < 2$. La fonction est donc lipschitzienne de rapport 2, donc uniformément continue (exercice 99).

102 Prenons $x =$ l'inverse de $2k\pi$, et $y =$ l'inverse de $2k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{N}$. Pour k grand, $x - y$ est très petit, mais $\cos(1/x) - \cos(1/y) = 1$. La fonction $\cos(1/x)$ n'est pas uniformément continue.

104 La fonction $x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante.

105 1. Le théorème 5.11 que $|\sin(x)|$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc $\sin(x)$ aussi.

2. La question précédente montre que les limites, quand ϕ tend vers 0, de $\sin\phi$ et $\cos\phi$, sont respectivement 0 et 1. Donc, la formule $\sin(\theta + \phi) = \cos\theta \sin\phi + \cos\phi \sin\theta$, pour θ fixé, montre que la limite, quand ϕ tend vers 0, de $\sin(\theta + \phi)$, est $\cos\theta \sin(0) + \cos(0) \sin\theta = \sin\theta$. Donc la fonction sin est continue en θ.

107 $f'(0) = 0$.

108 On définit $f(x) = 1$ pour $x < 0$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour $x \in [0, n)$, $f(x) = n$ pour $x \geq n$.

114 La dérivée de tan est $1/\cos^2(x)$. Donc la fonction $\tan(x)$ est strictement croissante, de $(-\pi/2, \pi/2)$ sur $\mathbb{R}$.

119 Soit $f(x) = x^2 - \cos(x)$. La fonction f est *paire*, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$; il suffit donc de montrer que f a un seul zéro pour $x > 0$, sachant que $f(0) \neq 0$. Sa dérivée est $2x + \sin(x)$, qui est > 0 sur l'intervalle $(0, 1)$ $(1 < \pi/2)$. Par le corollaire 6.11, f est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc injective. Comme $f(0) = -1, f(1) = 1 - \cos(1) > 0$, il existe par le théorème des valeurs intermédiaire un $x \in (0, 1)$ tel que $f(x) = 0$; il est unique car f est injective. Pour $x > 1$, on a $f(x) > 0$.

125 On utilise $[x - \delta/2, x + \delta/2] \subset (x - \delta, x + \delta) \subset [x - \delta, x + \delta]$.

126 Pour tout $x \in (a, b)$, on a $(x - \delta, x + \delta) \subset (a, b)$, où $\delta = \min(x - a, b - x)$.

127 On a $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, \infty)$.

128 Son complémentaire est $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{1 \leq n} (1/(n + 1), 1/n)$.

129 Le supremum est la limite d'une suite.

133 Soit a_n la suite convergente, de limite a. Soit $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. L'ensemble A est borné (théorème 3.6), et il suffit donc de montrer qu'il est fermé. Soit x_n une suite convergente telle que $x_n \in A$ pour tout n, de limite x. Il suffit de montrer que $x \in A$. On peut supposer que x_n prend une infinité de valeurs : en effet, on utilise l'exercice 34. On peut supposer que pour tout M, il existe $n \geq M$ et $p \geq M$ tel que $x_p = a_n$; en effet, autrement x_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe P tel que $\forall p \geq P, |x - x_p| < \epsilon$. Il existe aussi N tel que $\forall n \geq N, |a - a_n| < \epsilon$. Mais il existe $n, p \geq M = \max(N, P)$ tel que $x_p = a_n$. Alors $|\ell - x| \leq |\ell - a_n| + |x_p - x| < 2\epsilon$. Donc $x = \ell$ par le corollaire 2.10.

Références

[1] [LM] J. Labelle et Armel Mercier, Introduction à l'analyse réelle, Modulo, 1993.

[2] [R] F. Rochon, Cours d'analyse 1, manuscrit 2015.