

Théorie des groupes

UQÀM MAT2250

Christophe Reutenauer
Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

19 juillet 2026

Table des matières

1 Introduction	2
2 Monoïdes	2
3 Groupes	7
4 Sous-groupes	8
5 Actions de groupe	12
6 Homomorphismes	17
7 Sous-groupes normaux et quotients de groupes	20
8 Groupes cycliques	24
9 Conjugaison	29
10 Groupes symétriques	32
11 Groupes linéaires	39
12 Groupes abéliens finis	43
13 Monoïdes et groupes libres	48
14 Théorèmes d'isomorphisme	50

Remerciements : J'ai grandement bénéficié des notes de cours de François Bergeron [1], de Christophe Hohlweg [2], ainsi que des notes de cours de Jacques Labelle et moi-même [3].

Pour la chasse aux coquilles, merci à Félix Racine.

1 Introduction

2 Monoïdes

Définition 2.1. Soit E un ensemble. Une loi de composition interne sur E est une fonction $E \times E \rightarrow E$. On dit aussi une loi de composition, ou simplement loi, ou encore opération binaire sur E .

Exemple 2.2. 1. Avec $E = \mathbb{N}$, on prend comme loi la fonction $(a, b) \mapsto a + b$. Même chose pour $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_-$, $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} | x \neq 0\}$, $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{Q}_-^*, \mathbb{R}_-^*$. On vérifie en effet que si a, b sont dans un de ces ensembles, $a + b$ l'est aussi.

2. Toujours avec $E = \mathbb{N}$, on prend comme loi $(a, b) \mapsto ab$ (produit de a par b). Ici aussi, on peut remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}_+^*$ (mais pas par $\mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_-$: pourquoi ?).

3. Sur $\mathbb{N}$, prenons la loi $(a, b) \mapsto a + b + ab$. Ici aussi, on peut remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$.

4. Sur $\mathbb{N}$, on considère la loi $(a, b) \mapsto 1 + ab$.

5. Soit X un ensemble et $E = \mathcal{P}(X)$ (l'ensemble des parties de X). On définit la loi $(A, B) \mapsto A \cup B$. Une autre loi sur E est $(A, B) \mapsto A \cap B$.

L'addition et la multiplication des nombres ont certaines propriétés bien connues. Lorsqu'on les considère dans l'abstrait, on trouve la notion de monoïde, la notion de groupe, celle d'anneau, de corps, etc...

Définition 2.3. Soit M un ensemble muni d'une loi $(a, b) \mapsto \ell(a, b)$. On dit que M est un monoïde si les deux propriétés suivantes sont réalisées.

(i) Pour tous a, b, c dans M , on a

$$\ell(\ell(a, b), c) = \ell(a, \ell(b, c)).$$

On dit que la loi est associative.

(ii) Il existe un élément e dans M tel que pour tout a dans M , on a

$$\ell(a, e) = a = \ell(e, a).$$

On dit que e est un élément neutre de M .

Exemple 2.4. 1. Soit $E = \mathbb{N}$, $\ell(a, b) = a + b$. Alors $\ell(\ell(a, b), c) = \ell(a + b, c) = (a + b) + c = a + (b + c) = \ell(a, b + c) = \ell(a, \ell(b, c))$. De plus on a, $\ell(a, 0) = a + 0 = a = 0 + a = \ell(0, a)$. Donc $\mathbb{N}$ avec la loi ℓ est un monoïde.

2. Sur $\mathbb{N}$, la loi $\ell(a, b) = ab + 1$ n'est pas associative. En effet $\ell(\ell(a, b), c) = \ell(ab + 1, c) = (ab + 1)c + 1 = abc + c + 1$, et $\ell(a, \ell(b, c)) = \ell(a, bc + 1) = a(bc + 1) + 1 = abc + a + 1$; donc $\ell(\ell(a, b), c) \neq \ell(a, \ell(b, c))$ dès que $a \neq c$.

Définition 2.5. Un monoïde est dit commutatif, ou abélien, si sa loi est commutative, c'est-à-dire

$$(iii) \quad \forall a, b \in M, \ell(a, b) = \ell(b, a).$$

Toutes les lois considérées dans les exemples précédents sont commutatives.

Le plus souvent, la notation pour une loi dans un monoïde est $a \cdot b$, ou ab , au lieu de $\ell(a, b)$ comme ci-dessus; c'est ce qu'on appelle la *notation multiplicative*; la loi est alors appelée *multiplication*. Avec cette notation, les formules dans (i), (ii), (iii) se réécrivent comme suit :

- (i) $(ab)c = a(bc)$ (associativité);
- (ii) $ea = ae = a$ (élément neutre);
- (iii) $ab = ba$ (commutativité).

Lorsque le monoïde est commutatif, on adopte souvent la *notation additive* $a + b$ au lieu de $\ell(a, b)$. En notation multiplicative, on note souvent 1 (le *un* ou l'*unité* du monoïde) au lieu de e , et en notation additive, on note souvent 0 (le *zéro*). Dans la suite, on adoptera le plus souvent la notation multiplicative.

Dans un monoïde multiplicatif, $(ab)c$ et $a(bc)$ sont égaux, et l'on écrira simplement abc (voir l'exercice 12 pour une généralisation). Dans le cas additif, c'est $a + b + c$ qu'on écrit.

Proposition 2.6. Un monoïde a un seul élément neutre.

Nous dirons donc : l'élément neutre d'un monoïde M , plutôt qu'un élément neutre de M .

Démonstration. Comme dans beaucoup de preuves d'unicité ("un seul") en mathématiques, on suppose que l'objet dont on veut démontrer l'unicité

existe en deux exemplaires, et on montre que ces deux n'en forment en fait qu'un. Supposons donc que notre monoïde M ait deux éléments neutres e_1 et e_2 , et montrons que $e_1 = e_2$. Utilisons la notation multiplicative. Nous avons $e_1 = e_1 e_2$, car e_2 est élément neutre. Mais aussi $e_1 e_2 = e_2$, car e_1 est élément neutre. Donc $e_1 = e_2$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Définition 2.7. Soit M un monoïde. Un sous-monoïde de M est un sous-ensemble P de M qui contient l'élément neutre de M et tel que

$$\forall a, b \in P, ab \in P.$$

Remarquons que si on note ℓ la loi de M , alors on aura

$$\forall a, b \in P, \ell(a, b) \in P.$$

Remarque Ce genre de définition est très courant en mathématiques : on a un ensemble M avec une ou plusieurs lois, ou des opérations plus générales ; appelons ça un “machin”. Un “sous-machin” de M est alors un sous-ensemble P de M qui est “fermé” ou “clos” pour toutes ces lois, c'est-à-dire si on prend des éléments de P et qu'on leur applique les lois, le résultat est encore dans P . Dans tous les cas, la définition de “sous-machin” sera ajustée de telle manière que l'analogue de l'énoncé suivant sera vrai. Nous y réutilisons la notation ℓ pour la loi, qui rend mieux compte de ce qui se passe.

Proposition 2.8. Soit M un monoïde, de loi ℓ , et P un sous-monoïde. On définit sur P la loi $k : P \times P \rightarrow \mathbb{P}$ par :

$$\forall a, b \in P, k(a, b) = \ell(a, b).$$

Avec la loi k , P est un monoïde.

Démonstration. Remarquons d'abord que k est bien une loi sur P , c'est-à-dire une fonction $P \times P \rightarrow P$. En effet, P est un sous-monoïde, donc $\forall a, b \in P, \ell(a, b) \in P$, donc $k(a, b) \in P$.

Maintenant, l'associativité de la loi k résulte de celle de ℓ : $\forall a, b, c \in P$, on a par définition de k : $k(k(a, b), c) = \ell(\ell(a, b), c)$ et $k(a, k(b, c)) = \ell(a, \ell(b, c))$. On conclut donc par l'associativité de ℓ .

De plus, M a un élément neutre e . Celui-ci est dans P , car P est un sous-monoïde. On a alors : $\forall a \in P, k(a, e) = \ell(a, e) = a$ et $k(e, a) = \ell(e, a) = a$, ce qui montre que P est bien un monoïde. $\square$

Exemple 2.9. 1. $\mathbb{N}$ avec l'addition est un monoïde. Alors $P = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} | n \geq 7\}$ est un sous-monoïde. En effet, l'élément neutre pour l'addition, qui est 0, est dans P . De plus, si $a, b \in P$ avec $a \neq 0$, alors $a + b \in P$, puisque $a + b \in \mathbb{N}$, et que $a + b \geq a \geq 7$.

2. $\mathbb{Z}$ avec l'addition est un monoïde et $\mathbb{N}$ en est un sous-monoïde.

3. Si X est un ensemble, $E = \mathcal{P}(X)$ est un monoïde avec la loi $(A, B) \mapsto A \cup B$, d'élément neutre $\emptyset$. Soit A_0 un sous-ensemble fixé de X et $P = \{A \subset X | A = \emptyset \text{ ou } A_0 \subset A\}$. Alors P est un sous-monoïde de E .

4. Si M est un monoïde, M et $\{e\}$ sont des sous-monoïdes de M .

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des monoïdes ou des groupes pour l'addition usuelle : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{Z}^*$. Dire aussi lesquels sont sous-monoïde ou sous-groupe d'un autre.

Exercice 2. Mêmes questions pour la multiplication dans les ensembles suivants : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{Z}^*$.

Exercice 3. Sur $\mathbb{Q}$, on définit une loi, notée $*$ par : $a*b = ab + a + b$. Montrer que $\mathbb{Q}$ devient un monoïde, d'élément neutre 0 ; montrer que tout élément a a un inverse, sauf -1 . Montrer que $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ est un sous-monoïde, qui devient un groupe avec la loi induite. Idée : utiliser $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$.

Exercice 4. Montrer que $\mathcal{P}(X)$ avec la loi $\cup$ (resp. $\cap$) est un monoïde avec élément neutre $\emptyset$ (resp. X).

Exercice 5. Montrer par un exemple que la soustraction sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une loi associative.

Exercice 6. Même chose pour la division dans $\mathbb{Q}^*$.

Exercice 7. Montrer que $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4\}$ est un sous-monoïde de $\mathbb{N}$, mais que $\mathbb{N} \setminus \{1, 4\}$ ne l'est pas.

Exercice 8. Montrer que l'ensemble, noté X^X , des fonctions $X \rightarrow X$ est un monoïde avec la composition des fonctions (on rappelle que la composée $g \circ f$ des deux fonctions f et g est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$).

Exercice 9. Montrer que l'intersection de deux sous-monoïdes d'un monoïde est un sous-monoïde. Même chose avec deux sous-groupes d'un groupe.

Exercice 10. Soit M un monoïde et $a \in M$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la puissance n -ème de a par : $a^n = a \cdot \dots \cdot a$ (n facteurs tous égaux à a) ; en particulier, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, et ainsi de suite. Noter que le parenthésage du produit importe peu, car le produit est associatif. Montrer que pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a : $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ et $(a^n)^m = a^{nm}$.

Exercice 11. Dans un monoïde M , soit A un sous-ensemble. On note A^n l'ensemble des produits de n éléments de A : $A^n = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid \forall i = 1, \dots, n, a_i \in A\}$. En particulier, $A_0 = \{e\}$, où e est l'élément neutre de M et $A^1 = A$. Montrer que $\bigcup_{n \geq 0} A^n$ est un sous-monoïde de M contenant A ; on dit que c'est le sous-monoïde engendré par A . Montrer que c'est le plus petit (pour l'ordre d'inclusion) des sous-monoïdes de M contenant A . En particulier si $A = \{a\}$, $A^n = \{a^n\}$ et $\bigcup_{n \geq 0} A^n = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, a, a^2, \dots\}$.

Exercice 12. * Le lecteur aura sans doute remarqué qu'il y a un petit problème dans les exercices 10, 11, et 31. Dans 11, par exemple, on considère des produits du type abc : ceci signifie-t-il $(ab)c$ ou $a(bc)$? Pas d'importance, ils sont égaux par associativité. Attention, qu'en est-il de $(ab)(cd)$ et $(a(bc))d$? Après un moment de réflexion, on voit que : $(ab)(cd) = ((ab)c)d = (a(bc))d$, où dans les deux égalités, on n'utilise que l'associativité. Le lecteur pourra démontrer que dans le produit $a_1 a_2 \dots a_n$, le résultat ne dépend pas du parenthésage choisi ; il faut, entre autres, définir la notion de parenthésage. Le lecteur pourra déjà se convaincre en montrant que $(a(bc))(de) = ((ab)(cd))e$, en n'utilisant que l'associativité.

Exercice 13. Soit M un monoïde et A, B des sous-ensembles de M . On définit leur produit AB par $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\mathcal{P}(M)$ devient ainsi un monoïde d'élément neutre $\{1\}$. Soit P un sous-ensemble de M contenant l'élément neutre de M ; montrer que P est un sous-monoïde de M si et seulement si $PP = P$.

Exercice 14. * Considérons le monoïde X^X de l'exercice 8. Quels éléments de X^X sont inversibles ? Si $|X| = n$, combien d'éléments X^X a-t-il ? Si $|X| = n$, combien y a-t-il d'éléments inversibles dans le monoïde X^X ?

Exercice 15. * Soit $\mathbb{R}$ avec la loi $a * b = ab - 2(a + b) + 6$. Prouvez que la loi $*$ est : a) commutative ; b) associative ; c) avec un élément neutre ; d) quels éléments de $\mathbb{R}$ sont inversibles pour $*$?

Exercice 16. On définit une loi de composition $*$ dans $\mathbb{N}$ par : $n * m = 0$ si nm est divisible par un carré ≥ 4 , et $n * m = nm$ dans le cas contraire. Montrer $*$ est associative, mais que $\mathbb{N}$ n'a pas d'élément neutre pour ce produit.

Exercice 17. Si l'on interprète le produit $a \cdot b$ pour $a, b \in R_+$ comme l'aire d'un rectangle, comment peut-on interpréter les deux produits $(ab)c$ et $a(bc)$, et en déduire leur égalité ? Que veut dire la commutativité ?

3 Groupes

Définition 3.1. Soit M un monoïde noté multiplicativement. On dit que M est un groupe si tout élément a de M a un inverse (on dit aussi que a est inversible dans M), c'est-à-dire : $\forall a \in M, \exists b \in M$ tel que $ab = ba = e$, où e est l'élément neutre de M .

Exemple 3.2. 1. $\mathbb{Z}$ avec l'addition est un groupe, car pour tout a dans $\mathbb{Z}$, il existe b dans $\mathbb{Z}$ tel que $a + b = b + a = 0$. Il suffit en effet de prendre $b = -a$.

2. $\mathbb{N}$ avec l'addition n'est pas un groupe, car par exemple pour $a = 1$, on ne peut trouver b dans $\mathbb{N}$ tel que $1 + b = 0$.

3. $\mathbb{Q}^*$ avec la multiplication est un groupe : pour tout $a = r/s \in \mathbb{Q}^*$, son inverse est $a^{-1} = s/r$ (l'élément neutre ici est 1).

4. $\mathcal{P}(X)$ avec la loi "union" n'est pas un groupe, si X a au moins un élément. En effet, on ne peut en général pas trouver $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que $A \cup X = \emptyset$.

Proposition 3.3. Dans un groupe, l'inverse de chaque élément est unique.

Démonstration. Soit G ce groupe, e son élément neutre, $a \in G$ et b_1, b_2 des inverses de a . On a donc $b_1 = b_1 e$ (car e est élément neutre) $= b_1 (ab_2)$ (car b_2 est inverse de a) $= (b_1 a) b_2$ (par associativité) $= e b_2$ (car b_1 est inverse de a) $= b_2$ (car e est élément neutre). D'où $b_1 = b_2$. $\square$

On parlera donc de l'inverse d'un élément dans un groupe, plutôt que d'un inverse. Dans un groupe additif, on dit plutôt *opposé*. La notation est a^{-1} pour l'inverse de a dans un groupe multiplicatif, et $-a$ pour l'opposé de a dans un groupe additif.

On remarquera que la proposition ci-dessus implique que l'inverse de l'inverse de a est a lui-même.

Exercice 18. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles d'un monoïde est un sous-monoïde, et que c'est un groupe avec la loi induite.

Exercice 19. 1) Comment calcule-t-on l'inverse d'un produit dans un groupe ?

2) Calculer l'inverse de $a^{-1}bc^{-1}abcb^{-1}$.

3) Calculer $c^{-1}b^{-1}aa^{-1}bcadaa^{-1}d^{-1}$.

4) Que vaut l'élément de la question 2 quand le groupe est commutatif ?

Exercice 20. On dit que a et b commutent, ou que a commute avec b , si $ab = ba$. Montrer que si a et b commutent avec c , alors ab^{-1} commute avec c (a, b, c sont des éléments d'un groupe).

Exercice 21. Le produit cartésien de deux groupes G et G' est l'ensemble $G \times G'$ avec la loi $(g, g')(g_1, g'_1) = (gg_1, g'g'_1)$. Montrer que c'est un groupe.

Exercice 22. Soit n un entier naturel. Montrer que les classes $[x]$ modulo n forment un monoïde avec la multiplication $[x][y] = [xy]$. Il faut montrer qu'elle est bien définie. Montrer que l'ensemble des classes $[x]$, où x est premier avec n , forme un groupe avec cette multiplication. Utiliser le théorème de Bezout.

Exercice 23. On définit sur $\mathcal{P}(X)$ une loi Δ par : $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que c'est un groupe d'élément neutre $\emptyset$, et que l'inverse de A est A (on peut raisonner avec des dessins). L'opération Δ s'appelle la différence symétrique.

4 Sous-groupes

Définition 4.1. Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre 1. Un sous-groupe de G est un sous-ensemble H de G tel que :

- (i) $1 \in H$;
- (ii) $\forall a, b \in H, ab \in H$;
- (iii) $\forall a \in H, a^{-1} \in H$.

Donc un sous-groupe de G est un sous-monoïde de G qui contient l'inverse de chacun de ses éléments.

On laissera au lecteur le soin d'énoncer cette définition dans le cas additif.

Exemple 4.2. 1. $\mathbb{Z}$ avec l'addition est un groupe, admettant comme sous-groupe, par exemple, l'ensemble des nombres pairs.

2. $\mathbb{Q}$ avec l'addition admet comme sous-groupe le sous-ensemble $\{a/2^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

3. $\mathbb{R}^*$ avec la multiplication contient $\mathbb{Q}^*$, $\{1, -1\}$, et $\mathbb{R}_+^*$, comme sous-groupes.

Théorème 4.3. Pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$, il existe un entier naturel b tel que $H = \{bn \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

La notation pour le dernier ensemble est $b\mathbb{Z}$; c'est l'ensemble des entiers relatifs qui sont multiples de b .

Démonstration. Si $H = \{0\}$, nous prenons $b = 0$ et c'est gagné. Si $H \neq \{0\}$, H contient sûrement un entier > 0 : en effet, H contient un entier $n \neq 0$, et il contient aussi son opposé $-n$, étant un sous-groupe ; donc n et $-n$ sont dans H , et l'un d'eux est > 0 .

Considérons $H_+^* = \{n \in H \mid n > 0\}$. Cet ensemble est non vide, comme on vient de le voir, donc cet ensemble a un minimum, que nous notons b . Nous montrons que $H = b\mathbb{Z}$. Pour ce faire, il faut montrer que $H \subset b\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z} \subset H$. Pour montrer que $b\mathbb{Z} \subset H$, prenons $a \in b\mathbb{Z}$ quelconque et montrons que $a \in H$. Comme $a \in b\mathbb{Z}$, on a $a = bn$, $n \in \mathbb{Z}$. Supposons d'abord $n \geq 0$; alors $a = b + b + \dots + b$ (n fois), donc $a \in H$, puisque H est un sous-groupe contenant b ; si $n < 0$, on a $a = -(b(-n))$ et $b(-n)$ est dans H d'après l'argument juste avant ; comme H est un sous-groupe, il contient aussi l'opposé de $b(-n)$, c'est-à-dire a , donc $a \in H$.

Montrons maintenant que $H \subset b\mathbb{Z}$. Soit donc $a \in H$ et supposons d'abord que $a > 0$. Par division euclidienne, nous avons $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Donc $r = a - bq$ est dans H , car a et bq le sont (nous avons vu ci-dessus que $b\mathbb{Z} \subset H$), et que H est un sous-groupe. Si r était non nul, on aurait $r \in H_+^*$, $r < b$, ce qui est impossible, car b est le minimum de H_+^* . Donc on doit avoir $r = 0$, et $a = bq \in b\mathbb{Z}$. Supposons maintenant que $a < 0$. Alors $-a > 0$ et $-a \in H$ puisque H est un sous-groupe. Donc, par ce que nous venons de voir, $-a \in b\mathbb{Z}$ et enfin $a \in b\mathbb{Z}$. Ceci implique $H \subset b\mathbb{Z}$. $\square$

Comme chaque $b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe (exercice 27), on obtient

Corollaire 4.4. *Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les ensembles $b\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.*

On *classifie* ainsi tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, car ils sont tous distincts, quand b varie dans $\mathbb{N}$ (exercice 28).

Nous énonçons un dernier résultat, dont la preuve est analogue à celle de la proposition 2.8.

Proposition 4.5. *Soit H un sous-groupe du groupe G . Avec la loi $(a, b) \mapsto ab$, héritée de G , H est un groupe.*

On dit souvent que la loi sur H est *induite* par celle de G .

On peut représenter un monoïde, ou un groupe, par sa *table de multiplication* : chaque ligne, et chaque colonne, de cette table est indexée par un élément, et à l'intersection de la ligne a et de la colonne b , on met le produit de a par b . Ce tableau est fini si le monoïde est fini.

On dit qu'un sous-monoïde P d'un monoïde M (un sous-groupe H d'un groupe G) est *engendré* par une partie S de M (resp. de G) si $S \subset P$ (resp. $S \subset H$), et si tout élément de P (resp. de H) s'écrit comme un produit d'éléments de S (resp. d'éléments de S et de leurs inverses), répétitions permises. Notons que l'élément neutre est considéré être égal au produit vide, donc il sera toujours engendré.

On dit aussi que S est un *système générateur* de P (resp. H).

Exemple 4.6. 1. Considérons le monoïde $\mathbb{N}$ avec l'addition ; il est engendré par 1 : en effet, tout élément de $\mathbb{N}$ est somme de plusieurs 1.

2. Le groupe $\mathbb{Z}$ est engendré par 1. En effet, tout entier est somme de 1 et de -1, répétés plusieurs fois.

3. $\mathbb{N}$ avec l'addition a pour sous-monoïde $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ce dernier pour système générateur $\{2, 3\}$. La preuve est laissée au lecteur.

4. Le monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^*$ est engendré par l'ensemble des nombres premiers ; c'est une conséquence du théorème fondamental de l'arithmétique.

5. Le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_+^*$ est aussi engendré par l'ensemble des nombres premiers ; mais pour engendrer $\mathbb{Q}_+$, il faut ajouter -1 , ou n'importe quel nombre rationnel < 0 .

Proposition 4.7. Soit P (resp. H) un sous-monoïde (resp. sous-groupe) du monoïde M (resp. du groupe G), et S une partie de M (resp. G). Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) S engendre P (resp. H) ;
- (ii) Le plus petit sous-monoïde de M (resp. sous-groupe de G) qui contient S est égal à P (resp. H).

Quand on parle de “plus petit”, c'est au sens de l'inclusion. De manière précise, l'énoncé (ii), dans le cas des monoïdes, dit donc que si Q est un sous-monoïde de M qui contient S , alors $P \subset Q$.

Démonstration. Nous ne faisons la preuve que pour le cas des monoïdes. Le cas des groupes est analogue, et laissé en exercice.

Supposons que S engendre le sous-monoïde P du monoïde M . Alors P est un sous-monoïde de M qui contient S . Soit Q un sous-monoïde de M qui contient S . Alors tout produit d'éléments de S est aussi dans Q , car Q contient les produits de tous ses éléments ; donc P est contenu dans Q . Donc P est le plus petit sous-monoïde de M qui contient S .

Réciproquement, soit P un sous-monoïde du monoïde M , et S une partie de M , telle que le plus petit sous-monoïde de M qui contient S soit P . Montrons que S engendre P . Considérons l'ensemble P' des produits

d'éléments de S . On a $P' \subset P$, car P est un sous-monoïde. Par ailleurs, P' est un sous-monoïde de M , car il contient l'élément neutre (le produit vide) ; et le produit de deux tels produits en est encore un, donc P' est fermé par produit. De plus, P' contient S (produits avec un facteur). Donc P' est un sous-monoïde de M qui contient S . Donc, par hypothèse sur P , $P \subset P'$. Donc S engendre P . $\square$

Exercice 24. Soit G un groupe et H un sous-ensemble de G . Montrer que H est un sous-groupe si et seulement si on a les deux propriétés suivantes :

- (i) H est non vide ;
- (ii) $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

Exercice 25. Soient A, B deux sous-groupes du groupe G . On suppose que $A \subset B$. Montrer que A est un sous-groupe de B .

Exercice 26. Montrer que l'intersection d'une famille de sous-groupes d'un groupe G est un sous-groupe de G .

Exercice 27. Soit b un entier. Montrer que $\{bn | n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ additif.

Exercice 28. Montrer que la fonction $b \mapsto b\mathbb{Z}$ est une bijection de l'ensemble $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Exercice 29. Montrer que si H est un sous-groupe du groupe G , alors $HH = H$.

Exercice 30. Soit M l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$. Montrer que M est un groupe pour l'addition des matrices. Montrer que M est un monoïde pour la multiplication des matrices.

Exercice 31. Si G est un groupe et $a \in G$, on définit a^n comme dans l'exercice 10, pour $n \in \mathbb{N}$; et on définit $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ si $n \geq 0$. Montrer que les égalités de l'exercice 10 sont valables pour $n, m \in \mathbb{Z}$.

Exercice 32. * Soit $E = \{x, 1-x, 1/x, 1/(1-x), x/(x-1), (x-1)/x\}$, avec la composition des fonctions. Prouver que E est un groupe. Trouver tous les sous-groupes de E .

Exercice 33. Pour chacune des lois $*$ suivantes sur l'ensemble X , dire si elle est commutative, associative, admet un élément neutre. Si $*$ admet un neutre, trouvez les éléments inversibles.

a) $X = \mathbb{N}$ avec $*$ définie respectivement par : $a * b = \text{pgdc}(a, b), \text{ppmc}(a, b), a^b$.

b) $X = \mathbb{Z}$ avec $*$ définie respectivement par : $a * b = b, \min(a, b), \max(a, b), 2ab - a - b + 1$.

Exercice 34. * Vérifiez que $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ est un groupe avec la loi $x_1 * x_2$ définie par : $x_1 * x_2 = x_1 + x_2$ si $x_1 + x_2 < 1$, $= x_1 + x_2 - 1$ si $x_1 + x_2 \geq 1$.

Exercice 35. Soit $A \subset \mathbb{Z}$ avec l'addition. Dire si A est un sous-monoïde ou un sous-groupe (ou aucun des deux) si A est un des ensembles suivants :

- a) $\{\text{entiers pairs}\}$;
- b) $\{0, 4, 5, 6, 7, \dots\}$;
- c) $\{\dots, -5, -4, -3, 0, 2, 4, 5, 6, \dots\}$;
- d) l'ensemble des entiers impairs.

Exercice 36. * Soit M un monoïde et X un ensemble. Sur l'ensemble E des fonctions de X dans M , on définit un produit par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

- a) Montrer que E est un monoïde.
- b) Trouver les éléments inversibles de E .
- c) Montrer que E est un groupe si M l'est.

Exercice 37. Soit G un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = 1$. Montrer que G est commutatif.

5 Actions de groupe

Définition 5.1. Une action à gauche d'un groupe G sur un ensemble E est une fonction $G \times E \rightarrow E$, notée, comme une multiplication, $(g, e) \mapsto ge$, telle que pour tous g, g' dans G et e dans E , on ait :

- (i) $1e = e$; (ii) $g(g'e) = (gg')e$.

On dit aussi que G agit sur E , ou encore opère sur E .

Définition 5.2. Soit G un groupe agissant sur E à gauche et $e \in E$.

- (i) L'orbite de e est le sous-ensemble $\{ge | g \in G\}$ de E .
- (ii) Le stabilisateur de e est le sous-ensemble $\{g \in G | ge = e\}$ de G .

Intuitivement, l'orbite de e est l'ensemble des *points* (éléments de E) qu'on peut atteindre à partir de e en faisant agir sur e un élément de G . Le stabilisateur de e , par contre, est l'ensemble des éléments de G dont l'action sur e ne fait rien (ne déplace pas e). On notera $\text{Orb}(e)$ l'orbite de e , et G_e le stabilisateur de e .

Exemple 5.3. 1. Faisons agir le groupe additif $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par : $ge = g + e$ (ici $g \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{C}$). L'orbite de e est l'ensemble des $g + e, g \in \mathbb{R}$, et peut être vue géométriquement comme la droite horizontale qui passe par e . Le stabilisateur de e est réduit à $\{0\}$.

2. Prenons pour G le groupe à deux éléments, noté multiplicativement ; donc $G = \{1, x\}$ et $x^2 = 1$. Prenons $A = \{a, b, c\}$ avec l'action : $xa = a, xb = c, xc = b$. L'action est entièrement définie par ces trois égalités, à cause de 5.1 (i). Pour vérifier 5.1 (ii), il suffit de prendre $g = g' = x$ (puisque g ou $g' = 1$ dans (ii) le rend évident). On a $x(xa) = xa = a = 1a = (xx)a$; $x(xb) = xc = b = 1b = (xx)b$; et de manière analogue, $x(xc) = (xx)c$. L'orbite de a est $\{a\}$, celle de b est $\{b, c\}$, et c'est aussi celle de c . Le stabilisateur de a est G , et celui de b , et de c , est $\{1\}$.

Théorème 5.4. Soit G un groupe agissant à gauche sur un ensemble E .

- (i) Le stabilisateur d'un élément de E est un sous-groupe de G .
- (ii) E est réunion disjointe des orbites.
- (iii) Si G et E sont finis, la cardinalité d'une orbite est égale à $|G|/|G_e|$, où e est un élément de l'orbite, et G_e le stabilisateur de e .

Notons que la cardinalité d'un groupe est aussi souvent appelé son *ordre*.

Dans les exemples 5.3, les stabilisateurs sont visiblement des sous-groupes. De plus, le plan complexe $\mathbb{C}$ est réunion disjointe des droites horizontales ; et $\{a, b, c\}$ est la réunion disjointe de $\{a\}$ et de $\{b, c\}$.

Avant de prouver le théorème, introduisons une notation¹ et prouvons un lemme : soit G un groupe, H un sous-groupe, et $g \in G$; on note gH le sous-ensemble de G suivant :

$$gH = \{gh | h \in H\}.$$

Ce sous-ensemble de G s'appelle la *classe à gauche de g modulo H* .

On note symétriquement

$$Hg = \{hg | h \in H\},$$

appelé la *classe à droite de g modulo H* .

Lemme 5.5. Avec ces notations, si G est fini, on a $|gH| = |H| = |Hg|$.

Démonstration. La fonction $h \mapsto gh, H \rightarrow gH$ est une surjection par définition. Elle est injective, car $gh = gh'$ implique $h = h'$ en multipliant à gauche par g^{-1} . □

1. Cette notation est compatible avec celle de l'exercice 13, avec l'abus de notation qu'on écrit ici gH au lieu de $\{g\}H$ là-bas.

Preuve du théorème 5.4. (i) Soit $e \in E$. Alors le stabilisateur de e est $H = \{g \in G | ge = e\}$. On a $1 \in H$ car $1e = e$, d'après 5.1 (i). De plus, si $g, h \in H$, alors $(gh)e = g(he)$ (d'après 5.1 (ii)) $= ge$ (puisque $h \in H$) $= e$ (puisque $g \in H$); donc $gh \in H$. Enfin, on a $g^{-1}e = g^{-1}(ge)$ (puisque $g \in H$) $= (g^{-1}g)e = 1e = e$, par 5.1 (ii) et (i). D'où $g^{-1} \in H$. D'après la définition 4.1, H est donc un sous-groupe de G .

(ii) Il suffit de montrer qu'il existe une relation d'équivalence $\sim$ sur E dont les classes d'équivalences sont les orbites. Définissons $\sim$ par : $e \sim e'$ s'il existe $g \in G$ tel que $e' = ge$ (c'est-à-dire, e' appartient à l'orbite de e). Cette relation est réflexive, car $e = 1e$. Elle est symétrique, car $e' = ge \Rightarrow g^{-1}e' = e$, en faisant agir g^{-1} sur les deux membres de la première égalité, et en appliquant 5.1 (ii) et (i). La relation $\sim$ est aussi transitive car si $e' = ge$ et $e'' = g'e'$, alors $e'' = g'(ge) = (g'g)e$, par 5.1 (ii). C'est donc bien une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de e est par définition $\{e' \in E | e' \sim e\} = \{e' \in E | \exists g \in G, e' = ge\}$, c'est-à-dire l'orbite de e .

(iii) On définit une fonction $f : G \rightarrow O$ où O est l'orbite de e , par $f(g) = ge$; cette fonction est bien définie et surjective. Soit $H = G_e$; montrons que l'image réciproque d'un élément ge de O est $gH = \{gh | h \in H\}$; on a en effet $g' \in f^{-1}(ge) \Leftrightarrow f(g') = ge \Leftrightarrow g'e = ge \Leftrightarrow g^{-1}g'e = e \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H \Leftrightarrow g' \in gH$. Or la cardinalité de gH est $|H|$ par le lemme 5.5. Comme les images réciproques de f ont toute la même cardinalité $|H|$, et f étant surjective, on a $|O| = |G|/|H|$. $\square$

Lorsque G agit sur un ensemble E , on appelle *représentant* d'une orbite un élément de cette orbite; un *système de représentants des orbites* est un sous-ensemble de E qui rencontre chaque orbite en un seul élément.

Corollaire 5.6. *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E . Soit S un système de représentants des orbites. On a*

$$|E| = \sum_{e \in S} |G|/|G_e|.$$

Rappelons que $|G|/|G_e|$ est un entier (théorème 5.4 (iii)). On appelle parfois cette égalité l'*équation aux classes*.

Démonstration. Cela découle du théorème 5.4 (ii) et (iii). $\square$

Définition 5.7. *Soit E un groupe et G un sous-groupe de E . Définissons une action à gauche du groupe G sur l'ensemble E par : ge est le produit dans le groupe E de g par e . Cette action s'appelle l'action de G par translation à gauche sur E .*

Notons que c'est bien une action, car E étant un groupe, on a $1e = e$, et $(gg')e = g(g'e)$.

Théorème 5.8. *Soit E un groupe fini et G un sous-groupe de E . Dans l'action définie en 5.7, toutes les orbites ont le même nombre d'éléments. Une telle orbite est une classe à droite de E modulo G (c'est-à-dire de la forme Ge , pour un $e \in E$). Ces orbites sont disjointes et E est égal à leur réunion. Le nombre d'orbites est $|E|/|G|$.*

Le nombre d'orbites est appelé l'*indice* de G dans E , noté $[E : G]$ ². L'indice $[E : G]$ est donc le nombre de classes à droite modulo G . C'est aussi le nombre de classes à gauche modulo G , voir l'exercice 49.

Dans ce cas, notant $\{e_1, \dots, e_k\}$ un système de représentant des orbites, $k = [E : G]$, on a

$$E = \bigcup_{1 \leq i \leq k} Ge_i, \quad (1)$$

où la réunion est disjointe.

Démonstration. Soit $e \in E$. L'orbite de e est par définition $\{ge | g \in G\}$, c'est-à-dire c'est Ge . Par le lemme 5.5, sa cardinalité est $|G|$. la dernière assertion découle de (1). $\square$

Corollaire 5.9. *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe. Alors $|H|$ divise $|G|$.*

Ce résultat est appelé le *théorème de Lagrange*.

Démonstration. En appliquant le théorème 5.8 (avec E, G remplacés par G, H), on trouve que G est réunion disjointe de sous-ensembles qui ont tous le même nombre d'éléments $|H|$. Si n est le nombre de ces sous-ensembles, on a donc $|G| = n|H|$. $\square$

Exercice 38. *On fait agir le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ par translation. Quelles sont les orbites ? Combien y en a-t-il ?*

Exercice 39. *On fait agir $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathbb{C}$ à gauche par $(x, z) \mapsto e^{ix}z$. Vérifier que c'est bien une action. Quelles sont les orbites ?*

2. On dit aussi *index*, qui est le mot anglais.

Exercice 40. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On considère l'action de G sur $\mathbb{C}$ définie par : $[0] \cdot z = z$ et $[1] \cdot z = \bar{z}$.

- a) Vérifier que c'est bien une action.
- b) Décrire les orbites et les stabilisateurs.
- c) Montrer que l'ensemble des orbites est en bijection avec $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Exercice 41. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qu'on fait opérer sur $\mathbb{C}^*$ par : $[0] \cdot z = z$ et $[1] \cdot z = z^{-1}$. Répondre pour cette action aux questions a) et b) de l'exercice 40. Montrer que l'ensemble des orbites est en bijection avec $E = H \cup [1, 0) \cup (0, 1]$, où $H = \{a + bi \in \mathbb{C} | b > 0\}$.

Exercice 42. On fait agir le groupe G des racines n -èmes de l'unité sur $\mathbb{C}$ par : $e^{2ik\pi/n} \cdot z = e^{2ik\pi/n} z$. Vérifier que c'est bien une action, et montrer que toute orbite a n éléments. Décrire ces orbites. Montrer que l'ensemble des orbites est en bijection avec l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^* | 0 \leq \arg(z) < 2\pi/n\}$.

Exercice 43. Soit G un groupe fini agissant à gauche sur E . Soit O une orbite, $e \in O$ et H le stabilisateur de e . Montrer que la fonction qui à une classe à gauche gH modulo H associe ge est une fonction bien définie et bijective de l'ensemble des classes à gauche modulo H dans l'orbite O . En déduire que $|O| = |G|/|H|$.

Exercice 44. Montrer que si le groupe G agit sur deux ensembles disjoints non vides, il agit aussi naturellement sur leur réunion. Montrer qu'il y a au moins deux orbites.

Exercice 45. Soit G un groupe agissant sur E . Montrer que G agit aussi sur $E \times E$ par : $g(e, e') = (ge, ge')$. Montrer que si $|E| \geq 2$, il y a au moins deux orbites pour cette action de G sur $E \times E$ (on l'appelle l'action diagonale).

Exercice 46. * Soit G un groupe agissant sur E . Montrer que G agit sur E^n , $n \geq 1$ par : $g(e_1, e_2, \dots, e_n) = (ge_1, ge_2, \dots, ge_n)$. Montrer que si $|E| \geq 2$, alors il y a au moins 2^{n-1} orbites pour cet action.

Exercice 47. * Soit G un groupe fini agissant à gauche sur l'ensemble fini E . On note $\text{Fix}(g) = \{e \in E | ge = e\}$, et $\text{Stab}(e) = \{g \in G | ge = e\}$ (le stabilisateur de e , aussi noté précédemment G_e).

- a) Montrer que si $ge = e'$ alors $\text{Stab}(e') = g\text{Stab}(e)g^{-1}$.
- b) Déduire que si e, e' sont dans la même orbite C , alors $|\text{Stab}(e)| = |\text{Stab}(e')|$; ce nombre est noté $\text{stab}(C)$.
- c) Montrer que $|C|\text{stab}(C) = |G|$.
- d) Déduire que $\sum_{e \in C} |\text{Stab}(e)| = |G|$, pour toute orbite C .

e) Montrer que $\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{e \in E} |Stab(e)|$.
 f) Dédurre que $(1/|G|) \sum_{g \in G} |Fix(g)|$ est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur E . Cette formule s'appelle la formule de Burnside.

Exercice 48. * Soit G un groupe abélien de cardinalité nm , où n et m sont premiers entre eux. Soit H et K deux sous-groupes de G tel que $|H| = n$ et $|K| = m$. Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 49. Si H est un sous-groupe de G , montrer que $gH \mapsto Hg^{-1} = (gH)^{-1}$ est une bijection entre les classes à gauche modulo H et les classes à droite.

6 Homomorphismes

Définition 6.1. Un homomorphisme de groupes est une fonction f d'un groupe G dans un groupe G' telle que

$$\forall g, g' \in G, f(gg') = f(g)f(g').$$

Autrement dit, f préserve la multiplication, ou plus précisément, transforme la multiplication de G en celle de G' . On remarquera que si G est noté additivement et G' multiplicativement, la dernière égalité s'écrira : $f(g + g') = f(g)f(g')$. Il y a deux autres cas, laissés au lecteur.

Exemple 6.2. 1. Prenons $G = (\mathbb{R}, +)$ et $G' = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Soit $f(x) = e^x$. Alors $f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$. La fonction f est donc un homomorphisme du groupe G vers le groupe G' . Cette fonction a une fonction réciproque $g : G' \rightarrow G$; c'est l'homomorphisme défini par $g(x) = \ln(x)$; on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, donc g est un homomorphisme $G' \rightarrow G$.

2. Soit $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $G' = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. La fonction qui au nombre complexe z associe son module $|z|$ est un homomorphisme de groupes : $|zz'| = |z||z'|$.

3. Soit $G = (\mathbb{Z}, +)$, G' un groupe quelconque et $a \in G'$. La fonction $G \rightarrow G', n \mapsto a^n$ est un homomorphisme. En effet, $a^{n+m} = a^n a^m$ (exercice 31).

Proposition 6.3. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Alors

- (i) $f(1) = 1$;
- (ii) $\forall g \in G, f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Ainsi, un homomorphisme de groupes se comporte comme il faut vis-à-vis de la structure de groupe (produit, inverse, élément neutre). En particulier, l'inverse de l'image d'un élément par un homomorphisme est égal à l'image de l'inverse de cet élément.

Démonstration. (i) On a $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$. En multipliant par l'inverse de $f(1)$ (dans G'), on trouve $1 = f(1)$ (attention : on écrit 1 pour l'élément neutre de G et de G' ; le contexte montre duquel il s'agit : par exemple dans $1 = f(1)$, le premier 1 est dans G' puisqu'il est dans l'image de f , et le second 1 est dans G , puisqu'on lui applique f . Le lecteur qui aime les points sur les i pourra écrire $f(1_G) = 1_{G'}$, etc...).

(ii) On a par (i) $f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(1) = 1$. Donc l'unicité de l'inverse (proposition 3.3) oblige $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$. $\square$

Proposition 6.4. *Les homomorphismes de groupes préservent les sous-groupes par image directe et inverse.*

Voir les exercices 51 et 52.

Définition 6.5. *Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Son noyau, noté $N(f)$, est $\{g \in G \mid f(g) = 1\}$.*

Autrement dit, $N(f) = f^{-1}(1)$.

L'importance de cette notion vient entre autres du théorème qui suit.

On note souvent $N(f) = \ker(f)$ à cause du mot allemand Kern signifiant noyau.

Théorème 6.6. *Soit f un homomorphisme $f : G \rightarrow G'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est injectif ;
- (ii) $N(f) = \{1\}$;
- (iii) $N(f) \subset \{1\}$.

Pour vérifier que f est injectif, il suffit donc de vérifier que

$$f(g) = 1 \Rightarrow g = 1.$$

Démonstration. On a déjà $1 \in N(f)$, d'après la proposition 6.3 (i), donc $\{1\} \subset N(f)$.

(i) implique (ii) : Supposons f injective, et soit $g \in N(f)$. Alors $f(g) = 1 = f(1)$ (par la même proposition que ci-dessus), donc $g = 1$ par injectivité. D'où $N(f) = \{1\}$.

(ii) implique (iii) : évident.

(iii) implique (i) : Supposons que $N(f) \subset \{1\}$ et soient $g, g' \in G$ tels que $f(g) = f(g')$. Alors (astuce!), $1 = f(g)^{-1}f(g') = f(g^{-1})f(g')$ (par la proposition 6.3 (ii)) $= f(g^{-1}g')$. Donc $g^{-1}g' \in N(f) \subset \{1\}$ et donc $g^{-1}g' = 1$ par multiplication par g à droite de chaque côté ; enfin $g = g'$. Ceci montre que f est injective. $\square$

Théorème 6.7. Si $f : G_1 \rightarrow G_2, g : G_2 \rightarrow G_3$ sont des homomorphismes de groupes, il en est de même pour $g \circ f : G_1 \rightarrow G_3$.

Nous laissons la démonstration de ce théorème au lecteur.

Définition 6.8. Un isomorphisme d'un groupe G vers un groupe G' est un homomorphisme bijectif.

Deux groupes sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre. Notation : $G \simeq G'$.

Exemple 6.9. Soit G le groupe commutatif, noté multiplicativement, $G = \{1, a, b\}$ avec $ab = 1, a^2 = b, b^2 = a$. De même, soit G' le groupe commutatif, noté additivement, $G' = \{0, u, v\}$, avec $u + v = 0, u + u = v, v + v = u$. La fonction f , définie par $f(1) = 0, f(a) = u, f(b) = v$ est un isomorphisme de G vers G' . De plus, la fonction g , définie par $g(1) = 1, g(a) = b, g(b) = a$ est un isomorphisme de G vers lui-même.

Proposition 6.10. Si $f : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme de groupes bijectif, alors $f^{-1} : G' \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est un homomorphisme de groupes. Soit x', y' dans G' . Par bijectivité, il existe x, y dans G tels que $x' = f(x), y' = f(y)$. Alors $x'y' = f(x)f(y) = f(xy)$, puisque f est un homomorphisme. De plus, $x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$. Donc $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(f(xy)) = xy = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$. $\square$

Exercice 50. Montrer que si $f : G \mapsto G'$ est un homomorphisme surjectif et si G est commutatif, alors G' est commutatif.

Exercice 51. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Soit H un sous-groupe de G . Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe de G' .

Exercice 52. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Montrer que si H est un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de G .

Exercice 53. Soit f (resp. g) un homomorphisme du groupe G dans le groupe A (resp. B). On définit $\varphi : G \rightarrow A \times B$ par $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Montrer que φ est un homomorphisme de groupes (voir exercice 21) et que $N(\varphi) = N(f) \cap N(g)$.

Exercice 54. * On définit un homomorphisme de monoïdes comme une fonction f d'un monoïde M dans un monoïde M' telle que $f(1) = 1$ et que : $\forall m, m' \in M, f(mm') = f(m)f(m')$.

(i) Montrer que la fonction $D : M \rightarrow \mathbb{R}, D\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ est un

homomorphisme du monoïde multiplicatif des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ dans le monoïde multiplicatif $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que la fonction qui à une partie A de X associe 0 si $|A|$ pair, 1 si $|A|$ impair, est un homomorphisme du monoïde $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ additif.

(iii) Montrer que si M est un monoïde et $a \in M$, la fonction $n \mapsto a^n$ est un homomorphisme de $\mathbb{N}$ additif dans M .

7 Sous-groupes normaux et quotients de groupes

Définition 7.1. Un sous-groupe normal, ou distingué, d'un groupe G est un sous-groupe H tel que $\forall h \in H, \forall g \in G, g^{-1}hg \in H$.

La notion de sous-groupe normal est reliée de très près à celle d'homomorphisme (bien que ça ne saute pas aux yeux, à première vue). En effet, nous avons le théorème suivant.

Théorème 7.2. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Alors $N(f)$ est un sous-groupe normal de G .

Démonstration. Comme $\{1\}$ est un sous-groupe de G' , et que $N(f) = f^{-1}(1)$, $N(f)$ est un sous-groupe de G par la proposition 6.4. Montrons qu'il est normal : si $h \in N(f)$ et $g \in G$, alors $f(g^{-1}hg) = f(g^{-1}h)f(g) = f(g^{-1})f(h)f(g) = f(g)^{-1}1f(g) = f(g)^{-1}f(g) = 1$, d'où $g^{-1}hg \in N(f)$. C'est donc bien un sous-groupe normal. $\square$

On notera que dans un groupe commutatif, tout sous-groupe est normal ; en effet, $g^{-1}hg = hg^{-1}g = h$ est alors dans H . La notion de sous-groupe normal n'acquiert toute son importance que dans le cas non commutatif. Comme nous manquons pour le moment d'exemples de groupes non commutatifs, il faudra patienter pour voir des exemples significatifs de sous-groupes normaux.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir que tout sous-groupe normal s'obtient comme dans le théorème 7.2, i.e. comme noyau d'un homomorphisme. On peut en fait même dire que la notion d'homomorphisme de groupes est équivalente à celle de sous-groupe normal, en un sens bien précis (cf. exercice 62).

Nous avons vu au chapitre précédent la notion de classe à droite : si N est un sous-groupe de G , une classe à droite modulo N est un sous-ensemble de G de la forme Ng où $g \in G$. De même, une *classe à gauche* modulo N est de la forme gN .

Notation (déjà vue dans l'exercice 13) Si A, B sont deux parties du groupe G , nous notons $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les produits d'un élément de A par un élément de B ; nous l'appellerons le *produit* de A par B .

Théorème 7.3. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G .*

(i) *Pour tout $g \in G$, on a $gN = Ng$. Donc toute classe à gauche modulo N est une classe à droite, et vice-versa.*

(ii) *Pour tous $g, g' \in G$, on a $(gN)(g'N) = (gg')N$.*

(iii) *L'ensemble des classes (à gauche ou à droite) modulo N forme un groupe sous la multiplication définie par le produit des parties de G ; l'élément neutre est $1N = N$.*

Nous appellerons $gN = Ng$ la *classe de g modulo le sous-groupe normal N* .

Démonstration. (i) Si $x \in gN$, alors on a $x = gn$ pour un certain $n \in N$. Donc $x = gng^{-1}g = n'g$, où nous avons posé $n' = gng^{-1}$; N étant normal, n' est dans N , d'où $x \in Ng$ et donc $gN \subset Ng$. De manière analogue, on montre l'inclusion inverse. D'où l'égalité.

(ii) Le produit des parties de G est associatif (voir exercice 13). De plus $gN = \{g\}N$. On a donc $(gN)(g'N) = gNg'N = g(Ng')N = g(g'N)N$ (d'après (i)) $= (gg')(NN)$. De plus, $NN = N$, car N est un sous-groupe (voir exercice 13). Donc $(gN)(g'N) = (gg')N$.

(iii) D'après (ii), l'ensemble des classes à gauche modulo N forme un monoïde d'élément neutre N . De plus, $(gN)(g^{-1}N) = (gg^{-1})N = 1N = N$, donc c'est un groupe. $\square$

Définition 7.4. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G . L'ensemble des classes modulo N , avec le produit défini au théorème 7.3, s'appelle le groupe quotient de G par N , noté G/N .*

Théorème 7.5. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G . La fonction qui à un élément g de G associe sa classe modulo N est un homomorphisme surjectif de G dans G/N , de noyau N .*

La fonction $G \rightarrow G/N$ décrite ci-dessus s'appelle l'*homomorphisme canonique* (ou *naturel*), ou encore *projection canonique*, de G dans G/N .

Lemme 7.6. On a : $gN = N \Leftrightarrow g \in N$.

Démonstration. Si $gN = N$, alors, comme $g \in gN$, on a $g \in N$. Réciproquement, si $g \in N$, alors $gN \subset N$, car N est un sous-groupe ; de même, $g^{-1}N \subset N$, donc en multipliant à droite par g , on obtient l'inclusion inverse $N \subset gN$. $\square$

Preuve du théorème 7.5. Le fait que c'est un homomorphisme résulte de la formule (ii) du théorème 7.3. Le noyau est l'ensemble des g tels que $gN = N$ (puisque N est l'élément neutre de G/N) ; donc le noyau est N , par le lemme 7.6. $\square$

Corollaire 7.7. Dans les hypothèses du théorème 7.5, on suppose G fini. Alors $|G| = |N||G/N|$.

Démonstration. Soit p la projection canonique $G \rightarrow G/N$. On vérifie que ses fibres sont les classes modulo N ; et celles-ci ont toutes la même cardinalité $|N|$, par le lemme 5.5. D'où l'égalité. $\square$

Exemple. La construction du quotient contient comme cas particulier celle du quotient de $\mathbb{Z}$ par un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Un tel sous-groupe est de la forme $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Les éléments $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $i + n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les classes de la congruence modulo n . On note aussi $i + n\mathbb{Z} = [i]$, et aussi $i \bmod n$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on additionne comme suit : $[i] + [j] = [i + j]$, autrement dit $(i + n\mathbb{Z}) + (j + n\mathbb{Z}) = (i + j) + n\mathbb{Z}$, conformément à ce qui précède. On représente souvent chaque élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par son représentant dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$; donc on écrit par abus de notation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Par exemple, pour $n = 7$, on écrit $4 + 5 = 2$, en précisant qu'on calcule modulo 7.

Théorème 7.8. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes et N son noyau. Soit $p : G \rightarrow G/N$ l'homomorphisme canonique. Il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : G/N \rightarrow G'$ tel que $f = \bar{f} \circ p$.

On appelle ce théorème *propriété universelle du quotient*. On la représente souvent par un diagramme (qui est dit *commutatif*).

Démonstration. 1. L'unicité de $\bar{f}$ se prouve ainsi : soit x un élément de G/N , donc $x = gN$, $g \in G$. Autrement dit $x = p(g)$. Alors $\bar{f}(x) = \bar{f}(p(g)) = \bar{f} \circ p(g) = f(g)$. Donc $\bar{f}(x)$ est uniquement déterminé.

2. Définissons $\bar{f}$ par $\bar{f}(gN) = f(g)$. Alors $\bar{f}$ est bien définie : si en effet $gN = g'N$, alors $g' \in gN \Rightarrow g = gn$, pour un $n \in N$, d'où $f(g') = f(g)f(n) = f(g)$, puisque $f(n) = 1$, N étant le noyau de f . La fonction $\bar{f}$ est un homomorphisme car $\bar{f}(gNg'N) = \bar{f}(gg'N)$ (par le théorème 7.3 (ii)) $= f(gg') = f(g)f(g') = \bar{f}(gN)\bar{f}(g'N)$. $\square$

Corollaire 7.9. Dans les hypothèses du théorème 7.8, $\bar{f}$ est injectif; si f est de plus surjectif, $\bar{f}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Si $\bar{f}(gN) = e'$ (le neutre de G'), alors $f(g) = e'$ et $g \in N$. Donc $gN = N$ (lemme 7.6), le neutre de G/N . Donc f est injectif, d'après le théorème 6.6.

De plus, si f est surjectif et si $g' \in G'$, il existe $g \in G$ tel que $g' = f(g)$. Alors $g' = \bar{f}(p(g))$. Donc $\bar{f}$ est surjectif. $\square$

Corollaire 7.10. Dans les hypothèses du théorème 7.8, $\text{Im}(f)$ est isomorphe à $G/\text{Ker}(f)$.

Exercice 55. Montrer que si H est un sous-groupe de G , alors H est normal si et seulement si : $\forall u, v \in G, uv \in H \Leftrightarrow vu \in H$.

Exercice 56. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes normaux est un sous-groupe normal.

Exercice 57. (Mêmes hypothèses que dans l'exercice 51). On suppose que f est surjectif et que H est normal. Montrer que $f(H)$ est normal dans G' .

Exercice 58. (Mêmes hypothèses que dans l'exercice 52). Montrer que si H est un sous-groupe normal de G' , alors $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe normal de G .

Exercice 59. Soit $f : G \rightarrow G', g : G' \rightarrow G''$ des homomorphismes de groupes. Montrer que $N(g \circ f) = f^{-1}(N(g))$.

Exercice 60. Soit A une partie du groupe G . Montrer que $C = \{g \in G \mid \forall a \in A, ga = ag\}$ et $N = \{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}$ sont des sous-groupes de G , et que C est un sous-groupe normal de N .

Exercice 61. * Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) H est normal.
- (ii) $\forall g \in G, gH = Hg$.
- (iii) $\forall g, g' \in G, (gH)(g'H) = (gg')H$.
- (iv) $\forall g \in H, (gH)^{-1} = (g^{-1})H$ (pour $A \subset G$, on pose ici $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$).

Exercice 62. Montrer que tout sous-groupe normal d'un groupe est le noyau d'un certain homomorphisme.

Exercice 63. Soit H, N des sous-groupes d'un groupe G . On suppose que N est normal. Montrer que $HN = NH$, et que HN est un sous-groupe de G .

Exercice 64. Soit G un groupe agissant à gauche sur un ensemble E . Soit A une partie de E . On note $g \cdot A = \{g \cdot a \mid a \in A\}$. Soit $N = \{g \in G \mid g \cdot A = A\}$ et $C = \{g \in G \mid \forall a \in A, g \cdot a = a\}$. Montrer que N est un sous-groupe de G , et que C est un sous-groupe normal de N .

Exercice 65. Prouver que le groupe des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, avec la multiplication des matrices, est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 66. Montrer que le groupe de l'exercice 34 est isomorphe à R/Z .

Exercice 67. * Une congruence d'un groupe (ou d'un monoïde) G est une relation d'équivalence $\sim$ sur G telle que : $\forall g, g', h, h' \in G, g \sim g' \text{ et } h \sim h' \Rightarrow gh \sim g'h'$.

a) Soit $\sim$ une congruence du groupe G . Montrer que la classe de 1 est un sous-groupe normal N de G . Montrer que $g \sim h$ implique $g^{-1} \sim h^{-1}$. Montrer que la classe de g modulo $\sim$ est $gN = Ng$.

b) Montrer que si N est un sous-groupe normal de G , on a : $\forall g, h \in G, gh^{-1} \in N \Leftrightarrow h^{-1}g \in N$. Montrer que la relation $\sim$ sur G définie par : $g \sim h \Leftrightarrow gh^{-1} \in N$, est une congruence de G (notée parfois $g \equiv h \pmod{N}$). Montrer que la classe de g pour $\sim$ est $gN = Ng$.

c) Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Montrer que la relation $\sim$ sur G définie par : $g \sim h \Leftrightarrow f(g) = f(h)$, est une congruence de G . Montrer que la classe de g est $f^{-1}(f(g)) = gN(f) = N(f)g$.

8 Groupes cycliques

Une conséquence de la propriété universelle du quotient est le *théorème chinois*. Rappelons la notion de *produit cartésien de groupes* : voir l'exercice 21.

Théorème 8.1. Soit $n = n_1 \cdots n_k$, $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$, où les n_i sont des entiers premiers entre eux deux à deux. Alors la fonction

$$x \pmod{n} \mapsto (x \pmod{n_1}, \dots, x \pmod{n_k}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z},$$

est un isomorphisme de groupes bien défini.

Démonstration. Considérons la fonction $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}, x \mapsto (x \bmod n_1, \dots, x \bmod n_k)$. C'est un homomorphisme de groupes, dont le noyau est l'intersection des noyaux des homomorphismes canoniques $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_i$ (exercice 53); le noyau de ce dernier homomorphisme est $n_i\mathbb{Z}$, et l'intersection des $n_i\mathbb{Z}$ est $n\mathbb{Z}$ car les n_i sont premiers entre eux deux à deux. Par le théorème 7.8 et le corollaire 7.9, la fonction de l'énoncé est donc un homomorphisme de groupes injectif; comme les deux côtés ont la même cardinalité, il est aussi surjectif. $\square$

Définition 8.2. Un groupe G est dit cyclique s'il existe un homomorphisme surjectif $\mathbb{Z} \rightarrow G$.

Il s'agit bien entendu de $\mathbb{Z}$ additif ($\mathbb{Z}$ multiplicatif n'est pas un groupe).

Proposition 8.3. Pour tout entier naturel n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique. En particulier $\mathbb{Z}$ est cyclique.

Démonstration. L'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est en effet surjectif. Pour $n = 0$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. $\square$

Théorème 8.4. Un groupe G est cyclique si et seulement s'il existe un élément $a \in G$ tel que tout élément de G soit de la forme $a^n, n \in \mathbb{Z}$.

Un tel élément a s'appelle un *générateur* du groupe cyclique G , et on dit que a engendre G . Pour la notation a^n , voir l'exercice 31.

Démonstration. Si G est cyclique, il existe un homomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$. Posons $a = f(1)$. Soit $g \in G$, quelconque. Comme f est surjectif, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = g$. Si $n \geq 0$, alors $f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1)$ (n fois) $= f(1)f(1) \cdots f(1)$ (n fois) $= a^n$. Si $n < 0$, alors $f(n) = f(-(-n)) = f(-n)^{-1}$ (par la proposition 6.3) $= (a^{-n})^{-1}$ (par ce que nous venons de voir) $= a^n$. Donc, tout élément de G est de la forme $a^n, n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si tout élément de G est de la forme a^n , définissons une fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$, par $f(n) = a^n$. Elle est surjective par hypothèse, et c'est un homomorphisme par la loi des exposants, voir l'exercice 31. $\square$

Théorème 8.5. Soit G un groupe cyclique. S'il est infini, il est isomorphe à $\mathbb{Z}$. S'il est fini, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

En particulier, un groupe cyclique est toujours commutatif.

Démonstration. Par hypothèse, il existe un homomorphisme surjectif $h : \mathbb{Z} \rightarrow G$. Si $N(h) = \{0\}$, h est injectif d'après le théorème 6.6, donc bijectif, et c'est un isomorphisme. Si $N(h) \neq \{0\}$, $N(h) = n\mathbb{Z}$ pour un entier naturel $n \geq 1$ (théorème 4.3). Il existe alors d'après le corollaire 7.9 un isomorphisme $h : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$. $\square$

L'ordre d'un élément g d'un groupe G , notée multiplicativement, est le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k = 1$; si un tel k n'existe pas, g est dit d'ordre infini. On notera que l'ordre de l'élément neutre est, par cette définition, égal à 1.

Lorsque G est noté additivement, l'ordre de g est le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $ng = 0$, où ng désigne l'addition n fois de g avec lui-même.

Par exemple, l'ordre de 8 dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (additif!) est 3; faire l'exercice 77.

Théorème 8.6. *Soit G un groupe, $g \in G$ et H le sous-groupe engendré par g . L'ordre de g est égal à la cardinalité de H , qui est un groupe cyclique. S'il est fini, égal à k , alors l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $g^n = 1$ est $k\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On a $H = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Si g est d'ordre infini, H est infini.

Supposons maintenant que g est d'ordre fini k . Alors $g^k = 1$, donc $H^+ = \{g^n | n \in \mathbb{N}\} = \{1, g, \dots, g^{n-1}\}$; de plus tout g^n , $n < 0$ est égal g^{n+Nk} , avec $n + Nk > 0$ pour N assez grand, donc $H \subset H^+$; donc H est fini.

Dans ce cas aussi, les éléments $1, g, \dots, g^{n-1}$ sont tous distincts : en effet, $g^i = g^j$ avec $0 \leq i \leq j \leq n-1$, implique $g^{j-i} = 1$, et comme $0 \leq j-i < n$, on doit avoir $j = i$. Donc $|H| = k$.

Par la loi des exposants, la fonction $h : n \mapsto g^n, \mathbb{Z} \rightarrow H$ est un homomorphisme surjectif; donc H est un groupe cyclique. Si H est fini, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, où $\ell\mathbb{Z}$ est le noyau de h . Alors $\ell = |H|$, et $\ell = k$, l'ordre de k , et par définition du noyau, l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $g^n = 1$ est $k\mathbb{Z}$. $\square$

Le corollaire 5.9 implique donc la variante suivante du théorème de Lagrange :

Corollaire 8.7. *Dans un groupe fini G , l'ordre d'un élément divise $|G|$, et $g^{|G|} = 1$.*

Proposition 8.8. *Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a \bmod n$ est un générateur du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a est premier avec n .*

Démonstration. Faire l'exercice 72. $\square$

Lorsqu'on identifie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\{0, 1, \dots, n-1\}$, les générateurs de ce groupe sont donc les éléments de cet ensemble qui sont premiers avec n .

Rappelons que, pour n entier naturel non nul, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers premiers avec n qui sont dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Cette fonction s'appelle l'*indicateur d'Euler*.

Corollaire 8.9. *Il y a $\varphi(n)$ générateurs dans un groupe cyclique d'ordre n .*

Démonstration. Le groupe en question est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est en bijection avec l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Un élément de cet ensemble est un générateur du groupe si et seulement s'il est premier avec n (proposition 8.8). Donc il y a $\varphi(n)$ générateurs de ce groupe. $\square$

Exercice 68. *Montrer que le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ ($n \geq 1$) de $\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Exercice 69. *Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ un homomorphisme surjectif et H un sous-groupe de G . Définir un homomorphisme surjectif $f^{-1}(H) \rightarrow H$. Utiliser l'exercice 68 pour montrer que H est un groupe cyclique.*

Exercice 70. * *Soit G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, de la forme $z \mapsto az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Montrer qu'avec la composition des fonctions, G est un groupe non commutatif. Soit N l'ensemble des fonctions de la forme $z \mapsto z + b$; montrer que N est un sous-groupe normal de G . Soit H l'ensemble des fonctions de la forme $z \mapsto az, a \neq 0$; montrer que H est un sous-groupe de G , qui n'est pas normal.*

Exercice 71. *Vérifiez qu'avec la multiplication matricielle, l'ensemble suivant est un groupe, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 72. *Montrer que $x + n\mathbb{Z}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si x est premier avec n .*

Exercice 73. *Montrer que l'ordre de $x + n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $n/\text{pgcd}(x, n)$.*

Exercice 74. *Montrer que $n + 6\mathbb{Z} \mapsto n + 3\mathbb{Z}$ est un homomorphisme surjectif bien défini de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Quel est son noyau ?*

Exercice 75. * *Généraliser l'exercice précédent à $\mathbb{Z} + ab\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$).*

Exercice 76. Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Aide : définir $n \mapsto (n + 2\mathbb{Z}, n + 3\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et utiliser le corollaire 7.9.

Exercice 77. Déterminer les ordres des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (attention à la notation additive).

Exercice 78. Trouver un isomorphisme (s'il en existe) entre les groupes suivants :

- a) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- b) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Indication : montrer qu'il existe un élément d'ordre 4 dans l'un des deux.
- c) $\mathbb{R}_+^* \times \{1, -1\}$ et $\mathbb{R}^*$ (avec la multiplication).

Exercice 79. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en bijection avec les diviseurs de n .

Exercice 80. Montrer que tout groupe de cardinalité p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 81. Soit G un groupe d'exposant n , c'est-à-dire tel que $\forall g \in G$, on a $g^n = 1$. Montrer que la fonction $G \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G, (g, i) \mapsto g^i$ est bien définie.

Exercice 82. Un groupe est dit simple s'il n'a pas d'autre sous-groupes normaux que $\{1\}$ et lui-même. Montrer que le groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple si et seulement si p est premier.

Exercice 83. * Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G , alors H est normal et G/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 84. * Soit G un groupe, $a \in G, b \in G$. On suppose que les ordres de a et b sont premiers entre eux.

- a) Si G est commutatif, montrer que l'ordre de ab est le produit des ordres de a et de b .
- b) Le résultat a) est-il vrai si G n'est pas commutatif ?

Exercice 85. Dans un groupe abélien, on suppose que a est d'ordre n et b d'ordre m . Montrer que l'ordre de ab n'est pas le ppmc de a et b en général.

Exercice 86. * Prouver que le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas cyclique.

Exercice 87. * Prouver que le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est infini mais que tous ses éléments sont d'ordre fini.

Exercice 88. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$, un ensemble à n éléments. Définir sur l'ensemble des fonctions $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une structure de groupe et montrer que ce groupe est isomorphe à $(\mathcal{P}(X), \Delta)$, où Δ dénote la différence symétrique.

Exercice 89. Soit $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorphisme de groupes. Montrer que si G est fini alors $\forall g \in G$, $\phi(g)$ est une racine de l'unité.

Exercice 90. * Soit $G = \mathbb{R}_+^*$ (groupe multiplicatif) qui agit sur $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Décrire les orbites ;

b) Montrer que l'ensemble des orbites est en bijection avec $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, lorsqu'on identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$;

c) Montrer que X est un groupe (avec la multiplication de $\mathbb{C}$), qui est isomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}_+^*$.

9 Conjugaison

Deux éléments g, g' d'un groupe G sont dits *conjugués* s'il existe x dans G tel que $g' = xgx^{-1}$.

Lemme 9.1. Soit G un groupe.

(i) g, g' sont conjugués si et seulement s'il existe y dans G tel que $g' = y^{-1}gy$.

(ii) g, g' sont conjugués si et seulement s'il existe a, b dans G tel que $g = ab$ et $g' = ba$.

(iii) Si G est commutatif, g, g' sont conjugués si et seulement s'ils sont égaux.

Démonstration. (i) Si g, g' sont conjugués, alors il existe x tel que $g' = xgx^{-1}$; avec $y = x^{-1}$, on a $y^{-1} = x$, donc $g' = y^{-1}gy$. La réciproque est analogue.

(ii) Supposons que $g = ab$ et $g' = ba$; alors $g' = b(ab)b^{-1}$. Réciproquement, si $g' = xgx^{-1}$, alors $g = (gx^{-1})x$ et $g' = x(gx^{-1})$.

(iii) Si $g' = g$, alors ils sont conjugués. Si $g' = xgx^{-1}$, alors, par commutativité, $g' = xx^{-1}g = g$.

□

Proposition 9.2. La conjugaison est une relation d'équivalence.

Pour la preuve, faire l'exercice ?? . Une classe d'équivalence s'appelle une *classe de conjugaison*.

Proposition 9.3. *Un élément g de G n'est conjugué qu'à lui-même si et seulement s'il commute avec tous les éléments de G . L'ensemble de ces éléments est un sous-groupe normal de G , appelé le centre de G .*

Proposition 9.4. *On définit une fonction $G \times G \rightarrow G, (g, x) \mapsto gxg^{-1}$. C'est une action à gauche de G sur lui-même : $g \cdot x = gxg^{-1}$, dont les orbites sont les classes de conjugaison.*

Démonstration. On a $(g_1g_2) \cdot x = (g_1g_2)x(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2xg_2^{-1})g_1^{-1} = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$. Et $1 \cdot x = 1x1^{-1} = x$.

L'orbite de x est $\{gxg^{-1}, g \in G\}$, c'est donc la classe de conjugaison de x . $\square$

On définit la fonction γ_g de G dans G telle que

$$\forall x \in G, \gamma_g(x) = gxg^{-1}.$$

Proposition 9.5. *La fonction γ_g est un automorphisme de G ; son inverse est la fonction $\gamma_{g^{-1}}$.*

Un tel automorphisme de G s'appelle un *automorphisme intérieur* de G . Rappelons que les automorphismes de G forment un groupe sous la composition des fonctions ; ce groupe est noté $\text{Aut}(G)$.

Proposition 9.6. *La fonction $g \mapsto \gamma_g$ est un homomorphisme de G vers $\text{Aut}(G)$. Son noyau est le centre de G .*

Proposition 9.7. *L'ensemble des automorphismes intérieurs de G est un sous-groupe normal de $\text{Aut}(G)$.*

Plus généralement, on dit que deux parties A, B de G sont conjuguées s'il existe $g \in G$ tel que $B = gAg^{-1}$ ($= \{gag^{-1} | g \in G\}$). On parlera donc de deux *sous-groupes conjugués*, par exemple.

Ceci s'exprime aussi par l'action par conjugaison de G sur l'ensemble des parties de G : c'est l'action $g \cdot A = gAg^{-1}$. C'est une action à gauche.

On appelle *normalisateur* de A l'ensemble des g dans G tels que $gAg^{-1} = A$; autrement dit, c'est le stabilisateur de A dans l'action ci-dessus. C'est donc un sous-groupe de G .

Le *centralisateur* de A est l'ensemble des g dans G tels que $gag^{-1} = a$ pour tout $a \in A$; de manière équivalente $ga = ag$, c'est-à-dire que g commute avec tous les éléments de A .

Proposition 9.8. *Soit A une partie de G . Le centralisateur de A est un sous-groupe normal du normalisateur de A .*

Si A est un sous-groupe de G , alors A est un sous-groupe normal de son normalisateur, et celui-ci est le plus grand sous-groupe de G dans lequel A est un sous-groupe normal

Démonstration. La preuve que le centralisateur C de A est un sous-groupe du normalisateur N de A est laissée au lecteur. Montrons que C est un sous-groupe normal de N . Soit $h \in N$ et $g \in C$. Alors pour tout a dans A , hah^{-1} est dans A , donc $g(hah^{-1})g^{-1} = hah^{-1}$; donc $h^{-1}ghah^{-1}g^{-1}h = h^{-1}hah^{-1}h = a$; comme l'inverse de $h^{-1}gh$ est $h^{-1}g^{-1}h$, on en déduit que $h^{-1}gh$ est dans C .

Supposons maintenant que A est un sous-groupe de G . Comme $gAg^{-1} = A$ pour tout $g \in N$, A est normal dans N . Supposons que P est un sous-groupe de G tel que A soit un sous-groupe normal de P . Si $g \in P$, alors $gAg^{-1} \subset A$ car A est normal dans P ; comme g^{-1} est dans P , on a aussi $g^{-1}Ag \subset A$. Donc $gAg^{-1} = A$, et par suite g est dans N . Donc $N \subset P$. $\square$

Exercice 91. *Montrer qu'un sous-groupe H de G est normal si et seulement s'il est réunion de classes de conjugaison.*

Exercice 92. *On dit que deux matrices carrées A, B de même taille sont conjuguées s'il existe une matrice carrée inversible P de même taille telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer qu'alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$. Montrer qu'elles ont même polynôme caractéristique.*

Exercice 93. *Un élément de la forme $x\gamma_y(x^{-1})$ de G , avec $x, y \in G$, s'appelle un commutateur de G . Montrer que de manière équivalente c'est un élément de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. Montrer que G est commutatif si et seulement si tous les commutateurs sont égaux à 1.*

Exercice 94. *Un sous-groupe H du groupe G est dit caractéristique si pour tout automorphisme ϕ de G , on a $\phi(H) \subset H$. Montrer qu'un sous-groupe caractéristique de G est toujours normal.*

Exercice 95. ** Un sous-groupe H du groupe G est dit maximal si $H \neq G$, et si pour tout sous-groupe K de G , on a : $H \subset K \Rightarrow H = K$ ou $K = G$. Montrer que l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de G est un sous-groupe normal de G .*

10 Groupes symétriques

Définition 10.1. Soit $n \geq 1$. Le groupe symétrique S_n est l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même. Une telle bijection s'appelle une permutation.

Théorème 10.2. Le groupe symétrique S_n est un groupe sous la composition des fonctions.

La démonstration est laissée au lecteur. Regardons plutôt comment on représente une permutation. Prenons $n = 5$; alors la permutation σ définie par $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 3$ est représentée par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ou plus simplement par le mot 24513. L'inverse de σ est $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ou 41523. L'élément neutre est la fonction identité de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, c'est-à-dire la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 12345$. Considérons la permutation $\alpha = 51432$. Alors $\sigma \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On a évidemment $\sigma^{-1} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'identité.

Proposition 10.3. Il y a $n!$ permutations dans S_n .

Par exemple, $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ a 6 éléments.

Démonstration. Toute permutation dans S_n se représente de manière unique par un mot $i_1 i_2 \dots i_n$, où $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$; les i_j sont distincts et leur ensemble est exactement $\{1, 2, \dots, n\}$. On a donc n choix pour i_1 , puis $n-1$ choix pour i_2 , etc. . . Donc le nombre de permutations est $n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$. $\square$

Définition 10.4. Une inversion d'une permutation $\sigma \in S_n$ est un couple $(\sigma(i), \sigma(j))$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions de σ est noté $\ell(\sigma)$.

Par abus, on écrira simplement $\sigma(i)\sigma(j)$ pour l'inversion. Par exemple, les inversions de $\sigma = 24513$ sont 21, 41, 43, 51, 53 : il y en a 5, donc $\ell(\sigma) = 5$.

Définition 10.5. Une transposition adjacente est une permutation τ dans S_n qui échange deux valeurs consécutives i et $i+1$ dans S_n , c'est-à-dire telle que $\tau(i) = i+1, \tau(i+1) = i$ et $\tau(j) = j$ si $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$.

Lemme 10.6. Soit σ une permutation dans S_n et τ la transposition adjacente dans S_n qui échange i et $i+1$. Soit $\alpha = \sigma \circ \tau$. Alors α a une inversion de plus ou de moins que σ , selon que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ ou $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

Prenons par exemple $\sigma = 24513$ et τ qui échange 3 et 4. Alors $\alpha = \sigma \circ \tau = 24153$ (c'est-à-dire qu'on a échangé les 3ème et 4ème nombres dans σ , à savoir 5 et 1); comme $\sigma(3) = 5 > 1 = \sigma(4)$, α a une inversion de moins : en effet, les inversions de α sont les mêmes que celles de σ , sauf 51.

Démonstration. Écrivons $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$. On a alors $\alpha = \sigma \circ \tau = a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} a_i a_{i+2} \dots a_n$, c'est-à-dire que α s'obtient à partir de σ en y échangeant le i -ème et le $(i+1)$ -ème nombre. Si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, c'est-à-dire que $a_i < a_{i+1}$, $a_i a_{i+1}$ n'est pas une inversion de σ , et $a_{i+1} a_i$ est une inversion de α . Si par contre $a_i > a_{i+1}$, alors $a_i a_{i+1}$ est une inversion de σ , et $a_{i+1} a_i$ n'est pas une inversion de α . Comme toute autre inversion de σ se retrouve dans α , et vice-versa, le lemme s'en déduit. $\square$

Théorème 10.7. Toute permutation σ est un produit de $\ell(\sigma)$ transpositions adjacentes.

Démonstration. (récurrence sur $\ell(\sigma)$) Si $\ell(\sigma) = 0$, σ est l'identité, qui correspond au produit vide. Supposons $\ell(\sigma) > 0$. Alors on ne peut pas avoir $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)$. Il existe donc i tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ soit une inversion de σ . Soit τ la transposition adjacente qui échange i et $i+1$ et $\alpha = \sigma \circ \tau$. D'après le lemme 10.6, $\ell(\alpha) = \ell(\sigma) - 1$, donc α est, par hypothèse de récurrence, égal à un produit de $\ell(\sigma) - 1$ transpositions adjacentes. Donc $\sigma = \alpha \circ \tau^{-1} = \alpha \circ \tau$ (car $\tau = \tau^{-1}$) est un produit de $\ell(\sigma)$ transpositions adjacentes. $\square$

La preuve ci-dessus est parfaitement algorithmique. Écrivons $(i, i+1)$ pour la transposition adjacente qui échange i et $i+1$ et regardons $\sigma = 24513$. On a

$$24513 = 24153 \circ (3, 4);$$

$$24153 = 21453 \circ (2, 3);$$

$$21453 = 12453 \circ (1, 2);$$

$$12453 = 12435 \circ (4, 5);$$

$$12435 = 12345 \circ (3, 4) = (3, 4).$$

D'où

$$\sigma = 24153 \circ (3, 4) = 21453 \circ (2, 3) \circ (3, 4) = \dots = (3, 4) \circ (4, 5) \circ (1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4).$$

Corollaire 10.8. Soit $\epsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$, $\epsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. Alors ϵ est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$; il est surjectif si $n \geq 2$.

On appelle $\epsilon(\sigma)$ la *signature* de σ .

Démonstration. Pour montrer que σ est un homomorphisme, il suffit de montrer que

$$\ell(\sigma \circ \alpha) \equiv \ell(\sigma) + \ell(\alpha) \pmod{2}.$$

en effet, on aura alors

$$\epsilon(\sigma \circ \alpha) = (-1)^{\ell(\sigma \circ \alpha)} = (-1)^{\ell(\sigma) + \ell(\alpha)} = (-1)^{\ell(\sigma)} (-1)^{\ell(\alpha)} = \epsilon(\sigma) \epsilon(\alpha).$$

Démontrons donc cette congruence par récurrence sur $\ell(\alpha)$. Si $\ell(\alpha) = 0$, α est l'identité, et c'est clair. Si $\ell(\alpha) > 0$, nous pouvons écrire $\alpha = \beta \circ \tau$, où $\tau = (i, i+1)$ et $\ell(\beta) = \ell(\alpha) - 1$ (lemme 10.6). Alors, par hypothèse de récurrence, $\ell(\sigma \circ \beta) \equiv \ell(\sigma) + \ell(\beta) \pmod{2}$. Par ailleurs, le lemme 10.6 montre que $(\sigma \circ \beta) \circ \tau$ a une inversion de plus ou de moins que $\sigma \circ \beta$. Donc

$$\ell(\sigma \circ \alpha) = \ell(\sigma \circ \beta \circ \tau) \equiv \ell(\sigma \circ \beta) + 1 \equiv \ell(\sigma) + \ell(\beta) + 1 = \ell(\sigma) + \ell(\alpha) \pmod{2},$$

ce qui démontre la congruence.

Si $n \geq 2$, on a $\epsilon(\sigma) = -1$, pour $\sigma = (1, 2)$, et σ est surjective. □

Corollaire 10.9. Si $n \geq 2$, le noyau de ϵ est un sous-groupe normal de S_n , qui a $n!/2$ éléments.

Ce groupe s'appelle le *groupe alterné*, souvent noté A_n ³ ; les permutations dont la signature est 1 sont appelées *paires*, les autres *impaires*.

Démonstration. A_n est un sous-groupe normal d'après le théorème 7.2. Si $n \geq 2$, S_n est la réunion disjointe des deux sous-ensembles A_n et $S_n \setminus A_n$, qui ont autant d'éléments l'un que l'autre ($\sigma \mapsto \sigma \circ (1, 2)$ est une bijection de A_n dans $S_n \setminus A_n$). Donc $|A_n| = n!/2$, d'après la proposition 10.3. □

3. Mais dans la théorie des groupes de Coxeter, la notation A_n désigne le groupe symétrique S_{n+1} .

Définition 10.10. Un cycle de longueur $k \geq 2$ est une permutation σ dans S_n telle qu'il existe k entiers distincts $j_1, \dots, j_k$ dans $\{1, \dots, n\}$ satisfaisant :

$$\sigma(j_1) = j_2, \sigma(j_2) = j_3, \dots, \sigma(j_{k-1}) = j_k, \sigma(j_k) = j_1,$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}, \sigma(i) = i.$$

On appelle $\{j_1, \dots, j_k\}$ l'orbite du cycle. Deux cycles sont dits disjoints si leurs orbites sont disjointes. Une transposition est un cycle de longueur 2. Une permutation circulaire dans S_n est un cycle de longueur n .

On dit k -cycle pour cycle de longueur k . Il n'y a pas de 1-cycle⁴. Un cycle est un k -cycle pour un certain $k \geq 2$. Un point fixe d'une permutation σ est un i tel que $\sigma(i) = i$.

Par exemple, $\sigma = 24351$ est un cycle de longueur 4, d'orbite $\{1, 2, 4, 5\}$, puisque $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 1$ et que $\sigma(3) = 3$. On note le cycle $(j_1, j_2, \dots, j_k)$, avec les notations de la définition 10.10. Ainsi, le cycle ci-dessus se représente par $(1, 2, 4, 5)$; mais aussi par $(2, 4, 5, 1)$, $(4, 5, 1, 2)$ ou $(5, 1, 2, 4)$. La permutation 14325 est une transposition, puisque c'est le cycle $(2, 4)$, et 31524 est la permutation circulaire $(1, 3, 5, 4, 2)$.

Théorème 10.11. Toute permutation s'écrit de manière unique comme un produit de cycles deux à deux disjoints.

Nous n'allons pas démontrer ce théorème, mais l'illustrer par la décomposition d'une permutation particulière. Prenons $\sigma = 729158436$ dans S_9 . Nous partons de 1 et écrivons ses images sous σ, σ^2 , etc..., jusqu'à ce qu'on retrouve 1 : $\sigma(1) = 7, \sigma(7) = 4, \sigma(4) = 1$. Ceci nous donne le cycle $(1, 7, 4)$. Continuant avec 2, le plus petit entier qui n'est pas apparu jusqu'ici, nous voyons que $\sigma(2) = 2$: 2 est point fixe de σ . Nous continuons avec 3 : $\sigma(3) = 9, \sigma(9) = 6, \sigma(6) = 8, \sigma(8) = 3$, ce qui nous donne le cycle $(3, 9, 6, 8)$. Le seul nombre qui reste est 5, qui est point fixe. D'où la décomposition

$$\sigma = (1, 7, 4) \circ (3, 9, 6, 8).$$

On remarque que deux cycles disjoints commutent. On peut donc écrire

$$\sigma = (3, 9, 6, 8) \circ (1, 7, 4),$$

4. Il y a de bonnes raisons pour cela; par exemple l'unicité dans le théorème 10.11 n'est pas vraie si on admet les 1-cycles.

et c'est à cette commutation près qu'il y a unicité de la décomposition en cycles.

Remarquons que pour $n \geq 3$, S_n n'est pas commutatif; en effet, les transpositions $(1, 2)$ et $(2, 3)$ ne commutent pas.

On appelle *multi-ensemble* un ensemble avec des répétitions d'éléments; le nombre de fois qu'un élément est répété s'appelle la *multiplicité* de cet élément. Par exemple $\{1, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 8\}$ est un multi-ensemble, où la multiplicité de 1 est 3, et où celle de 5 est 2, et où les éléments 2, 3 et 8 sont chacun de multiplicité 1. Ce multi-ensemble est différent de $\{1, 1, 2, 3, 5, 5, 8\}$.

Définition 10.12. *Le type cyclique d'une permutation est le multi-ensemble des longueurs de ses cycles dans son écriture en produit de cycles deux à deux disjoints, en y incluant autant de 1 qu'elle a de points fixes.*

Par exemple, le type cyclique de la permutation de S_{10} , égale à $(1, 2)(3, 4, 5)(6, 7, 8)$ est $\{1, 1, 2, 3, 3\}$, car elle a les deux points fixes 10 et 9, un 2-cycle, et deux 3-cycles. Remarquez qu'on omet souvent le symbole $\circ$ dans la décomposition en cycles.

Théorème 10.13. *Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même type cyclique.*

Lemme 10.14. *(conjugaison d'un k -cycle) On a*

$$\sigma \circ (i_1, \dots, i_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)).$$

Preuve du théorème 10.13. Soit $\alpha, \beta, \sigma \in S_n$ telles que $\beta = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}$.

Soit i un point fixe de α ; alors $\beta(\sigma(i)) = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1} \circ \sigma(i) = \sigma(\alpha(i)) = \sigma(i)$, et donc $\sigma(i)$ est un point fixe de β . La réciproque est similaire. Donc α et β ont autant de points fixes. Écrivons α comme produit de cycles disjoints (théorème 10.11) : $\alpha = c_1 \circ \dots \circ c_h$. D'après le lemme 10.14, tout conjugué d'un k -cycle est un k -cycle, et les conjugués par σ de deux cycles disjoints sont des cycles disjoints. De plus γ_σ est un automorphisme de S_n (proposition 9.5). On obtient donc que $\beta = \gamma_\sigma(\alpha) = \gamma_\sigma(c_1) \circ \dots \circ \gamma_\sigma(c_h)$ a le même type cyclique que α .

Supposons maintenant que $\alpha, \beta \in S_n$ aient le même type cyclique, lequel est un multi-ensemble E . Nous pouvons donc écrire $\alpha = \prod_{k \in E} c_k$, où le produit est la composition des permutations, et où c_e désigne un k -cycle $(i_1, \dots, i_k)$ de la décomposition en cycle disjoints de α . De même pour $\beta = \prod_{k \in E} d_k$, où $d_k = (j_1, \dots, j_k)$. Nous définissons une permutation dans S_n par $\sigma(i_h) = j_h$, pour tous les $h = 1, \dots, k$ et tous les $k \in E$. Cette condition définit une bijection de la réunion des orbites des cycles de α sur celle de

β . On complète arbitrairement σ en une bijection de $[n]$ sur lui-même. Le lemme 10.14 implique alors que $\beta = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}$. $\square$

Corollaire 10.15. *Soit $p(n)$ le nombre de k -uplets décroissants (au sens large) d'entiers naturels ≥ 1 dont la somme est n . Alors le nombre de classes de conjugaison de S_n est $p(n)$.*

Démonstration. L'ensemble des k -uplets décroissants (au sens large) d'entiers naturels ≥ 1 dont la somme est n est en bijection naturelle avec l'ensemble des multi-ensembles dont la somme totale est n . On applique alors le théorème 10.13, en ayant observé qu'à chaque multi-ensemble de cette sorte correspond une classe de conjugaison de S_n . $\square$

Théorème 10.16. (Cayley) *Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique S_n .*

Démonstration. 1. Soit G un groupe fini de cardinal n . Pour tout $g \in G$, soit $\sigma_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$. Alors σ_g est une bijection $G \rightarrow G$. En effet, pour tous $x, y \in G$, $y = \sigma_g(x)$ est équivalent à $y = gx$, ce qui est équivalent à $x = g^{-1}y$; donc tout y dans G a un unique antécédant par σ_g .

2. On a $\sigma_{gh}(x) = ghx = \sigma_g(hx) = \sigma_g \circ \sigma_h(x)$; ceci implique que $\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h$. Donc la fonction $\phi : g \mapsto \sigma_g$ est un homomorphisme de G vers le groupe S_G des bijections de G dans G : en effet, la dernière égalité implique $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$.

3. L'homomorphisme ϕ est injectif car $\sigma_g = id$ implique $g = ge = \sigma_g(e) = id(e) = e$, donc le noyau de σ est réduit à e .

4. Soit $b : G \rightarrow [n]$ une bijection. Soit $u : S_G \rightarrow S_n$ la fonction $u(\sigma) = b \circ \sigma \circ b^{-1}$. Alors u est isomorphisme de groupes. En effet, pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in S_G$, on a $u(\sigma_1 \circ \sigma_2) = b \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ b^{-1} = b \circ \sigma_1 \circ b^{-1} \circ b \circ \sigma_2 \circ b^{-1} = u(\sigma_1) \circ u(\sigma_2)$.

5. La fonction $u \circ \phi : G \rightarrow S_n$ est un homomorphisme de G vers S_n ; il est injectif, car u et ϕ sont injectifs; son image est un sous-groupe de S_n . Donc $u \circ \phi$ définit un isomorphisme de G vers un sous-groupe de S_n . $\square$

Exercice 96. *Décomposer en cycles disjoints les permutations suivantes : 347219586, 315274968, 987654321.*

Exercice 97. *Montrer que l'inverse d'un cycle de longueur k est un cycle de longueur k ; comment obtient-on sa représentation ?*

Exercice 98. *Combien y a-t-il de permutations circulaires dans S_n ?*

Exercice 99. *Combien y a-t-il de transpositions dans S_n ?*

Exercice 100. Quel est le nombre d'inversions de la permutation $n(n-1)(n-2)\cdots 21$ de S_n ? Montrer que c'est le nombre maximum d'inversions d'une permutation dans S_n .

Exercice 101. Quel est l'ordre d'un cycle de longueur k ? Quel est l'ordre de $(123) \circ (45)$? de $(12)(34)(5678)$?

Exercice 102. * Montrer que l'ordre d'une permutation est le ppmc des longueurs des cycles de sa décomposition en cycles disjoints.

Exercice 103. Vérifier que $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est un sous-groupe de S_4 .

Exercice 104. Vérifier que si l'on note $\sigma_i = (i, i+1)$, alors

$$|i-j| \geq 2 \Rightarrow \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

$$|i-j| = 1 \Rightarrow \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j,$$

$$|i-j| = 0 \Rightarrow \sigma_i \sigma_j = id.$$

On omet ici le symbole $\circ$, et la composition est vue comme un produit.

Exercice 105. * Montrer que, sauf pour $n = 2$, le centre de S_n est trivial.

Exercice 106. * On définit la table d'inversions $T(\sigma)$ de $\sigma \in S_n$ par $T(\sigma) = (a_2, \dots, a_n)$, où $a_k =$ le nombre d'inversions $(\sigma(i), \sigma(j))$ avec $\sigma(i) = k$. Donner un exemple. Montrer que $\sigma \mapsto T(\sigma)$ est une fonction injective, d'image $E = \{(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n-1} | \forall i, 0 \leq a_i \leq i-1\}$.

Exercice 107. On considère l'ensemble $A = \{1, \dots, n\}$. Soit $\sigma \in S_n$. On définit une action à gauche de S_n sur A^k par $\sigma(i_1, \dots, i_k) = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$. Vérifier que c'est bien une action. Déterminer le stabilisateur d'un élément.

Exercice 108. Décomposer la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 7 & 3 & 1 & 10 & 6 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

en produit de cycles disjoints et trouver son ordre dans S_{10} .

Exercice 109. Soit $H = \{id, (1, 2)\}$, et $K = \{id, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ des sous-groupes de S_3 .

a) Trouvez-en les classes à gauche et à droite.

b) Sont-ils normaux ?

Exercice 110. Pour le sous-groupe H de l'exercice 103, écrire les six classes à droite (resp. à gauche) de H dans S_4 . Ce sous-groupe est-il normal ?

Exercice 111. * Soit $H = \{\sigma \in S_8 \mid \sigma(8) = 8\} \subset S_8$.

- a) Prouver que H est un sous-groupe de S_8 .
- b) Trouver l'indice de H dans S_8 .
- c) Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel $S_7 \rightarrow H$.
- d) Combien y a-t-il dans H d'éléments d'ordre 7 ?
- e) Est-ce que H est normal dans S_8 ?

Exercice 112. Montrer que le groupe S_n est engendré par les deux permutations $(1, 2)$ et $(1, 2, \dots, n)$, c'est-à-dire que toute permutation s'écrit comme un produit ne comportant comme facteurs que ces permutations. Aide : Calculer $(1, 2, \dots, n)^i(1, 2)(1, 2, \dots, n)^{-i}$.

Exercice 113. Soit $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 10 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $b = (12345)(159)(249)$ dans S_{10} . Calculer les ordres des éléments $a, b, a \circ b, b \circ a, a^{1974}$ et b^{1975} . Attention : les cycles ci-dessus ne sont pas disjoints.

Exercice 114. Considérons les deux permutation suivantes dans S_9 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 9 & 2 & 3 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Écrire σ et τ comme produits de cycles disjoints.
- b) Trouver l'ordre de σ et de τ .
- c) Écrire σ et τ comme produit de transpositions.
- d) Dire si σ et τ sont paires ou impaires.

Exercice 115. * Montrer que le groupe de l'exercice 32 est isomorphe à S_3 .

Exercice 116. Montrer que si deux permutations sont conjuguées, alors elles ont la même signature. Montrer que la signature d'un k -cycle σ est $(-1)^{k-1}$, c'est-à-dire : la parité de σ est l'opposée de celle de k . Indication : commencer par $c = (1, 2, \dots, k)$.

11 Groupes linéaires

On rappelle que le déterminant du produit de deux matrices carrées de même ordre est égal au produit de leurs déterminant. On rappelle aussi que les coefficients de l'inverse d'une matrice sont des fractions, dont le dénominateur est le déterminant de la matrice, et dont les numérateurs sont certain mineurs de la matrice. De plus, le déterminant de l'inverse d'une matrice inversible est l'inverse de son déterminant. On rappelle encore que si on échange deux colonnes (resp. lignes) d'une matrice carrée, alors son

déterminant est multiplié par -1 , et que le déterminant de la matrice identité est 1 .

Dans la suite, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Proposition 11.1. *Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$, de déterminant non nul, est un groupe sous la multiplication ; l'élément neutre est la matrice identité I_n . La fonction déterminant est un homomorphisme surjectif de $GL_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}^*$ (multiplicatif).*

Démonstration. Le produit des matrices est associatif, et la matrice I_n est élément neutre pour le produit des matrices carrées d'ordre n .

Le déterminant du produit AB de deux matrices carrées A, B d'ordre n est le produit de leurs déterminants ; si ceux-ci sont non nuls, on a $\det(AB) \neq 0$. Donc les ensembles considérés dans l'énoncé forment un monoïde.

Les formules d'inversion des matrices carrées montrent que si A est carrée de déterminant non nul, à coefficient dans $\mathbb{K}$, alors son inverse est aussi à coefficients dans $\mathbb{K}$. Donc ces ensembles forment un groupe. $\square$

Définition 11.2. *Avec les notations de la proposition 11.1, on note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe considéré, et on l'appelle le groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 11.3. *On a $GL_n(\mathbb{Q}) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$, et chacun est sous-groupe du suivant.*

Définition 11.4. *On note $SL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices dans $GL_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1 .*

Proposition 11.5. *$SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe normal de $GL_n(\mathbb{K})$, et $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$.*

Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est appelé le *groupe spécial linéaire* d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. C'est parce que le déterminant du produit de deux matrices de déterminant 1 est aussi de déterminant 1 , que le déterminant de la matrice identité est 1 , et que le déterminant de l'inverse d'une matrice de déterminant 1 est aussi de déterminant 1 .

Comme $SL_n(\mathbb{K})$ est le noyau de la fonction déterminant, il est normal dans $GL_n(\mathbb{K})$. La fonction déterminant de $GL_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}^*$ est surjective : en effet, le déterminant de la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $a, 1, \dots, 1$, est a ; d'où l'isomorphisme par le corollaire 7.10. $\square$

Proposition 11.6. *L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1, est un sous-groupe de l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1 ou -1 , qui est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Q})$.*

Démonstration. Cela découle des formules qui donnent l'inverse d'une matrice : comme le déterminant est ± 1 , les coefficients de l'inverse sont des entiers. $\square$

Définition 11.7. *L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1 (resp. de déterminant 1 ou -1) est noté $SL_n(\mathbb{Z})$ (resp. $GL_n(\mathbb{Z})$).*

Proposition 11.8. *$SL_n(\mathbb{Z}) \subset GL_n(\mathbb{Z}) \subset GL_n(\mathbb{Q})$, et chacun est un sous-groupe du suivant. De plus, $SL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Q})$.*

Démonstration. Si $A, B \in SL_n(\mathbb{Z})$, alors leur produit est à coefficients dans $\mathbb{Z}$; de plus, $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$, donc $AB \in SL_n(\mathbb{Z})$. Clairement $I_n \in SL_n(\mathbb{Z})$. Enfin, par les formules d'inversion, $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{Z})$. $\square$

On appelle *matrice de la permutation* $\sigma \in S_n$ la matrice $P(\sigma)$ dont l'élément i, j est 1 si $\sigma(j) = i$, et 0 sinon.

Par exemple, la matrice de la permutation $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) =$

$$1, \sigma(4) = 4 \text{ est la matrice } P_{2314} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 11.9. *La fonction $\sigma \mapsto P(\sigma)$ est un homomorphisme de groupes de S_n dans $GL_n(\mathbb{Z})$. Le déterminant de $P(\sigma)$ est égal à la signature $\epsilon(\sigma)$ de σ .*

Démonstration. Soit $M = P(\alpha)P(\beta)$, où $\alpha, \beta \in S_n$. On $M_{i,k} = \sum_j P(\alpha)_{i,j}P(\beta)_{j,k}$. Pour que cette somme soit non nulle, comme tous les termes sont ≥ 0 , il faut qu'au moins un terme soit non nul; pour que le terme correspondant à j dans cette somme soit non nul, il faut que $i = \alpha(j)$ et $j = \beta(k)$; donc $i = \alpha \circ \beta(k)$; dans ce dernier cas, la somme vaut 1, sinon elle vaut 0. On a donc $M = P(\alpha \circ \beta)$ et la fonction est bien un homomorphisme de groupes.

Ecrivons $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ comme un produit de transpositions adjacentes. On a alors $P_\sigma = P_{\tau_1} \circ \dots \circ P_{\tau_k}$, par ce qui précède. Or, pour une matrice P_τ , $\tau = (i, i+1)$, son déterminant est -1 , car si on échange les deux colonnes

i et $i + 1$, on obtient la matrice identité. Donc $\det(P_\sigma) = (-1)^k = \text{sgn}(\sigma)$, par le corollaire 10.8, puisque la signature d'une transposition adjacente est -1 . $\square$

Les résultats suivants révèlent d'autres liens entre les permutations et les matrices. Nous ne les démontrerons pas (on peut trouver une preuve du premier dans les notes de cours [5], Théorème 20.2). Le second est lié à l'algorithme de Gauss-Jordan.

Théorème 11.10. *Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$, carrée d'ordre n , est égal à*

$$\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

où la somme est sur toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Théorème 11.11. *(décomposition de Bruhat) L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est réunion disjointe des $n!$ ensembles $T_n(\mathbb{K})P(\sigma)T_n(\mathbb{K})$, où $\sigma \in S_n$, et où T_n est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.*

Exercice 117. *Prouver que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, est un sous-groupe du groupe $GL_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{R}$.*

Exercice 118. *Montrer que l'ensemble $T_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. On appelle tore d'ordre n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont diagonales, avec des éléments diagonaux dans $\mathbb{K}^*$. Montrer que cet ensemble est un sous-groupe de $T_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 119. *On définit pour toute fonction $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ la matrice $P(f)$ carrée d'ordre n comme suit : le coefficient $i, j)$ est égal à 1 si $i = f(j)$, et il vaut 0 dans les autres cas. Montrer que $f \mapsto P(f)$ est un homomorphisme de monoïdes du monoïde des endofonctions de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans le monoïde multiplicatif des matrices $M_n(\mathbb{N})$. Indication : imiter la première partie de la preuve de la proposition 11.9.*

Exercice 120. ** On note $SL_2(\mathbb{N})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{N}$. Montrer que c'est un sous-monoïde du monoïde des matrices 2×2 à coefficients entiers naturels, et qu'il est engendré par les deux matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 121. * Montrer que $GL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices

$$P(q) = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, q \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 122. Dédurre de l'exercice 121 que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 123. Dédurre de l'exercice 121 que $GL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 124. Montrer que $SL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe normal de $GL_n(\mathbb{Z})$ et que $GL_n(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z}) \simeq \{1, -1\}$ (multiplicatif).

Exercice 125. Montrer que l'inverse d'une matrice de permutation est sa transposée.

Exercice 126. En utilisant le théorème 11.10, montrer que le déterminant est aussi égal à

$$\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

12 Groupes abéliens finis

Définition 12.1. Soit p un nombre premier. Un p -groupe est un groupe fini dont la cardinalité est une puissance de p .

Exemple 12.2. Un exemple de p -groupe abélien est le groupe

$$\mathbb{Z}/p^{r_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{r_s}\mathbb{Z}, \quad (2)$$

où $s \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}^*$, avec $r_1 \geq \cdots \geq r_s$. En effet, sa cardinalité est $p^{r_1 + \cdots + r_s}$.

Définition 12.3. On dit qu'un groupe G est d'exposant $n \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $g \in G$ on a $g^n = 1$.

Tout groupe fini G est d'exposant $|G|$, d'après le corollaire 8.7. En particulier, tout p -groupe est d'exposant une puissance de p . La réciproque est une conséquence du résultat suivant.

Théorème 12.4. *Tout groupe abélien fini, qui a pour exposant une puissance de p , est isomorphe à un groupe de la forme (2). En particulier, c'est un p -groupe.*

Dans la suite, nous notons les groupes abéliens additivement. En particulier nous notons ng au lieu de g^n ; donc $ng = g + \dots + g$ (n fois), et l'ordre de g est le plus petit entier naturel n non nul tel que $ng = 0$.

Lemme 12.5. *Soit A un groupe abélien fini, qui a pour exposant une puissance de p .*

(i) *Soit $b \in A$ tel que $p^r b \neq 0$ et que $p^r b$ est d'ordre p^m . Alors b est d'ordre p^{m+r} .*

(ii) *Soit $a_1 \in A$ un élément d'ordre p^{r_1} maximum dans A . Soit A_1 le sous-groupe engendré par a_1 . Soit $\bar{b}$ un élément dans A/A_1 d'ordre p^r . Il existe alors un élément $b \in A$ d'ordre p^r dont l'image est $\bar{b}$ par l'homomorphisme canonique $\pi : A \rightarrow A/A_1$.*

Démonstration. (i) On a $p^{m+r}b = 0$. Donc l'ordre de b divise p^{m+r} (théorème 8.6). Si $p^n b = 0$, alors on doit avoir $n > r$ (sinon $p^r b = 0$). Supposons que $n < r + m$; alors $n - r < m$ et on a $p^{n-r}p^r b = 0$, contredisant que l'ordre de $p^r b$ est p^m . Donc $n \geq r + m$, donc l'ordre de b est p^{m+r} .

(ii) Soit $b \in A$ dont l'image dans A/A_1 est $\bar{b}$. Comme $p^r \bar{b} = 0$, on a $p^r b \in A_1$, donc $p^r b = na_1$ pour un entier n . L'ordre p^r de $\bar{b}$ est $\leq$ l'ordre de b , puisque celui-ci est image homomorphe de celui-là; donc si $na_1 = 0$, nous avons notre b du lemme. Supposons maintenant que $na_1 \neq 0$; donc $n \neq 0$, et écrivons $n = p^k \mu$, où μ est premier avec p ; donc $k < r_1$ (sinon $na_1 = 0$, puisque p^{r_1} est un exposant de A). Alors μa_1 est aussi un générateur de A_1 (une conséquence de l'exercice 72), et il est donc d'ordre p^{r_1} . Alors $p^k \mu a_1$ est d'ordre p^{r_1-k} . Comme $p^r b = p^k(\mu a_1)$, l'ordre de b est p^{r+r_1-k} par (i) ($p^r b = p^k(\mu a_1) \neq 0$ car l'ordre de $p^k(\mu a_1)$ est $p^{r_1-k} > 1$). Par maximalité de r_1 , on a $r + r_1 - k \leq r_1$, donc $r \leq k$. Donc $p^r b = p^k(\mu a_1) = p^r c$, où $c = p^{k-r} \mu a_1 \in A_1$; donc $\pi(c) = 0$. Soit $a = b - c$. Alors $\pi(a) = \pi(b) - \pi(c) = \pi(b)$: a est envoyé sur $\bar{b}$ par l'homomorphisme canonique π , et $p^r a = p^r(b - c) = p^r b - p^r c = 0$. Comme l'ordre de a est $\geq p^r$ (puisque celui de $\pi(a)$ est p^r), son ordre est p^r . $\square$

Au lieu de parler de produit de groupes, nous allons parler de *somme directe interne*. Un groupe abélien A est dit somme directe interne de ses sous-groupes $A_1, \dots, A_s$ si tout élément de A a une unique expression $h_1 + \dots + h_s$, où chaque h_i est dans A_i . On écrit

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_s.$$

Dans ce cas, l'homomorphisme canonique $A_1 \times \cdots \times A_s \rightarrow A, (h_1, \dots, h_s) \mapsto h_1 + \cdots + h_s$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve du théorème 12.4. Soit a_1, A_1 comme dans le lemme 12.5 (ii). Si A_1 est le groupe trivial, alors tout élément de A est d'ordre 1, donc A est trivial ; le résultat est vrai dans ce cas (avec $s = 0$). Supposons que A_1 n'est pas le groupe trivial. Le groupe A/A_1 est de cardinalité plus petite que celle de A , par le corollaire 7.7. Il a pour exposant une puissance p . Donc par hypothèse de récurrence sur la cardinalité, on peut supposer que

$$A/A_1 = \bar{A}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{A}_s, \quad (3)$$

où les groupes $\bar{A}_j$ sont cycliques d'ordre p^{r_j} , avec $r_2 \geq \cdots \geq r_s$.

Soit $\bar{a}_j$ un générateur du groupe $\bar{A}_j$; en utilisant le lemme 12.5 (ii), on peut trouver $a_j \in A$ de même ordre p^{r_j} que $\bar{a}_j$, et dont l'image par $\pi : A \rightarrow A/A_1$ est $\bar{a}_j$. Soit A_j le groupe engendré par a_j ; c'est un groupe cyclique de cardinalité p^{r_j} . Nous montrons que A est somme directe de $A_1, A_2, \dots, A_s$, ce qui finira la preuve.

Soit x dans A et $\bar{x}$ son image par π . Par (3), il existe des entiers $m_2, \dots, m_s$ tels que $\bar{x} = m_2\bar{a}_2 + \cdots + m_s\bar{a}_s$. Donc $\pi(x) = m_2\bar{a}_2 + \cdots + m_s\bar{a}_s$, et par suite, $x - m_2a_2 - \cdots - m_sa_s \in N(\pi) = A_1$, donc $x - m_2a_2 - \cdots - m_sa_s = m_1a_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$, et enfin $x = \sum m_i a_i$.

Donc tout x dans A s'écrit $x = \sum m_i a_i$. Pour montrer que cette écriture est unique, supposons que $\sum m_i a_i = 0$ et montrons que chaque terme $m_i a_i$ est nul. Appliquant π , on trouve $m_2\bar{a}_2 + \cdots + m_s\bar{a}_s = 0$. Comme la somme (3) est directe, on doit avoir $m_j\bar{a}_j = 0$ pour chaque $j = 2, \dots, s$. Donc, l'ordre de $\bar{a}_j$ étant p^{r_j} , celui-ci divise m_j ; donc $m_j a_j = 0$, puisque l'ordre de a_j est aussi p^{r_j} . Enfin $0 = m_1 a_1$. $\square$

Théorème 12.6. *Tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit fini de groupes cycliques, qui sont de la forme $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, p premier, $r \geq 1$.*

Pour un groupe abélien A et un entier n , on pose $A(n) = \{x \in A \mid nx = 0\}$. Alors $A(n)$ est un sous-groupe de A , comme on peut le vérifier facilement.

Lemme 12.7. *Soit A un groupe abélien fini d'exposant mn , où m, n sont des entiers naturels premiers entre eux. Alors A est somme directe des deux sous-groupes $A(n)$ et $A(m)$.*

Démonstration. Il existe des entiers u, v tels que $um + vn = 1$ (théorème de Bezout). Soit $x \in A$. Alors $x = (um + vn)x = (um)x + (vn)x$. On a

$m((vn)x) = (mvn)x = mn(vx) = 0$, puisque A est d'exposant mn . Donc $(vn)x \in A(m)$. De même, $(um)x \in A(n)$. Donc $x \in A(n) + A(m)$.

Pour montrer que la somme $A(n) + A(m)$ est directe, il suffit de montrer que l'intersection de ces deux sous-groupes est nulle. Soit $x \in A(m) \cap A(n)$. Alors $mx = nx = 0$. Donc $x = (um + vn)x = u(mx) + v(nx) = 0$. $\square$

Preuve du théorème 12.6. Soit $n = |A|$; alors n est un exposant de A (corollaire 8.7). Il découle, par récurrence sur k , du lemme 12.7 que si $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les n_i des entiers naturels, alors A est somme directe des sous-groupes $A(p_i^{n_i})$. Ce dernier sous-groupe est d'exposant $p_i^{n_i}$. Il découle du théorème 12.4 qu'il est somme directe de sous-groupes cycliques de la forme $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Donc A est somme directe de tels sous-groupes cycliques. $\square$

Corollaire 12.8. *Tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques de la forme*

$$\mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/c_s\mathbb{Z}, \quad (4)$$

où les c_i sont des entiers naturels ≥ 2 , et où $c_1|c_2|\cdots|c_s$.

Démonstration. On sait que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes de la forme $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, p premier, $r \geq 1$. En remarquant que $\mathbb{Z}/p^0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est le groupe trivial, qui agit comme un élément neutre dans les produits cartésiens, on peut donc supposer que A est isomorphe à un produit

$$\prod_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s} \mathbb{Z}/p_i^{r_{i,j}}\mathbb{Z},$$

où les p_i sont des nombres premiers distincts, et où on a pour tout i

$$r_{i,1} \leq \cdots \leq r_{i,s}.$$

Posons $c_j = \prod_{1 \leq i \leq k} p_i^{r_{i,j}}$. Alors $c_1|\cdots|c_s$. De plus A est isomorphe à

$$\prod_{1 \leq j \leq s} \prod_{1 \leq i \leq k} \mathbb{Z}/p_i^{r_{i,j}}\mathbb{Z},$$

qui est, par le théorème chinois 8.1, isomorphe à

$$\prod_{1 \leq j \leq s} \mathbb{Z}/c_j\mathbb{Z}.$$

$\square$

Corollaire 12.9. *Tout groupe abélien fini, dont la cardinalité est divisible par un nombre premier p , possède un élément d'ordre p et donc un sous-groupe de cardinalité p .*

Démonstration. Soit G ce groupe. Par les résultats précédents, on peut supposer que G est un produit de groupe cycliques. L'un d'eux a une cardinalité divisible par p . On est donc ramené à G cyclique : $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n = pk$; alors $k + n\mathbb{Z}$ est d'ordre p dans G . $\square$

On peut montrer que les décompositions apparaissant dans le corollaire 12.8 sont uniques. Précisément : si le groupe dans ce corollaire est isomorphe à un groupe $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_t\mathbb{Z}$, où $2 \leq d_1 | d_2 | \cdots | d_t$, alors $s = t$ et $c_1 = d_1, \dots, c_s = d_s$. Pour une preuve on peut voir [4].

De même, la décomposition du théorème 12.6 est unique. Ceci signifie que si deux groupe sont isomorphes, le multi-ensemble des puissances des nombres premiers qui apparaissent dans la décomposition, sont les mêmes. Voir aussi [4].

Le fait que ces deux théorèmes d'unicité se ramènent l'un à l'autre est expliqué dans l'exercice 130.

Exercice 127. *En utilisant le théorème chinois, trouver un groupe de la forme (4) isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.*

Exercice 128. *Montrer que dans un groupe abélien fini A , il existe pour tout diviseur d de $|A|$, un sous-groupe d'ordre d (c'est en quelque sorte une réciproque du théorème de Lagrange pour les groupes abéliens). Indication : commencer par un groupe cyclique ; puis continuer par un produit de groupes.*

Exercice 129. *Ecrire toutes les décompositions de la forme du corollaire 12.8 pour un groupe de cardinalité 2016. Remarque : on peut ainsi compter les groupes abéliens de cardinalité 2016 à isomorphisme près ; ça se généralise pour toute cardinalité ; donner d'autres exemples.*

Exercice 130. * *A toute suite $(c_1, \dots, c_s)$ d'entiers, telle que $s \geq 0$, $2 \leq c_1 | c_2 | \cdots | c_s$, on associe le multi-ensemble des puissances (non triviales) maximales de nombres premiers divisant les c_i . Exemple : $(2, 12, 84) \mapsto \{2, 2^2, 2^2, 3, 3, 7\}$. Montrer qu'on obtient une bijection. En déduire par la construction dans la preuve du corollaire 12.8 que l'unicité dans le théorème 12.6 et celle dans le corollaire 12.8 se ramènent l'une à l'autre.*

Exercice 131. *Déterminer $A(m)$ lorsque $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exercice 132. * *Trouver cinq groupes abéliens non-isomorphes d'ordre 16, en utilisant la remarque après le corollaire 12.9.*

13 Monoïdes et groupes libres

Soit A un ensemble, qu'on appellera ici *alphabet*, et dont les éléments sont appelés des *lettres*. Un *mot* sur A est une suite finie d'éléments de A ; on inclut la suite vide, qu'on appelle le *mot vide*. Avec la *concatenation*, l'ensemble des mots sur A , noté A^* , devient un monoïde; on appelle concatenation de deux mots $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_m)$, où $n, m \geq 0, a_i, b_j \in A$, le mot $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$. Ce produit est clairement associatif, et l'élément neutre est le mot vide, que nous notons 1.

Chaque lettre est aussi un mot, et nous écrivons a pour (a) . Clairement, le mot $(a_1, \dots, a_n)$ est le produit des ses lettres, c'est-à-dire ce mot est $a_1 \cdots a_n$. Nous adopterons cette notation pour les mots, c'est-à-dire sans les parenthèses. La *longueur* du mot $a_1 \cdots a_n$ est n .

Le monoïde A^* est appelé *monoïde libre*, ce qui est justifié par la *propriété universelle* suivante.

Théorème 13.1. *Soit A un alphabet et $f : A \rightarrow M$ une fonction de A dans un monoïde. Il existe un unique homomorphisme de monoïdes $\bar{f} : A^* \rightarrow M$ tel que $f = \bar{f} \circ i$, où $i : A \rightarrow A^*$ est l'injection canonique (c'est-à-dire $i(a) = a$ pour toute lettre a).*

On peut ainsi dire que le monoïde libre est engendré par les lettres dans A , et qu'il n'y a pas d'autre relation entre ses éléments que celle imposées par l'associativité.

Démonstration. Si $w = a_1 \cdots a_n$ est un mot dans A^* ($a_i \in A$), définissons $\bar{f}(w) = f(a_1) \cdots f(a_n)$. $\square$

Nous allons voir qu'il existe un groupe qui a une propriété universelle analogue. Pour ceci, nous avons besoin de la notion de *congruence de monoïdes*. Une congruence d'un monoïde M est une relation d'équivalence $\sim$ sur M telle que : $\forall g, g', h, h' \in M, g \sim g' \text{ et } h \sim h' \Rightarrow gh \sim g'h'$. Le quotient $M/\sim$ est alors un monoïde et la projection canonique $M \rightarrow M/\sim$ un homomorphisme de monoïdes.

Soit A un alphabet et définissons une copie $\bar{A}$ de A , en ce sens qu'il y a une bijection $A \rightarrow \bar{A}, a \mapsto \bar{a}$. On suppose que A et $\bar{A}$ sont disjoints. Soit $X = A \cup \bar{A}$. Soit $\sim$ la congruence du monoïde libre X^* engendrée par les relations $a\bar{a} \sim 1, \bar{a}a \sim 1$, pour tout $a \in A$. Concrètement, cela signifie que $u \sim v$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$, et une suite de mots $u = u_0, u_1, \dots, u_n = v$, telles que pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe une factorisation $u_{i-1} = xfy, u_i = xgy$ et une lettre $a \in A$ tel qu'on ait $f = a\bar{a}, g = 1$, ou $f = \bar{a}a, g = 1$, ou $f = 1, g = a\bar{a}$, ou $f = 1, g = \bar{a}a$.

Par exemple, $abb\bar{a}aba \sim abab\bar{b}$, car on a la suite $abb\bar{a}aba, a\bar{a}aba, aba, abab\bar{b}$. On montre que la relation ainsi définie est une congruence. Soit alors $F(A) = X^*/\sim$. C'est un monoïde et la projection canonique $p : X^* \rightarrow F(A)$ est un homomorphisme de monoïdes. On a alors un homomorphisme de monoïdes $j : A^* \rightarrow F(A)$, qui est le composé de l'injection canonique $A^* \rightarrow X^*$, suivi de p .

Théorème 13.2. *$F(A)$ est un groupe et l'homomorphisme de monoïdes j est injectif. Notons i sa restriction à A .*

Soit $f : A \rightarrow G$ une fonction de A dans un groupe. Il existe un unique homomorphisme de groupes $\bar{f} : F(A) \rightarrow G$ tel que $f = \bar{f} \circ i$.

On appelle $F(A)$ le *groupe libre sur A* . La deuxième assertion du théorème est la *propriété universelle du groupe libre*

Démonstration. □

Un *facteur* d'un mot w dans un monoïde libre est un mot u tel qu'il existe des mots x, y tels que $w = xuy$.

On appelle *mot réduit* un mot dans le monoïde libre $\{A \cup \bar{A}\}^*$ qui ne contient aucun facteur $a\bar{a}$, ni $\bar{a}a$, $a \in A$.

Théorème 13.3. *Tout mot w dans $\{A \cup \bar{A}\}^*$ est congru modulo $\sim$ à un unique mot réduit. Il s'obtient à partir de w en supprimant itérativement tous les facteurs $\bar{a}a$ et $a\bar{a}$, dans l'ordre qu'on veut.*

Démonstration. □

Exercice 133. *Montrer que la fonction longueur est un homomorphisme de monoïdes $A^* \mapsto \mathbb{N}$. Montrer que c'est l'unique homomorphisme qui envoie chaque lettre sur 1, en utilisant le théorème 13.1.*

Exercice 134. *Montrer en utilisant le théorème 13.2 qu'il existe un unique homomorphisme de groupes $F(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie toute lettre $a \in A$ sur 1. Montrer que la restriction de cette fonction à A^* est l'homomorphisme longueur de l'exercice 133. Calculer des images d'éléments de $F(A)$, et vérifier que ce n'est pas la longueur du mot réduit en général. On appelle longueur algébrique cette fonction sur le groupe libre.*

Exercice 135. *Un mot dans $\{A \cup \bar{A}\}^*$ est dit cycliquement réduit si : soit il est vide ; soit il est réduit, et si a, b étant sa première et sa dernière lettre, on a $a \neq \bar{b}$ (on étend la fonction $a \mapsto \bar{a}$ à $A \cup \bar{A}$ par la condition*

$\bar{a} = a, \forall a \in A$). Donner des exemples. Montrer que tout élément de A^* est cycliquement réduit. Montrer que pour tout $g \in F(A)$, il existe $w \in \{A \cup \bar{A}\}^*$ qui est cycliquement réduit et tel que g soit conjugué à w .

14 Théorèmes d'isomorphisme

Le premier théorème d'isomorphisme n'est rien d'autre que le corollaire 7.10.

Théorème 14.1. (Premier théorème d'isomorphisme) Soit $f : G \rightarrow G'$ un isomorphisme de groupes. Alors f induit un isomorphisme de groupes $\bar{f} : G/N(f) \rightarrow \text{Im}(f)$.

Ce théorème a une généralisation.

Théorème 14.2. (Premier théorème d'isomorphisme, variante) Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes, et N son noyau. Soit H un sous-groupe normal de G , et $p : G \rightarrow G/H$ l'homomorphisme canonique. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un homomorphisme $\bar{f} : G/H \rightarrow G'$ que $f = \bar{f} \circ p$;
- (ii) $H \subset N$.

Dans ce cas, $\bar{f}$ est unique.

Démonstration. (ii) implique (i) : si $\bar{f}$ existe, alors pour tout $g \in G$, on a $\bar{f}(gH) = \bar{f} \circ p(g) = f(g)$; ceci implique l'unicité de $\bar{f}$.

Pour l'existence, on pose $\bar{f}(gH) = f(g)$. Montrons que $\bar{f}$ est bien défini : supposons $gH = g'H$; alors $g' = gh$, donc $f(g') = f(g)f(h) = f(g)$, puisque $h \in H$, donc $h \in N = N(f)$. On a alors $\bar{f} \circ p(g) = \bar{f}(gH) = f(g)$, donc $f = \bar{f} \circ p$. Le fait que $\bar{f}$ ainsi défini est un homomorphisme découle aisément de la dernière égalité.

(i) implique (ii) : si $h \in H$, alors $p(h) = 1$, donc $f(h) = \bar{f} \circ p(h) = 1$, et $h \in N$. □

Théorème 14.3. (Deuxième théorème d'isomorphisme) Soient G un groupe, N un sous-groupe normal de G et H un sous-groupe de G . Alors $H \cap N$ est un sous-groupe normal de H , N est un sous-groupe normal du sous-groupe $HN = NH$ de G , et $H/(H \cap N)$ est isomorphe à HN/N .

Démonstration. 1. L'intersection de deux sous-groupes de G est un sous-groupe, donc $H \cap N$ est un sous-groupe de G ; comme il est contenu dans H , c'est un sous-groupe de H (exercice 25).

Si $a \in H \cap N$ et $b \in H$, alors $bab^{-1} \in H$, car H est un sous-groupe ; de plus $bab^{-1} \in N$, car N est un sous- groupe normal. Donc $bab^{-1} \in H \cap N$, ce qui prouve que $H \cap N$ est un sous-groupe normal de H .

2. Si $g \in HN$, alors $g = hn, h \in H, n \in N$; donc $g = hnh^{-1}h \in NH$, car $hnh^{-1} \in N$, celui-ci étant normal. Ceci montre que $HN \subset NH$, et l'inclusion réciproque est démontrée de manière analogue. Donc $HN = NH$.

3. N est un sous-ensemble de NH , donc un sous-groupe normal de NH (exercice 25). Soit $g \in N$, et $a \in NH$. Alors $a = nh, n \in N, h \in H$, donc $aga^{-1} = nhgh^{-1}n^{-1} \in N$, car n, hgh^{-1}, n^{-1} sont dans N , celui-ci étant normal. Donc N est un sous-groupe normal de NH .

4. Considérons l'homomorphisme canonique $p : HN \rightarrow HN/N$, et l'injection canonique $i : H \rightarrow HN, i(h) = h$. Soit $f = p \circ i : H \rightarrow HN/N$. Nous montrons plus loin que f est surjectif et que $N(f) = H \cap N$. On en déduit par le premier théorème d'isomorphisme que HN/N est isomorphe à $H/(H \cap N)$.

5. Le noyau de f est l'ensemble des $h \in H$ tels que $p(h) = p(i(h)) = 1$. C'est-à-dire que h appartienne à $N(p) = N$. C'est donc bien $H \cap N$.

6. Considérons un élément de HN/N . On peut l'écrire sous la forme $p(hn), h \in H, n \in N$. Comme $N = N(p)$, on a $p(hn) = p(h)p(n) = p(h) = p \circ i(h)$. Donc $f = p \circ i$ est surjectif. $\square$

Théorème 14.4. (Troisième théorème d'isomorphisme) Soit G un groupe, et N, M des sous-groupes normaux de G tels que $M \subset N$. Alors M est un sous-groupe normal de N , N/M est un sous-groupe normal de G/M , et G/N est isomorphe à $(G/M)/(N/M)$.

Démonstration. 1. M est un sous-groupe de G , et un sous-ensemble de N ; c'est donc un sous-groupe de N (exercice 25). Si $m \in M, n \in N$, alors $n^{-1}mn \in M$, car M est un sous-groupe normal de G ; M est donc un sous-groupe normal de N .

2. Les éléments de N/M sont les classes nM modulo M , $n \in N$. Ce sont donc des éléments de G/M . Soit $p : G \rightarrow G/M$ l'homomorphisme canonique. On a $p(N) = \{nM, n \in N\}$; donc $p(N) = N/M$ est un sous-groupe de G/M . C'est un sous-groupe normal, car p est surjectif (exercice 57).

3. On a $p^{-1}(N/M) = N$. En effet, si $n \in N$, alors $p(n) \in p(N) = N/M$. Et si $p(g) \in N/M$, alors gM est de la forme $nM, n \in M$. Donc $g = nm \in N$, car N est un sous-groupe qui contient M .

4. Soit $q : G/M \rightarrow (G/M)/(N/M)$ l'homomorphisme canonique. Alors $q \circ p : G \rightarrow (G/M)/(N/M)$ est un homomorphisme, qui est surjectif, car p, q sont surjectifs. Le noyau de $q \circ p$ est, par l'exercice 59,

$p^{-1}(N(q)) = p^{-1}(N/M) = N$; donc, par le premier théorème d'isomorphisme, $(G/M)/(N/M)$ est isomorphe à G/N . $\square$

Exercice 136. Soient $K \subset H \subset G$ des groupes, où K et H sont normaux dans G . Montrer que $gK \mapsto gH$ est un homomorphisme surjectif bien défini de G/K dans G/H (ceci généralise l'exercice 16).

Exercice 137. On considère un homomorphisme surjectif $f : G \rightarrow G'$. Soit N' un sous-groupe normal de G' et $N = f^{-1}(N')$. Montrer que N est un sous-groupe normal de G , et que G/N est isomorphe à G'/N' .

Exercice 138. Soit d, n des entiers tels que d divise n . Vérifier que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $d\mathbb{Z}$.

Montrer que le groupe $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z}$. Indication : considérer l'homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto dx \pmod n$. Montrer que son noyau est $(n/d)\mathbb{Z}$ et que son image est $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Montrer que le théorème 14.4 appliqué à cette situation donne l'isomorphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Exercice 139. * Montrer que tous les sous-groupes et tous les quotients de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont de la forme $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $d|n$. Commencer par $n = 12$.

15 Théorèmes de Sylow

Soit un groupe fini G de cardinalité $|G| = p^n m$, avec p premier ne divisant pas m . On dit qu'un sous-groupe de G est un *p -sous-groupe de Sylow* si sa cardinalité est p^n .

Si G est un groupe fini, on dit que H est un *sous-groupe de Sylow* de G s'il existe un nombre premier p tel que H soit un p -sous-groupe de Sylow de G .

Théorème 15.1 (Premier théorème de Sylow). Soit G un groupe fini et p un nombre premier. Alors pour toute puissance p^s divisant $|G|$, le groupe G possède un sous-groupe d'ordre p^s . En particulier, G contient un p -sous-groupe de Sylow.

Théorème 15.2 (Deuxième théorème de Sylow). Soit G un groupe fini. Pour chaque diviseur premier p de $|G|$, les p -sous-groupes de Sylow sont conjugués.

Théorème 15.3 (Troisième théorème de Sylow). *Soit G un groupe fini, et p un diviseur premier de $|G|$. Soit N_p le nombre de p -sous-groupes de Sylow de G . Alors N_p divise $|G|$, et $N_p \equiv 1 \pmod{p}$.*

Preuve du théorème 15.1. On démontre, par récurrence sur $|G|$, que pour toute puissance p^s qui divise $|G|$, G a un sous-groupe de cardinalité p^s .

Le cas de base est quand $|G| = 1$, où c'est évident.

Supposons maintenant que $|G| > 1$. Si $s = 0$, c'est évident. On peut donc supposer que $s \geq 1$; alors p divise $|G|$. Considérons l'action de G sur lui-même par conjugaison. Les orbites de cardinalité 1 sont les $\{g\}$, $g \in C(G)$ (propositions 9.3 et 9.4). Pour les autres orbites, choisissons des représentants $x_1, \dots, x_r$.

Par le corollaire 5.6, on a donc l'équation aux classes.

$$|G| = |C(G)| + \sum_{1 \leq i \leq r} |G|/|C(x_i)|,$$

où $C(x_i)$ est le stabilisateur de x_i dans l'action par conjugaison. On distingue deux cas.

Premièrement, p ne divise pas $|C(G)|$. Alors, comme p divise le membre gauche de l'équation, il existe i tel que p ne divise pas $|G|/|C(x_i)|$. Donc, comme p^s divise $|G|$, p^s divise $|C(x_i)|$. On a aussi $|C(x_i)| < |G|$, car $x_i \notin C(G)$. Par hypothèse de récurrence, $C(x_i)$ possède un sous-groupe H d'ordre p^s , qui est aussi un sous-groupe de G d'ordre p^s .

Deuxièmement, p divise $|C(G)|$. Alors $C(G)$ possède un élément d'ordre p , disons c (corollaire 12.9). Soit H_0 le sous-groupe engendré par c . C'est un groupe cyclique de cardinalité p ; H_0 est un sous-groupe normal de G , car $c \in C(G)$. Donc G/H_0 est un groupe de cardinalité $|G|/p$ (corollaire 7.7). Par récurrence, G/H_0 possède un sous-groupe d'ordre p^{s-1} , disons K . Soit $H = \pi^{-1}(K)$, où π est le morphisme naturel $G \rightarrow G/H_0$. Alors H est un sous-groupe de G qui contient H_0 , H_0 est un sous-groupe normal de H , et $H/H_0 \simeq K$, car $\pi|_H : H \rightarrow K$ est surjectif (corollaire 7.9). D'où $|H| = |H_0| \cdot |K| = p^s$. $\square$

Preuve du théorème 15.2. Soit $|G| = p^n m$, m premier avec p . Fixons un p -sous-groupe de Sylow S , et considérons un autre p -sous-groupe de Sylow S' . Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des translatés à droite de S : $\mathcal{T} = \{Sg | g \in G\}$. On a $|\mathcal{T}| = m$: en effet, par le théorème 5.8, les translatés à droite de S sont disjoints, chacun a cardinalité $p^n = |S|$, et leur réunion est G .

Le groupe S' agit sur $\mathcal{T}$ par produit à droite : si $s \in S'$, l'action est $Sg \cdot s = Sgs$. Notons S'_T le stabilisateur de $T \in \mathcal{T}$ dans cette action; c'est

un sous-groupe de S' . Notons aussi $T_1, T_2, \dots$ des représentants des orbites de cette action. En appliquant le corollaire 5.6 à cette action, on obtient

$$m = |\mathcal{T}| = \sum_i |S'|/|S'_{T_i}|.$$

Notons que tous les $|S'|/|S'_{T_i}|$ divisent p^n (car $|S'| = p^n$), alors que p ne divise pas m . Il doit donc y avoir au moins un i tel que $|S'|/|S'_{T_i}|$ soit égal à 1, d'où $S' = S'_{T_i}$: donc tout $s' \in S'$ stabilise T_i ; posons $T_i = Sg$. On a donc $\forall s \in S', Sgs = Sg$, donc $gs \in Sg$, d'où $s \in g^{-1}Sg$. On en tire $S' \subset g^{-1}Sg$, d'où $S' = g^{-1}Sg$, par égalité des cardinalités. Les sous-groupes S et S' sont donc conjugués. $\square$

Preuve du théorème 15.3. Le groupe G agit par conjugaison sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des p -sous-groupes de Sylow de G . D'après le théorème 15.2, il y a une seule orbite dans cette action, à savoir $\mathcal{S}$; donc la cardinalité de cette orbite, qui n'est autre que N_p , divise $|G|$, par le théorème 5.4 (iii).

Soit S un p -sous-groupe de Sylow. Le groupe S agit par conjugaison sur l'ensemble $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des points fixes de cette action, c'est-à-dire $\mathcal{S}_0 = \{T \in \mathcal{S}, sTs^{-1} = T\}$. Si $T \in \mathcal{S}_0$, alors pour tout $s \in S$, s est dans le normalisateur N de T ; donc S est un sous-groupe de N . Tout élément de T est aussi dans N , donc T est aussi un sous-groupe de N . Par l'exercice 140, S, T sont des p -sous-groupes de Sylow de N . Par le théorème 15.2, ils sont conjugués dans N . Mais T est un sous-groupe normal de N , par la proposition 9.8. Donc $S = T$.

Nous avons montré que $\mathcal{S}_0$ a un seul élément. Donc dans l'action ci-dessus de S sur $\mathcal{S}$, il y a une seule orbite de cardinalité 1. La cardinalité de toute autre orbite est un diviseur de $|S|$ par le théorème 5.4 (iii), donc elle est divisible par p puisque qu'elle est > 1 . Par l'équation aux classe (corollaire 5.6), $N_p = |\mathcal{S}|$ est donc congrue à 1 modulo p . $\square$

Exercice 140. Soient G un groupe fini, N un sous-groupe de G et S un sous-groupe de N . On suppose que S est un p -sous-groupe de Sylow de G . Montrer que S est un p -sous-groupe de Sylow de N .

Exercice 141. Quels sont les sous-groupes de Sylow d'un groupe cyclique ? Utiliser l'exercice 79.

Exercice 142. Quels sont les sous-groupes de Sylow de S_3 ?

Exercice 143. Combien S_4 a-t-il de p -sous-groupes de Sylow pour $p = 2$ et $p = 3$?

16 Solutionnaire

La plupart des solutions ne sont qu'esquissées.

1 On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$ et ce sont des monoïdes et sous-monoïdes. Cependant $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ ne le sont pas (car ils n'ont pas d'élément neutre). De plus, $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$, qui l'est de $\mathbb{R}$.

2 On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}^*, \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$ et ce sont des monoïdes et sous-monoïdes. De plus $\mathbb{Q}_+^*$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$.

3 $0 * b = b = b * 0$, $\forall b$, donc 0 est le neutre. $(-1) * b = -1$, $\forall b$, donc -1 n'a pas d'inverse, car $(-1) * b = 0$ (le neutre) est impossible. Notez que la fonction $f : \mathbb{Q} \setminus -1 \rightarrow \mathbb{Q}^*$ définie par $f(x) = x + 1$ est une bijection telle que $f(a * b) = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1) = f(a)f(b)$ et $f(0) = 1$ (0 étant le neutre pour $*$ dans $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ et 1 le neutre pour la multiplication usuelle dans $\mathbb{Q}^*$). C'est un premier exemple d'isomorphisme de groupes.

4 On a $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$; $A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$; donc $\emptyset$ est le neutre pour $\cup$. On a $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$; $A \cap X = A = X \cap A$; donc X est le neutre pour $\cap$.

5 $(3 - 2) - 1 = 0$, $3 - (2 - 1) = 3 - 1 = 2$, $0 \neq 2$.

6 $(4/2)/2 = 2/2 = 1$, $4/(2/2) = 4/1 = 4$.

7 $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4\} = \{0, 3, 5, 6, 7, \dots\}$ est bien un sous-monoïde de $\mathbb{N}$, avec l'addition. Mais comme $2 + 2 = 4$, $\mathbb{N} \setminus \{1, 4\} = \{0, 2, 3, 5, 6, \dots\}$ n'est pas un sous-monoïde.

8 Le neutre est id_X , la fonction identité de X , définie par $id_X(x) = x$, $\forall x \in X$.

9 Soient A et B deux sous-monoïdes de M . Comme $e \in A$ et $e \in B$, on a $e \in A \cap B$. De plus, si $a, b \in A \cap B$, alors $a, b \in A$ et $a, b \in B$, donc $ab \in A$ et $ab \in B$, car A et B sont des sous-monoïdes; on a donc $ab \in A \cap B$. Notez que ce résultat est également vrai pour une intersection de plus de deux ou même une intersection d'une infinité de sous-monoïdes. Notez que la réunion $A \cup B$ de deux sous-monoïdes n'en est pas nécessairement un. Par exemple $(2\mathbb{N}) \cup (3\mathbb{N})$ n'est pas un sous-monoïde de $\mathbb{N}$, car $2 + 3 = 5 \notin (2\mathbb{N}) \cup (3\mathbb{N})$.

10 Par induction sur m prouvons : $\forall n, a^n a^m = a^{n+m}$.

(1) $a^n a^0 = a^n 1 = a^n = a^{n+0}$; vrai pour $m = 0$.

(2) $a = na^{m+1} = a^n(a^m a) = (a^n a^m)a = a^{n+m}a = a^{n+m+1}$, par l'associativité et la définition $a^{n+1} = a^n a$.

Par induction sur m prouvons : $\forall n, (a^n)^m = a^{nm}$.

(1) $(a^n)^1 = a^n = a^{n1}$; $(a^n)^0 = 1 = a^{n0}$, donc c'est vrai pour $m = 0$ et $m = 1$.

(2) $(a^n)^{m+1} = (a^n)^m(a^n)^1$ (d'après la première partie) $= a^{nm}a^n = a^{nm+m}$ (idem) $= a^{n(m+1)}$.

11 $(a_1a_2 \dots a_n)(b_1b_2 \dots b_m) = a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m \in A^{n+m}$ si $a_1a_2 \dots a_n \in A_n$ et $b_1b_2 \dots b_m \in A_m$.

12 Il faut définir le *magma libre* $M(A)$ sur un ensemble A . De manière informelle, le magma libre est l'ensemble de toutes les expressions bien parenthésées, comme a , (ab) , $((ab)c)$, $((a(bc))(cd))$,...

13 Si $x \in (AB)C$, alors il existe $y \in AB$ et $c \in C$ tels que $x = yc$; il existe donc $a \in A, b \in B$ tels que $y = ab$ et donc $x = (ab)c$; donc $x = a(bc)$ par associativité du produit dans M ; donc $x = az$, $z = bc \in BC$, d'où $x \in A(BC)$. On a donc montré que $(AB)C \subset A(BC)$. L'inclusion réciproque se fait de manière analogue; d'où $(AB)C = A(BC)$.

Si $x \in A\{1\}$, alors il existe $a \in A$ tel que $x = a \cdot 1 = a$, donc $x \in A$. Réciproquement, $a \in A$ implique $a = a \cdot 1 \in A\{1\}$. On a donc $A\{1\} = A$. De même, $A = \{1\}A$. Donc $\{1\}$ est l'élément neutre de $\mathcal{P}(M)$.

Soit $P \subset M$ avec $1 \in P$. On a $P \subset PP$, car tout $x \in P$ s'écrit $x = 1 \cdot P \in PP$.

Supposons que P soit un sous-monoïde. Alors, si $x \in PP$, on $x = ab$, $a \in P, b \in P$ et donc $x \in P$, car P est fermé pour le produit. Donc $PP \subset P$ et enfin $PP = P$.

Réciproquement, si $PP = P$, alors pour tous $a, b \in P$, on a $ab \in PP = P$, donc $ab \in P$, qui est donc un sous-monoïde.

14 Les éléments inversibles sont les bijections $X \rightarrow X$. La cardinalité de X^X est n^n , et il y a $n!$ éléments inversibles.

15 On a $(a * b) * c = (ab - 2(a + b) + 6) * c = (ab - 2(a + b) + 6)c - 2(ab - 2(a + b) + 6 + c) + 6 = abc - 2ac - 2bc + 6c - 2ab + 4a + 4b - 12 - 2c + 6 = abc - 2ab - 2ac - 2bc + 4a + 4b + 4c - 6$; un calcul analogue montre que ceci est aussi égal à $a * (b * c)$. La loi est donc associative.

Si on prend $b = 3$, on a $ab - 2a - 2b + 6 = a(b - 2) + 2(3 - b) = a$; donc 3 est élément neutre.

Tous les éléments sont inversibles, sauf 2. En effet, l'équation $a * x = 3$ est équivalente à : $ax - 2a - 2x + 6 = 3$, ce qui est équivalent à $x(a - 2) = 2a - 3$, qui a une solution si $a \neq 2$. Elle n'en a pas si $a = 2$.

16 Notons que l'opération est commutative, et que $n * 0 = 0$. De plus, $n * m = 0 \Leftrightarrow nm$ est divisible par un carré (≥ 4).

Montrons que $(n * m) * p = n * (m * p)$. Si l'un de ces trois nombres est nul, alors les deux côtés sont nuls. Nous pouvons donc supposer que ces trois nombres sont non nuls. Si $(n * m) * p = 0$, alors $(nm)p$ est divisible par un carré; alors $n(mp)$ aussi, ce qui implique que les deux côtés sont nuls. Si

$(n * m) * p$ n'est pas nul, alors nmp n'est pas divisible par un carré; donc les deux côtés sont égaux à nmp . Il y a deux autres cas, symétriques.

Supposons qu'on ait $e * n = n$ pour tout n . Alors $e * 4 = 4$, mais on a aussi $e * 4 = 0$: contradiction.

17 C'est le volume d'un parallélépipède rectangle.

18 On montre que si a, b sont inversibles, d'inverses a', b' , alors ab aussi, car son inverse est $b'a'$. Comme 1 est inversible, l'ensemble I des éléments inversibles est un sous-monoïde. Comme $a \in I$ implique $a' \in I$, ce sous-monoïde est un groupe.

19 1) On montre par récurrence sur n que $(g_1 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$.

2) $(a^{-1}bc^{-1}abcb^{-1})^{-1} = bc^{-1}b^{-1}a^{-1}cb^{-1}a$.

3) $c^{-1}b^{-1}aa^{-1}bcadaa^{-1}d^{-1} = a$.

4) b^{-1} .

20 Supposons que $ac = ca$ et $bc = cb$. Par multiplication par b^{-1} à gauche et à droite, on obtient $cb^{-1} = b^{-1}c$. Ensuite $ab^{-1}c = acb^{-1} = cab^{-1}$.

21 L'élément neutre est (e, e) ; $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$.

22 On commence par montrer que si $[x] = [x']$, alors $[xy] = [x'y]$, et on en déduira que la multiplication des classes est bien définie. Puis on déduit l'associativité de cette multiplication de l'associativité de la multiplication des entiers. Ensuite, on montre que $[1]$ est l'élément neutre.

Si $[x]$ est inversible, on a $[x][y] = [1]$, donc $[xy] = [1]$, et enfin $xy \equiv 1 \pmod{n}$; donc $xy = 1 + kn$, ce qui implique que x est premier avec n . Réciproquement, si x est premier avec n , alors $xy + kn = 1$ par le théorème de Bezout; alors $[y]$ est l'inverse de $[x]$. Donc l'ensemble des éléments inversibles du monoïde est l'ensemble des $[x]$, x premier avec n . Pour conclure : dans tout monoïde, l'ensemble des éléments inversibles est un groupe (exercice 18).

23 On a $x \in A\Delta B$ si et seulement si x appartient à un seul des deux sous-ensembles A et B . Par suite, $x \in (A\Delta B)\Delta C$ si et seulement si x appartient à un seul de ces trois sous-ensembles, ou aux trois sous-ensembles A, B et C . Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

L'élément neutre est $\emptyset$, car $A\Delta\emptyset = A$, et l'inverse de A est A lui-même car $A\Delta A = \emptyset$, $\forall A$.

24 Supposons que H soit un sous-groupe. Alors $e \in H \Rightarrow$ (i); pour (ii) soient $a, b \in H$, on a $b^{-1} \in H$, donc $ab^{-1} \in H$.

25 On vérifie directement les conditions de la définition 4.1.

26 On vérifie directement les trois conditions de la définition 4.1.

27 On a $0 = b0$; de plus $bn + bm = b(n + m)$ et $b(-n) + (bn) = 0$. Donc $\{bn | n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, noté $n\mathbb{Z}$.

28 La surjectivité découle du théorème 4.3. Injectivité : $b\mathbb{Z} = b'\mathbb{Z}$ implique que soit $b = b' = 0$, soit $b, b' \neq 0$, et alors $b = b'$, car b est le minimum des éléments > 0 de $b\mathbb{Z}$, et pareil pour b' .

29 $h_1 h_2 \in HH \Rightarrow h_1 h_2 \in H$ et $h \in H \Rightarrow h = 1h \in HH$.

30 On applique aux définitions 2.3 et 3.1 les résultats connus sur la somme et le produit des matrices.

31 Récurrence.

32 Ecrire la table de multiplication de ces éléments.

33 C'est long.

34 Montrer que $x_1 * x_2$ est l'unique réel y dans $[0, 1)$ tel que $x_1 + x_2 - y$ est entier. En déduire l'associativité.

35 a) Sous-groupe. b) Sous-monoïde. c) Ni l'un, ni l'autre. d) Ni l'un, ni l'autre.

36 a) Associativité : $((fg)h)(x) = (fg)(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)) = f(x)((gh)(x)) = (f(gh))(x)$. L'élément neutre est la fonction constante $\mathbf{1}(x) = 1$.

b) Si $f(x)$ est inversible pour tout $x \in X$, d'inverse $f(x)^{-1}$, alors f est inversible, d'inverse la fonction f^{-1} définie par $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$. Réciproquement, si f est inversible, d'inverse g , alors $\mathbf{1}(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$, et de même pour le produit dans l'autre sens ; donc $f(x)$ est inversible pour tout x .

Les éléments inversibles de E sont donc les fonctions dont l'image est constituée d'éléments inversibles de M .

c) On déduit de b) que si M est un groupe, alors tout élément de E est inversible ; E est donc un groupe.

37 On a $aa = 1$, donc $a = a^{-1}$. Donc $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$.

38 Les orbites sont $Orb(0) = n\mathbb{Z}$, $Orb(1) = n\mathbb{Z} + 1, \dots, Orb(n-1) = n\mathbb{Z} + n - 1$. Il y en a n .

Réciproquement, supposons que (i) et (ii) soient satisfaits. Soit $a \in H$ (car H non vide). On a $e = aa^{-1} \in H$. Soit $b \in H$; alors $b^{-1} = eb^{-1} \in H$. Soient $a, b \in H$, on a $a, b^{-1} \in H$ et donc par (ii), $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$.

39 $0 \cdot z = e^0 z = z$; $(x + y) \cdot z = e^{i(x+y)} z = e^{ix} e^{iy} z = x(y \cdot z)$. Les orbites sont $\{z \mid |z| = r\}$, $r \geq 0$, les cercles centrés en O de rayon $r \geq 0$. On a $Stab(0) = \mathbb{R}$, et si $z \neq 0$, $Stab(z) = 2\pi\mathbb{Z}$, où $Stab(z) = Gz$, le stabilisateur de z .

40 a) $[1] \cdot ([1] \cdot z) = [1] \cdot \bar{z} = z = [0] \cdot z = ([1] + [1]) \cdot z$.

b) Si z est réel, son orbite est $\{z\}$; si z n'est pas réel, son orbite est $\{z, \bar{z}\}$. Dans le premier cas, le stabilisateur est G , et dans le second, c'est $[0]$.

c) À $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on associe l'orbite $\{a\}$ si $b = 0$, et l'orbite $\{a + bi, a - bi\}$ si $b < 0$.

41 Les orbites à un élément sont $\{1\}$ et $\{-1\}$; toutes les autres orbites ont deux éléments. Le stabilisateur de 1 est G , ainsi que celui de -1 ; le stabilisateur d'un autre élément est $\{[0]\}$. À un élément de E , on associe son orbite; on obtient une bijection, car on vérifie que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, son orbite rencontre E en exactement un élément.

42 Une orbite est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés centré en l'origine. Un tel polygone a exactement un sommet z avec $\arg(z) \in [0, 2\pi/n)$.

43 Si $gH = g'H$, alors $g' = gh$, donc $g'e = ghe = ge$, car $he = e$ puisque $h \in H$. Donc la fonction est bien définie. Elle est injective, car si $ge = g'e$, alors $g^{-1}g'e = e$, donc $g^{-1}g' \in H$, donc $g' = gh$ et enfin $g'H = ghH = gH$. Elle est clairement surjective. On conclut avec le théorème 5.8 et la remarque qui le suit.

44 Si G agit à gauche sur deux ensembles disjoints A et B , alors il agit sur leur réunion, de manière naturelle. Dans A il y a au moins une orbite, et de même dans B ; elles sont disjointes, donc dans l'action de G sur $A \cup B$, il y a au moins deux orbites.

45 Soient a, b deux éléments distincts de E . Alors dans l'action diagonale, (a, a) et (a, b) ne sont pas dans la même orbite. En effet, tout élément (x, y) de l'orbite de (a, a) satisfait $x = y$.

46 Soient a, b deux éléments distincts de E . Alors les 2^{n-1} éléments $(a, a_2, \dots, a_n)$ où pour tout $i = 2, \dots, n$, $a_i = a$ ou b , ont des orbites distinctes.

47 a) Soit $h' \in gStab(e)g^{-1}$; alors $h' = ghg^{-1}$ où $h \in Stab(e)$; alors $h'e' = ghg^{-1}e' = ghe = ge = e'$. Donc $gStab(e)g^{-1} \subset Stab(e')$. Symétriquement, $g^{-1}Stab(e')g \subset Stab(e)$. D'où $gStab(e)g^{-1} = Stab(e')$.

b) Les stabilisateurs ont la même cardinalité par le théorème 5.4 (iii).

c) Même théorème.

d) On a $\sum_{e \in C} |Stab(e)| = |C||Stab(C)| = |G|$ par c).

e) On a $\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{g \in G, e \in E, ge=e} 1 = \sum_{e \in E} \sum_{g \in G, ge=e} 1 = \sum_{e \in E} |Stab(e)|$.

f) On a $(1/|G|) \sum_{g \in G} |Fix(g)| = (1/|G|) \sum_{e \in E} |Stab(e)| = (1/|G|) \sum_C \sum_{e \in C} |Stab(e)| = (1/|G|) \sum_C |G| = \sum_C 1$, qui est égal au nombre d'orbites de E .

48 La fonction $f : H \times K \rightarrow G, (h, k) \mapsto hk$ est un homomorphisme de groupes. Son noyau est l'ensemble N des (h, k) tels que $hk = 1$; la projection naturelle de N sur H est injective, et son image est un sous-groupe de H ,

donc $|N|$ divise $|H|$; de même, $|N|$ divise $|K|$; donc $|N| = 1$, et par suite f est injective. Donc f est bijective.

49 La fonction $gH \mapsto Hg^{-1}$ est bien définie : en effet, si $gH = g'H$, alors $g' = gh$, donc $Hg'^{-1} = Hh^{-1}g^{-1} = Hg^{-1}$, car $Hh^{-1} = H$. La fonction réciproque est $Hg \mapsto g^{-1}H$.

50 Soit x, y dans G' . Il existe alors $a, b \in G$ tels que $x = f(a), y = f(b)$. Alors $xy = f(a)f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b)f(a) = yx$.

51 Soit $g' \in f(H)$; alors $g' = f(h)$ pour un $h \in H$. Donc $(g')^{-1} = (f(h))^{-1} = (f(h^{-1})) \in f(H)$ car $h^{-1} \in H$. De plus $e' = f(e)$: le neutre de G' est bien dans $f(H)$. Si $g'_1, g'_2 \in f(H)$, alors $g'_1 = f(h_1)$ et $g'_2 = f(h_2)$ pour $h_1, h_2 \in H$; d'où $g'_1g'_2 = f(h_1)f(h_2) = f(h_1h_2) \in f(H)$ car $h_1h_2 \in H$, H étant un sous-groupe.

52 $h_1, h_2 \in f^{-1}(H') \Rightarrow f(h_1), f(h_2) \in H' \Rightarrow f(h_1)f(h_2) = f(h_1h_2) \in H' \Rightarrow h_1h_2 \in f^{-1}(H')$. De plus, $f(1) = 1 \rightarrow 1 \in f^{-1}(H')$. Enfin, $h \in f^{-1}(H') \Rightarrow f(h^{-1}) = f(h)^{-1} \in H' \Rightarrow h^{-1} \in f^{-1}(H')$.

53 $\varphi(xy) = (f(xy), g(xy)) = (f(x)f(y), g(x)g(y)) = (f(x), g(x))(f(y), g(y)) = \varphi(x)\varphi(y)$. On a $x \in N(\varphi) \Leftrightarrow (f(x), g(x)) = (1_A, 1_B) \Leftrightarrow f(x) = 1_A$ et $g(x) = 1_B \Leftrightarrow x \in N(f)$ et $y \in N(g) \Leftrightarrow x \in N(f) \cap N(g)$.

54 (i) On reconnaît la fonction déterminant. On sait que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Le lecteur fera le calcul.

(ii) On a $|A \cup B| = |A| + |B| + |A \cap B|$, $|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$. Donc $|A \Delta B| = |A| + |B| \pmod{2}$.

(iii) $n + m \mapsto a^{n+m} = a^n a^m, 0 \mapsto 1$.

55 Si H est normal dans G , alors pour tous u, v dans G tels que $uv \in H$, on a $vu = v(uv)v^{-1} \in H$.

56 Soient $N = A \cap B$ l'intersection des deux sous-groupes normaux A, B du groupe G . On sait que N est un sous-groupe de G (exercice 26). Soient $g \in G, n \in N$; alors $gng^{-1} \in A$, car $a \in A$ qui est normal; de même $gng^{-1} \in B$; donc $gng^{-1} \in N$.

57 Soit $g' \in G', g' = f(g), g \in G$; alors $g'f(h)g'^{-1} = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(ghg^{-1}) \in f(H)$.

58 Si $h \in f^{-1}(H')$, alors $f(h) = h' \in H'$. Alors pour tout $g \in G$, $f(ghg^{-1}) = f(g)h'f(g)^{-1} \in H'$, donc $ghg^{-1} \in H$.

59 On a $x \in N(g \circ f) \Leftrightarrow g \circ f(x) = 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) \in N(g) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(N(g))$.

60 On vérifie facilement que C et N sont des sous-groupes de G et que $C \subset N$. Donc C est un sous-groupe de N . Si $n \in N, c \in C$, alors pour tout $a \in A$, $ncn^{-1}a(ncn^{-1})^{-1} = nn^{-1}ann^{-1}$ (car $n^{-1}an \in A$) $= a$. Donc $ncn^{-1} \in C$.

61 (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont respectivement les points (i) et (ii) dans la démonstration du théorème 7.3.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : On a $g^{-1}hg \in (g^{-1}H)(gH) = (g^{-1}g)H \subset H \Rightarrow g^{-1}hg \in H$ et H est normal.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : $gH)^{-1} = (Hg)^{-1} = \{(hg)^{-1} | h \in H\} = \{g^{-1}h^{-1} | h \in H\} = \{g^{-1}h' | h' \in H\} = g^{-1}H$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : $g^{-1}hg \in g^{-1}Hg = (gH)^{-1}g = Hg^{-1}g = H$.

62 Découle directement du théorème 7.5.

63 On a $hnh'n' = hh'(h'^{-1}nh') \in HN$. $HN = \bigcup_{h \in H} hN \bigcup_{h \in H} Nh = NH$.

64 C est l'intersection des stabilisateurs des éléments de A , c'est donc un sous-groupe de G . Pour montrer que N est un sous-groupe de G , on procède de manière analogue à la preuve de théorème 5.4 (ii). Clairement, C est un sous-ensemble de N , donc il est un sous-groupe de N .

Si $n \in N, c \in C$, alors pour tout $a \in A$, $n^{-1} \cdot a \in A$, donc $cn^{-1} \cdot a = n^{-1} \cdot a$, donc $ncn^{-1} \cdot a = nn^{-1} \cdot a = a$; il suit que $ncn^{-1} \in C$, et C est normal dans N .

On prend $E = G$, et l'action par conjugaison de G sur lui-même ($g \cdot e = geg^{-1}$).

65 Posons $M_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $M_a M_b = M_{a+b}$. On en déduit que

l'ensemble $\{M_a | a \in \mathbb{R}\}$ est un groupe sous la multiplication des matrices. De plus, que la fonction $M_a \mapsto a$ est un homomorphisme vers le groupe $\mathbb{R}$ additif.

66 On envoie tout élément x de $[0, 1)$ sur $x + \mathbb{Z}$.

67 a) Soit N la classe de modulo $\sim$. Si $g, h \in N$, alors $g \sim 1, h \sim 1$, donc $gh \sim 1$ et $gh \in N$. De plus, si $g \in N$, alors $g \sim 1$ et $g^{-1} \sim g^{-1}$, donc $1 = gg^{-1} \sim g^{-1}$ et $g^{-1} \in N$. Enfin, si $g \in N$ et $h \in G$, alors $h \sim h, g \sim 1, h^{-1} \sim h^{-1}$ implique, par multiplication des trois congruences, $hgh^{-1} \sim hh^{-1} = 1$, et $hgh^{-1} \in N$.

Supposons $g \sim h$; comme $g^{-1} \sim g^{-1}, g \sim h$ et $h^{-1} \sim h^{-1}$, on obtient par multiplication, $h^{-1} \sim g^{-1}$.

Si $n \in N$, alors $g \sim g$ et $n \sim 1$, donc $gn \sim g$. Donc $gN \subset [g]$. Si $h \in [g]$, alors $h \sim g$, donc $n = g^{-1}h \sim 1$, et enfin $h = gn \in gN$. Donc $[g] \subset gN$. Donc $[g] = gN$ et symétriquement $[g] = Ng$.

b) $gh^{-1} \in N \Leftrightarrow g \in Nh \Leftrightarrow g \in hN$ (car $Nh = hN$) $\Leftrightarrow h^{-1}g \in N$. Il est facile de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence, même pour un sous-groupe quelconque. De plus $g_1 \sim g_2$ et $h_1 \sim h_2$ implique $g_1g_2^{-1} \in N, h_1h_2^{-1} \in N$; alors $(g_1h_1)(g_2h_2)^{-1} = g_1g_2h_2^{-1}h_1^{-1} \in g_1Ng_2^{-1} = Ng_1g_2^{-1} \subset NN \subset N$,

d'où $g_1h_1 \sim g_2h_2$. La classe de 1 modulo $\sim$ est l'ensemble des g telle $g \in N$; c'est donc N . On conclut en utilisant a).

c) Que c'est une relation d'équivalence résulte de la théorie élémentaire des ensembles. De plus $g_1 \sim g_2$ et $h_1 \sim h_2 \Rightarrow f(g_1) = f(g_2)$ et $f(h_1) = f(h_2)$ d'où $f(g_1h_1) = f(g_1)f(h_1) = f(g_2)f(h_2) = f(g_2h_2)$. Donc $g_1h_1 \sim g_2h_2$. On a finalement $[1] = f^{-1}(1) = N(f)$ et $[g] = f^{-1}(f(g)) = gN(f) = N(f)g$ par a).

68 Tous les groupes cycliques infinis sont isomorphes.

69 $f^{-1}(H) \xrightarrow{f} H$ est un homomorphisme surjectif et $f^{-1}(H) \subset \mathbb{Z} \Rightarrow f^{-1}(H) = n\mathbb{Z}$. Donc H est cyclique car $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

b) $gh^{-1} \in N \Leftrightarrow g \in Nh \Leftrightarrow g \in hN$ (car $Nh = hN$) $\Leftrightarrow h^{-1}g \in N$. Il est facile de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence, même pour un sous-groupe quelconque. De plus $g_1 \sim g_2$ et $h_1 \sim h_2$ implique $g_1g_2^{-1} \in N, h_1h_2^{-1} \in N$; alors $(g_1h_1)(g_2h_2)^{-1} = g_1g_2h_2^{-1}h_1^{-1} \in g_1Ng_2^{-1} = Ng_1g_2^{-1} \subset NN \subset N$, d'où $g_1h_1 \sim g_2h_2$. La classe de 1 modulo $\sim$ est l'ensemble des g telle $g \in N$; c'est donc N . On conclut en utilisant a).

c) On a vu au chapitre 1 que c'est une relation d'équivalence. De plus $g_1 \sim g_2$ et $h_1 \sim h_2 \Rightarrow f(g_1) = f(g_2)$ et $f(h_1) = f(h_2)$ d'où $f(g_1h_1) = f(g_1)f(h_1) = f(g_2)f(h_2) = f(g_2h_2)$. Donc $g_1h_1 \sim g_2h_2$. On a finalement $[1] = f^{-1}(1) = N(f)$ et $[g] = f^{-1}(f(g)) = gN(f) = N(f)g$ par a).

70 Écrivons, pour simplifier, $az + b$ pour la fonction $z \mapsto az + b$. On a $(a_1z + b_1) \circ (a_2z + b_2) = a_1(a_2z + b_2) + b_1 = a_1a_2z + (a_1b_2 + b_1)$; $(a_2z + b_2) \circ (a_1z + b_1) = a_2(a_1z + b_1) + b_2 = a_1a_2z + (a_2b_1 + b_2)$; donc G n'est pas commutatif, car $a_1b_2 + b_1 \neq a_2b_1 + b_2$ en général (par exemple si $b_1 = 1$ et $a_1 = a_2 = b_2 = 0$). On a $az' + b = z \Rightarrow a^{-1}z - a^{-1}b = z'$; $(az + b)^{-1} = a^{-1}z + (-a^{-1}b)$; $(az + b) \circ (z + b') \circ (a^{-1}z - a^{-1}b) = (az + ab' + b) \circ (a^{-1}z - a^{-1}b) = z - b + ab' + b = z + ab' \in N$; $az \circ a'z = (aa')z$; $(az + b) \circ (a'z) \circ (a^{-1}z - a^{-1}b) = (aa'z + b) \circ (a^{-1}z - a^{-1}b) = a'z - a'b + b \neq a'z$ si $a' \neq 1$ et $b \neq 0$.

71 On vérifie que la deuxième matrice est d'ordre 4, et qu'elle engendre le groupe.

72 Si $x + n\mathbb{Z}$ est un générateur du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $px \equiv 1 \pmod{n}$. Donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $px = 1 + qn$, ce qui implique que x et n sont premiers entre eux.

Réciproquement, supposons que x et n soient premiers entre eux. Par le théorème de Bezout, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $px - qn = 1$. Donc $px \equiv 1 \pmod{n}$. Donc pour tout entier m , $mpx \equiv m \pmod{n}$ et il suit que $x + n\mathbb{Z}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

73 L'équation $xy \equiv 0 \pmod{n}$ signifie que n divise xy : $xy = nz$. Soit

$d = \text{pgdc}(x, n)$, $x = du$, $n = dv$, u, v premiers entre eux. Alors $duy = dvz$, donc $uy = vz$. Comme u, v sont premiers entre eux, le lemme de Gauss implique que v divise y . Donc l'ensemble des y solutions de notre équation est $v\mathbb{Z}$, d'où v est l'ordre de x .

74 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \xrightarrow{f} \{0, 1, 2\}$, $f(0) = f(3) = 0$, $f(1) = f(4) = 1$, $f(2) = f(5) = 2$; $N(f) = \{0, 3\}$.

75 $p([i]) = [i]$, $p : \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$; p est bien défini car $i \equiv j \pmod{abi} \Rightarrow j \pmod{a}$.

76 On vérifie que cette fonction est un homomorphisme surjectif, de noyau $6\mathbb{Z}$.

77 0 est (comme dans tout groupe noté additivement) le seul élément d'ordre 1. $\{1, 5, 7, 11\}$: ordre 12; $\{2, 10\}$: ordre 6; $\{4, 8\}$: ordre 3; $\{3, 9\}$: ordre 4; $\{6\}$: ordre 2.

78 a) Théorème 8.1.

c) La fonction $\mathbb{R}_+^* \times \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $(x, \epsilon) \mapsto \epsilon x$, est un isomorphisme. L'isomorphisme réciproque envoie y sur $(|y|, \epsilon)$ où la deuxième composante dépend du signe de y .

79 $p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la projection canonique; la fonction $H \mapsto p^{-1}(H)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ qui contiennent $n\mathbb{Z}$; ceux-ci sont de la forme $d\mathbb{Z}$, d divise n .

80 Dans ce groupe, n'importe quel élément $\neq 1$ l'engendre, car son ordre est un diviseur de p , donc égal à p . C'est donc un groupe cyclique de cardinalité p , donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

81 Si $i \equiv j \pmod{n}$, alors $g^i = g^j$.

82 Si p est premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a pour seuls sous-groupes le sous-groupe trivial et lui-même. Ce groupe est donc simple.

Si p n'est pas premier, $p = ab$, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a un sous-groupe de cardinalité b , à savoir l'ensemble des multiples de a . Ce sous-groupe est normal, puisque le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est commutatif. Donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est pas simple.

83 Pour tout $g \in G \setminus H$, G est réunion disjointe de H et Hg . Alors G est réunion disjointe de H et $g^{-1}H$, quelque soit $g \in G \setminus H$. Donc, pour $g \in G \setminus H$, $G \cup Hg = G \cup gH$ (réunion disjointe), et par suite $gH = Hg$. Donc H est normal.

84 a) Soit p et q les ordres de a et b . Soient A et B les sous-groupes engendrés par a et b . Alors $|A| = p$, $|B| = q$. Notons que $A \cap B$ est un sous-groupe de A et de B ; donc sa cardinalité divise p et q ; elle vaut donc 1, et par suite $A \cap B = \{1\}$.

Clairement, $(ab)^{pq} = a^{pq}b^{pq} = (a^p)^q(b^q)^p = 1^q 1^p = 1$. Donc l'ordre de ab

divise pq . Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $(ab)^k = 1$, alors $a^k = b^{-k} \in A \cap B$. Donc $a^k = 1$ et $b^k = 1$, et k est un multiple non nul de p et q . Comme ils sont premiers entre eux, k est un multiple de pq . Donc l'ordre de ab est pq .

b) Dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, i et $-i$ sont d'ordre 4, mais leur produit est d'ordre 2. Donc, en général, dans un groupe commutatif, l'ordre de ab n'est pas le plus petit multiple commun des ordres de a et b .

Il existe un groupe non commutatif où l'ordre de ab n'est pas le produit des ordres de a et b , même s'ils sont premiers entre eux. Par exemple, le groupe symétrique S_3 : $a = (1, 2)$, $b = (1, 2, 3)$ sont d'ordre 2 et 3, mais leur produit $(1, 2) \circ (1, 2, 3) = (2, 3)$ est d'ordre 2 (voir la définition 10.10 pour ces notations).

85 Il existe un groupe et un élément d'ordre 2. Le carré de cet élément est d'ordre 1.

86 S'il était cyclique, il serait engendré par une fraction p/q . Donc tout nombre rationnel serait de la forme np/q et aurait q pour dénominateur. Ce qui est évidemment faux.

87 Si $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ était fini, il existerait un ensemble fini R de rationnels tel que tout rationnel serait de la forme $r+n$, $r \in R$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors les dénominateurs des rationnels seraient en nombre fini, ce qui n'est pas.

Soit p/q une fraction ; alors $q \cdot p/q \in \mathbb{Z}$, donc l'ordre de $p/q + \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divise q .

88 On définit la structure de groupe comme dans l'exercice 36. Pour toute fonction $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ soit $P(f) = \{x_i \in X \mid f(i) = 1\}$. La fonction P va de l'ensemble des fonctions $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers l'ensemble des parties de X . On vérifie que $P(f+g) = P(f) \Delta P(g)$, et que P est une bijection, en utilisant la définition de Δ dans l'exercice 23.

89 Si $g \in G$, on $g^n = 1$, où $n = |G|$. Donc $\phi(g)^n = \phi(g^n) = \phi(1) = 1$, et $\phi(g)$ est donc une racine n -ème de l'unité.

Réciproquement, si $uv \in H \Leftrightarrow vu \in H$, alors pour tous $g \in G$, $h \in H$, on a $g^{-1}(gh) \in H$, donc $ghg^{-1} = (gh)g^{-1} \in H$.

90 a) Les orbites sont les demi-droites du plan, passant par l'origine, mais privées de l'origine.

b) Une telle demi-droite rencontre S^1 en un point exactement, et tout point de S^1 définit une telle demi-droite.

c) C'est une conséquence de la représentation polaire des nombres complexes.

91 Si H est un sous-groupe normal de G , alors pour tout $h \in H$, et pour tout $g \in G$, on a $ghg^{-1} \in H$, donc H contient la classe de h ; donc H est une réunion de classes. Réciproquement, si H est une réunion de classes, alors pour tous $h \in H$, $g \in G$, on a directement $ghg^{-1} \in H$; donc H est normal.

92 Rappelons que le polynôme caractéristique de M est $\det(xI - M)$. On a $xI - B = P^{-1}(xI - A)P$, donc $\det(xI - B) = \det(P^{-1}) \det(xI - A) \det(P) = \det(P)^{-1} \det(P) \det(xI - A) = \det(xI - A)$.

93 On a $x\gamma_y(x^{-1}) = xyx^{-1}y^{-1}$. On a $xy = yx$ si et seulement si $1 = xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}$.

94 Si pour tout automorphisme ϕ , on a $\phi(H) \subset H$, alors pour tout $g \in G$, on a $\gamma_g(H) \subset H$, puisque γ_g est un automorphisme de G . Donc $gHg^{-1} \subset H$. Il en découle que H est un sous-groupe normal.

95 Si H est un sous-groupe maximal, alors $\phi(H)$ est un sous-groupe maximal de G pour tout automorphisme de G ; en effet, ϕ induit une bijection, préservant l'inclusion, de l'ensemble des sous-groupes de G vers lui-même. Il suit de là que l'intersection K de tous les sous-groupes maximaux $\bigcap_H H$ est égal à $\bigcap_H \phi(H)$, ce qui est égal à $\phi(\bigcap_H H) = \phi(K)$. Donc K est un sous-groupe caractéristique de G ; c'est donc un sous-groupe normal par l'exercice **94**.

96 $(1, 3, 7, 5) \circ (2, 4) \circ (6, 9), (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2), (1, 9) \circ (2, 8) \circ (3, 7) \circ (4, 6)$.

97 $(j_1, j_2, \dots, j_k)^{-1} = (j_k, j_{k-1}, \dots, j_2, j_1)$.

98 $(n-1)!$.

99 $\binom{n}{2}$.

100 $\binom{n}{2}$ est le nombre d'inversions de cette permutation, car c'est le cardinal de l'ensemble $\{(j, i) | n \geq j > i \geq 1\}$. L'ensemble d'inversions d'une permutation est toujours contenu dans l'ensemble précédent.

101 $k; 6; 4$.

102 On rappelle que l'ordre d'un k -cycle est k (exercice **101**).

Supposons que α_1 et α_2 soient des permutations dans S_n , et que A_1, A_2 soient des sous-ensembles disjoints de $[n]$, tels que $\alpha_1|_{A_1^c} = \text{id}_{A_1^c}$ et que $\alpha_2|_{A_2^c} = \text{id}_{A_2^c}$; on dit alors que α_1 agit sur A_1 , et α_2 agit sur A_2 . On montre alors que $(\alpha_1 \circ \alpha_2)^k = \text{id} \Leftrightarrow (\alpha_1|_{A_1})^k = \text{id}_{A_1}$ et $(\alpha_2|_{A_2})^k = \text{id}_{A_2}$. On en déduit que l'ordre de $\alpha_1 \circ \alpha_2$ est le ppmc des ordres de α_1 et de α_2 .

Le résultat précédent se généralise à m permutations $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, et on l'applique aux m cycles de la décomposition en cycle d'une permutation.

103 Écrire la table de multiplication. Ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

104 Si $|i - j| \geq 2$, alors σ_i et σ_j sont des cycles disjoints, donc ils commutent. Si $|i - j| = 1$, on peut supposer sans perte de généralités que $j = i + 1$; alors le calcul montre que $\sigma_i \sigma_j \sigma_j$ envoie i sur $i + 2$, $i + 1$ sur $i + 1$ et $i + 2$ sur i , et qu'il en est de même pour $\sigma_j \sigma_i \sigma_i$; comme σ_i et σ_j laissent fixe tout $k \notin \{i, i + 1, i + 2\}$, on a bien $\sigma_i \sigma_j \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \sigma_i$. Pour conclure, on remarque que $\sigma_i^2 = \text{id}$.

105 On peut montrer que si $\sigma \in S_n$ a p_1 points fixes, et p_i i -cycles de longueur i pour tout $i = 2, \dots, n$, alors la cardinalité de son centralisateur est $z = 1^{p_1} \dots n^{p_n} p_1! \dots p_n!$. Sauf si $p_1 = n$, et les autres $p_i = 0$, le nombre z est $< n!$. Donc σ ne commute pas avec tous les éléments de S_n .

106 L'ensemble E a $n!$ éléments, car on a 2 choix pour a_2 , 3 choix pour $a_3, \dots$, et n choix pour a_n .

Le fait que l'image de la fonction T est contenue dans E résulte de ce que a_k est égal à la cardinalité d'un ensemble de cardinalité au plus $k - 1$; en effet, dans la définition de a_k , on $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = 1, 2, \dots, k - 1$.

Le fait que l'image de T est exactement E résulte de ce que T est injective.

Montrons que la fonction T est injective. On se donne donc un $n - 1$ -uplet $T(\sigma) = a_2, \dots, a_n$; on doit donc avoir $\sigma = unv$, la concaténation des 3 mots u , n et v , où la longueur de v est a_n . Par récurrence sur n , la permutation uv est entièrement déterminée par sa table d'inversion $(a_2, \dots, a_{n-1})$.

107 On a $(i_1, \dots, i_k) = \sigma(i_1, \dots, i_k) = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ si et seulement si $\forall j = 1, \dots, k$, $\sigma(i_j) = i_j$. Donc le stabilisateur de $(i_1, \dots, i_k)$ est l'ensemble des permutations dans S_n qui fixent tous les éléments de l'ensemble $I = \{i_1, \dots, i_k\}$; c'est un sous-groupe de S_n , isomorphe à $S_{n-|I|}$.

108 $(1, 5)(2, 9, 8)(3, 7, 6, 10, 4)$. L'ordre est le ppmc de 2, 3, 5, donc c'est 30 (exercice **102**).

109 a) On sait déjà que H a 3 classes, et K en a 2 (théorème **5.8**).

Pour la classe à gauche de K , autre que K , on prend une permutation qui n'est pas dans K , par exemple $(1, 2)$. On a $(1, 2)K = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. De même $K(1, 2) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Pour les classes à gauche de H , on prend par exemple $(1, 3)$ et $(2, 3)$. On a $(1, 3)H = \{(1, 3), (1, 2, 3)\}$, $(2, 3)H = \{(2, 3), (1, 3, 2)\}$. De même $H(1, 3) = \{(1, 3), (1, 3, 2)\}$ et $H(2, 3) = \{(2, 3), (1, 2, 3)\}$.

b) En appliquant le critère de l'exercice **61**, on voit que H n'est pas normal, mais que K l'est. On peut aussi appliquer l'exercice **91** et le théorème **10.13**.

110 On sait qu'il y a 6 classes (théorème **5.8**).

111

112 On a $(1, 2, \dots, n)^i (1, 2) (1, 2, \dots, n)^{-i} = (1 + i, 2 + i)$ pour $i = 0, \dots, n - 2$ (lemme **10.14**). Il s'ensuit que le sous-groupe engendré par $(1, 2)$ et $(1, 2, \dots, n)$ contient toutes les transpositions adjacentes $(j, j + 1)$, $j = 1, \dots, n - 1$. Or celles-ci engendrent S_n (théorème **10.7**). Donc ce sous-groupe est S_n .

113 $a = (1, 6)(2, 9, 3, 10, 8)(4, 7, 5)$, donc son ordre est $\text{ppmc}(2, 5, 3) = 30$, d'après l'exercice **102**. Le sous-groupe engendré par a est donc isomorphe à

$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$, et l'isomorphisme envoie a sur 1. Comme $1074 = 30 \cdot 65 + 24$, on a $1974 \equiv 24 \pmod{30}$, et l'ordre de a est égal à celui de 24 dans $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$; comme le pgcd de 24 et 30 est 6, l'ordre cherché est $30/6 = 5$ (exercice 73).

114 a) $\sigma = (1, 4, 5)(2, 9, 3)(6, 7)$, $\tau = (1, 7, 4, 2)(3, 9, 5)(6, 8)$.

b) En utilisant l'exercice 102, on obtient que l'ordre de σ est 6, et celui de τ est 12.

115 Chercher les éléments de ce monoïde dont le carré vaut 1. Ils seront envoyés sur les trois transpositions de S_3 . Les deux autres qui ne sont pas l'identité (la fonction x), seront envoyés sur les deux 3-cycles de S_3 .

116 La signature est un homomorphisme vers un groupe commutatif; sous un tel homomorphisme, deux éléments conjugués ont toujours même image. On compte les inversions du k -cycle $(1, 2, \dots, k) \in S_n$; sa représentation en mot est $2, 3, \dots, k, 1, k+1, \dots, n$; on voit qu'il y a $k-1$ inversions, donc sa signature est $(-1)^{k-1}$. Comme deux k -cycles sont conjugués, ils ont tous deux cette signature.

117 La fonction qui envoie la matrice indiquée sur a est un isomorphisme de groupes vers $\mathbb{R}$ avec l'addition.

118 Utiliser directement la définition du produit des matrices.

119 Suivre le premier paragraphe de cette preuve.

120 On montre d'abord que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{N})$ satisfait $a+b+c+d \leq 2$, alors $M = I_2$. Si M ne satisfait pas cette inégalité, on montre que, selon que $a > c$ ou $c \geq a$, la matrice M' définie par $M = RM'$ ou $L = LM'$ satisfait $M' \in SL_2(\mathbb{N})$ et que la somme des coefficients de M' est inférieure à celle de M ; on conclut par récurrence.

121 Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $ABA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(ABA)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

Soit H le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $P(q)$, $q \in \mathbb{Z}$. Il s'agit de montrer que $H = GL_2(\mathbb{Z})$. On a déjà $A = P(1)P(0) \in H$, $B = (P(0)P(1))^{-1} \in H$. Donc $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in H$, $-I_2 \in H$.

Soit M dans $GL_2(\mathbb{Z})$. Si M n'a que deux coefficients non nuls, ces deux coefficients ne sont pas dans la même ligne, ni la même colonne; notez que $P(0) = P(0)^{-1}$. Donc, quitte à multiplier par $P(0)$, M est l'une des quatre matrices diagonales avec des coefficients 1 ou -1 sur la diagonale: c'est donc l'une des 4 matrices $I_2, -I_2, P(0)J, JP(0)$, et elle est dans H .

On peut donc supposer que M a au moins 3 coefficients non nuls.

Ecrivons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On peut se ramener à $b \neq 0$, quitte à multiplier à gauche par $P(0)$, à ce que les deux coefficients de la première ligne sont non nuls. Quitte à multiplier à droite par $P(0)$, on peut se ramener à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $|a| \geq |b| > 0$. Alors, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$. Alors $M = NP(q)$, où $N = \begin{pmatrix} b & r \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Alors la somme des valeurs absolues des coefficients de la première ligne de N est plus petite que celle de M . Par hypothèse de récurrence, on est ramené à $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme le déterminant est ± 1 , on doit avoir $d = \pm 1$. Si $d = 1$, $M = B^{-c} \in H$. Si $d = -1$, alors on multiplie par $JP(0)$, et on est ramené à $d = 1$.

122 Si $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ est un produit de matrices $P(q)$, ce produit doit comporter un nombre pair de telles matrices ; en effet le déterminant de $P(q)$ est -1 , et $\det(M) = 1$. On utilise les identités $P(q)P(r) = P(q)P(0)P(0)P(r)$, $P(q)P(0) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^q$, et similairement pour $P(0)P(r)$.

123 On a $P(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^q P(0)$.

124 $SL_n(\mathbb{Z})$ est le noyau de l'homomorphisme $\det : GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \{1, -1\}$ (multiplicatif), c'est donc un sous-groupe normal. L'image de cet homomorphisme est le groupe $\{1, -1\}$, donc $GL_n(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z}) \simeq \{1, -1\}$ par le corollaire 7.10.

125 Les coefficients non nuls, et égaux à 1, de la matrice $P(\sigma)$ ont $(\sigma(j), j)$ pour coordonnées lignes/colonnes. Pour la matrice $P(\sigma^{-1})$, les coordonnées sont $(\sigma^{-1}(j), j)$; comme $\{(\sigma^{-1}(j), j) | j = 1, \dots, n\} = \{(i, \sigma(i)) | i = 1, \dots, n\}$, on voit que $P(\sigma^{-1})$ est la transposée de $P(\sigma)$.

126 Cela résulte de l'égalité $\{(1, \alpha(1)), \dots, (n, \alpha(n))\} | \alpha \in S_n = \{(\beta(1), 1), \dots, (\beta(n), n)\} | \beta \in S_n$. Précisément $\{(1, \alpha(1)), \dots, (n, \alpha(n))\} = \{(\beta(1), 1), \dots, (\beta(n), n)\}$ si $\beta = \alpha^{-1}$.

127 On a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

128 Si $n = de$, alors les multiples de e forment un sous-groupe d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (les nombres sont pris modulo n). Si $G = \prod_i C_i$ est un produit fini de groupes cycliques, alors $|G| = \prod_i |C_i|$. Si d divise $|G|$, il existe pour tout i un diviseur d_i de n_i , avec $d = \prod_i d_i$; d'après ce qui précède, il existe un sous-groupe H_i de C_i d'ordre d_i ; alors $\prod_i H_i$ est un sous-groupe de G d'ordre d .

129 On commence par écrire 2016 comme produit de nombres premiers :

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

130 Adapter la preuve du corollaire.

131 On a $A(m) = n/\text{pgdc}(m, n)A$.

132 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

Références

- [1] François Bergeron, Théorie des groupes, Notes de cours, UQàM, 2011. 2
- [2] Christophe Hohlweg, Théorie des groupes, Notes de cours, UQàM, 2018. 2
- [3] Jacques Labelle, Christophe Reutenauer, Algèbre 1, Notes de cours, UQàM, 1998. 2
- [4] Serge Lang, Algebra, 47
- [5] Christophe Reutenauer, Algèbre linéaire 2, Notes de cours, UQàM. 42

Index

- G_e , 12
- $Orb(e)$, 12
- $[E : G]$, 15
- Δ , 8
- k -cycle, 35
- action, 12
- alphabet, 48
- $\text{Aut}(G)$, 30
- Burnside, 17
- caractéristique, 31
- centralisateur, 30
- centre, 30
- classe d'un élément modulo un sous-groupe normal, 21
- classe à droite de g modulo le sous-groupe H , 13
- classe à gauche de g modulo le sous-groupe H , 13
- classifier, 9
- commutateur, 31
- commuter, 8
- concaténation, 48
- congruence de monoïdes, 48
- conjugués, 29, 31
- cycle, 35
- cyclique, 25
- diagramme commutatif, 22
- différence symétrique, 8
- disjoints, 35
- distingué, 20
- engendré, 10
- exposant, 43
- facteur, 49
- formule de Burnside, 17
- groupe alterné, 34
- groupe libre sur A , 49
- groupe linéaire, 40
- groupe symétrique, 32
- homomorphisme canonique, 21
- homomorphisme de groupes, 17
- impaire, 34
- index, 15
- indicateur d'Euler, 27
- indice, 15
- induite, 9
- inversion, 32
- isomorphisme, 19
- Lagrange, 15, 26
- lettre, 48
- longueur, 35, 48
- magma libre, 56
- matrice de permutation, 41
- monoïde libre, 48
- mot, 32
- mot cycliquement réduit, 49
- mot réduit, 49
- mot sur A , 48
- mot vide, 48
- multi-ensemble, 36
- multiplicité, 36
- normal, 20
- normalisateur, 30
- orbite, 12, 35
- ordre, 13, 26
- ordre infini, 26

paire, 34
permutation, 32
permutation circulaire, 35
point fixe, 35
produit cartésien, 8
produit de parties, 21
projection canonique, 21
propriété universelle, 48, 49
propriété universelle du quotient, 22
présERVE, 17

représentant, 14

signature, 34
somme directe interne, 44
sous-groupe, 8
 de Sylow, 52
sous-groupe caractéristique, 31
stabilisateur, 12
Sylow, 52
système de représentants, 14
système générateur, 10

table de multiplication, 9
théorème chinois, 24
théorèmes d'isomorphisme, 50
tore, 42
translation à gauche, 14
transposition, 35
transposition adjacente, 33
type cyclique, 36

équation aux classes, 14, 53