Algèbre linéaire 1

Christophe Reutenauer
Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

6 avril 2026

Table des matières

Remerciements : Benjamin Blanchette, Christophe Hohlweg, Anissa Amroun, pour discussions et corrections ; Frédéric Rochon, pour l'exemple de l'équation différentielle du ressort.

1 Introduction

Les sections 11, 12 et 13, sauf 13.2, sont déjà vues au CEGEP (voir les livres [1, 2], ou le cours MAT0600 de l'UQAM). On peut les omettre, en tout cas les parcourir rapidement.

Les sections 2, 3 et 4 sont tirées des notes de cours "Algèbre 1", de Jacques Labelle et de l'auteur [3].

Première partie

Ensembles, fonctions, récurrence

2 Ensembles

Sans développer complètement la théorie des ensembles, nous donnons les principaux éléments de ce langage et les notations utilisées.

La notion d'*ensemble* est fondamentale en mathématiques. Les termes « groupement », « famille » ou « collection » donnent une intuition de cette notion.

Comme exemples d'ensembles, citons l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des droites dans un plan, l'ensemble des étudiants de l'UQàM.

Les objets qui composent un ensemble sont appelés *éléments* de cet ensemble. On représente souvent les ensembles par des majuscules et leurs éléments par des minuscules. Si a est un élément de l'ensemble A, on écrit $a \in A$ et on lit « a *appartient à* A » ou « a est un élément de A ». Si a n'est pas élément de A, on écrit $a \notin A$ et on lit « a n'appartient pas à A » ou « a n'est pas un élément de A ».

L'écriture $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ signifie que A est composé des éléments $a_1, a_2, ..., a_m$; il peut y avoir des répétitions d'éléments : par exemple, $\{a, b, a\}$ représente le même ensemble que $\{a, b\}$ ou $\{b, a\}$.

Un ensemble peut être constitué d'un nombre fini ou infini d'éléments. Si A possède un nombre fini d'éléments, $|A|$ dénote son nombre d'éléments, qu'on appelle aussi *cardinalité* de A.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'*ensemble vide* et on le représente par le symbole $\emptyset$. Sa cardinalité est 0.

Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément s'appelle un singleton.

On utilisera les notations suivantes : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs ; $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels (les fractions) ; $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls ; $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

On utilise souvent, pour définir un ensemble, une notation comme $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ (on écrit aussi $B = \{x \in A, P(x)\}$) ; cette notation signifie que B est l'ensemble des éléments de A qui possèdent la propriété. Ainsi, on aura pour tout élément x de A : $x \in B$ si et seulement si $P(x)$. Autrement dit, si l'on veut montrer qu'un élément x de A est en fait dans B, il suffit

de montrer que $x \in A$ a la propriété P. Et vice-versa, si x a la propriété P, il est dans B.

Des exemples : $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in N\}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs ; $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2\}$ désigne l'ensemble des carrés dans $\mathbb{N}$.

Soient A et B deux ensembles. Si A et B sont constitués des mêmes éléments, on dit qu'ils sont *égaux* et on écrit $A = B$. Si tous les éléments de A appartiennent à B, on dit que A est *contenu* ou *inclus* dans B, ou encore que A est un *sous-ensemble* ou une *partie* de B, et on écrit $A \subset B$ ou $B \supset A$ (on dit aussi que B contient A). Remarquez que $\emptyset$ et A sont des sous-ensembles particuliers de A ; un sous-ensemble autre que ceux-ci est un sous-ensemble *propre* de A.

On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X ; donc les éléments de $\mathcal{P}(X)$ sont les parties de X. Par exemple, si $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$. C'est un ensemble de cardinalité 8.

Dans la pratique, quand on veut montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on doit montrer qu'un élément quelconque de A est forcément dans B. Autrement dit que : $x \in A \Rightarrow x \in B$. De plus, pour montrer que $A = B$, on doit montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

On appelle *réunion* ou *union* de deux ensembles A et B le nouvel ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à A ou à B ou aux deux ; on le note $A \cup B$ et on lit "A union B". Donc

$$A \cup B = \{x \in A \,\text{ou}\, x \in B\}.$$

On appelle *intersection* de deux ensembles A et B le nouvel ensemble formé des éléments communs à A et B ; on la note $A \cap B$ et on lit "A inter B " :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \,\text{et}\, x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*, sinon on dit que A et B se coupent. La réunion de plusieurs ensembles $A_1, \ldots, A_n$ est notée $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, ou $\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$, ou encore $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$.

Des notations analogues sont utilisées pour l'intersection de plusieurs ensembles.

Le couple ordonné ayant a comme première composante et b comme seconde composante se note (a, b). Si A et B sont des ensembles, le *produit cartésien* de A et B est

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \,\text{et}\, b \in B\}.$$

Exercice 2.1. *Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5\}$. Écrire les ensembles suivants :*

a) $A \times B$; b) $\mathcal{P}(A)$; c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$.

Exercice 2.2. *a) Vrai ou faux. Soit $A = \{1, 2, 4, \{2, 3\}\}$: $\{1, 2\} \in A$? ; $\{1, 2\} \subset A$?.*

b) Soit $B = \{1, 2, 4, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$: $\{1, 2\} \in B$? ; $\{1, 2\} \subset B$?.

Exercice 2.3. *Soit $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Vrai ou faux. a) $\emptyset \in X$; b) $\emptyset \subset X$; c) $\{\emptyset\} \in X$; d) $\{\emptyset\} \subset X$; e) $\{\{\emptyset\}\} \in X$; f)$\{\{\emptyset\}\} \subset X$.*

Exercice 2.4. *Décrire l'ensemble $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists a, b \in \mathbb{N}, a, b \geq 2, x = ab\}$. On peut commencer par énoncer lesquels des nombres de 1 à 10 sont dans cet ensemble.*

Exercice 2.5. *Soit A un ensemble de cardinalité n ; montrer que $\mathcal{P}(A)$ est de cardinalité 2^n.*

Exercice 2.6. *Soient A, B des ensembles. On $A \setminus B$ l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$, et on l'appelle la* différence *de A et B.*

a) Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (cet ensemble, s'appelle la différence symétrique *de A et B).*

b) Montrer que $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

3 Relations et fonctions

Une *relation de A vers B* est un sous-ensemble R de $A \times B$. Une relation $R \subset A \times B$ est dite *fonctionnelle* si pour tout $a \in A$, il existe un et un seul $b \in B$ tel que $(a, b) \in R$.

Si R est une relation fonctionnelle, incluse dans $A \times B$, elle définit une *fonction f* de A vers B ; on écrit ceci $f : A \to B$; on dit que A est l'*ensemble de départ* de f et B son *ensemble d'arrivée*. L'ensemble de départ de f est aussi appelé *domaine de définition* de f.

On dit aussi *application* au lieu de fonction.

Soit $f : A \to B$. Pour un élément a donné, l'unique b tel que $(a, b) \in R$ s'appelle l'*image* de a par la fonction f et il est noté $f(a)$. Intuitivement une fonction de A vers B est donc une règle qui permet d'associer à tout élément $a \in A$ un et un seul élément $b \in B$; cet élément b est noté $f(a)$: $f(a) = b$. On dit aussi que *a est envoyé sur b par f*, ou que *f associe b* à a. On écrit $a \overset{f}{\mapsto} b$, ou bien $a \mapsto b$ si la fonction f est sous-entendue. Appelons aussi *antécédent de $b \in B$ par f* tout élément $a \in A$ tel que $b = f(a)$.

Si $X \subset A$, alors $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ est appelé l'*image (directe)* de X par f. L'ensemble $f(A) \subset B$ s'appelle l'*image* de f ; on le note $\mathcal{I}(f)$.

Si $Y \subset B$, alors $f^{-1}(Y) = \{x \in X | f(x) \in Y\}$ est appelé l'*image réciproque* (ou *inverse*) de Y par f [1]. Autrement dit, $f^{-1}(Y)$ est l'ensemble des antécédents de tous les éléments de Y. On a aussi :

$$\forall a \in A : a \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(a) \in Y.$$

Si $Y = \{y\}$ est un singleton, on écrit aussi simplement $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$.

Proposition 3.1. *Soit $f : A \to B$. Si $X_1 \subset A$ et $X_2 \subset A$, alors*
a)$X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$;
b) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$;
c) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
Si $Y_1 \subset B$ et $Y_2 \subset B$, alors
d) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$;
e) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$;
f)$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
De plus, si $X \subset A$ et $Y \subset B$, alors $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ et $X \subset f^{-1}(f(X))$.

La démonstration est laissée en exercice.

L'ensemble des fonctions de A à B est noté B^A (cette notation s'explique par le fait que si A et B sont finis et $|A| = n$, $|B| = m$, alors $|B^A| = m^n = |B|^{|A|}$).

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des fonctions, alors $g \circ f$, appelée *composée* (ou *composition*) de f et g, est la fonction de A vers C définie par

$$g \circ f(a) = g(f(a)), \forall a \in A$$

.

La composition des fonctions est une opération associative (exercice !). De plus, la fonction identité est un élément neutre : si $f : E \to F$, on a $id_F \circ f = f = f \circ id_E$, où id_E est la fonction $E \to E$ qui envoie tout $e \in E$ sur lui-même.

Exemple 3.1. *La composée de $f(x) = x^2 + 1$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, par la fonction $g(x) = \sqrt{x}$, $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, est la fonction $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.*

Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que :

1. Attention, la notation $f^{-1}(Y)$ ne signifie pas que la fonction réciproque f^{-1} de f existe.

1. f est *injective* si pour tous $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Ce qui équivaut à : pour tous $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, ou encore à : pour tout $b \in B$, $f^{-1}(b)$ a au plus un élément. On dit alors aussi que f est une *injection*.
2. f est *surjective* si $f(A) = B$. Ce qui équivaut à : pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$, ou encore : pour tout $b \in B, f^{-1}(b)$ a au moins un élément. On dit alors aussi que f est une *surjection*.
3. f est *bijective* si f est injective et surjective. Ce qui équivaut à : pour tout $b \in B$, il existe un et un seul $a \in A$ tel que $f(a) = b$, ou encore à : pour tout $b \in B, |f^{-1}(b)| = 1$. Dans ce cas, on dit aussi que c'est une *bijection*.

On a aussi : f est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si tout $b \in B$ a au plus (resp. a au moins, resp. a exactement) un antécédent par f.

Exemple 3.2. *La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 n'est pas injective ; en effet, on a $1 \neq -1$ mais $f(1) = f(-1)$.*

Exemple 3.3. *La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^3 est injective ; en effet, tout réel a une unique racine cubique. Donc, $\forall v \in R$, il existe au plus un $x \in R$ tel que $f(x) = v$.*

Exemple 3.4. *La fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à n associe $2n$ est injective ; en effet, pour tout entier naturel n il existe au plus un entier naturel p tel que $2p = n$.*

Exemple 3.5. *La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 n'est pas surjective ; en effet, il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = x^2$.*

Exemple 3.6. *La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^3 est surjective ; en effet, tout réel a une unique racine cubique. Donc, $\forall v \in R$, il existe au moins un $x \in R$ tel que $f(x) = v$.*

Exemple 3.7. *La fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à $2n$ et $2n + 1$ associe n est surjective ; en effet, tout entier naturel n est l'image par cette fonction de $2n$ (et aussi de $2n + 1$).*

Exemple 3.8. *La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$; la bijection réciproque est la fonction logarithme.*

Si f est bijective alors la *fonction réciproque* $f^{-1} : B \to A$ est définie par $f^{-1}(b) = a$ si et seulement si $f(a) = b$. Donc $f^{-1} \circ f = id_A$ et $f \circ f^{-1} = id_B$

où pour tout $a \in A, id_A(a) = a$ et pour tout $b \in B, id_B(b) = b$. La fonction id_A est appelée la *fonction identité* de A. On a

$$\forall x \in E, \forall y \in F : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y). \tag{1}$$

S'il existe une bijection (c'est-à-dire une fonction bijective) de A vers B, on dit que A et B sont *équipotents* (ou ont même nombre d'éléments ou même cardinalité).

Exercice 3.1. *Soit R la relation $\{(1,2),(1,3),(3,1)\}$. Est-ce une relation fonctionnelle ? Même question avec $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$.*

Exercice 3.2. *On appelle* graphe *d'une fonction $f : A \to B$ la relation fonctionnelle R qui la définit. Montrer que $R = \{(a,b) \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.*

Exercice 3.3. *Répondre par vrai ou faux (et justifier). Si $f : A \to B$ et $X, Y \subset A$, alors $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.*

Exercice 3.4. *Soient les fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Montrer que pour tout $X \subset A$ et pour tout $Y \subset C$, $(g \circ f)(X) = g(f(X))$ et $(g \circ f)^{-1}(Y) = f^{-1}(g^{-1}(Y))$.*

Exercice 3.5. *Soient les fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Répondre par vrai ou faux et justifier.*

a) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

b) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

c) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 3.6. *Soit $f : A \to B$ une fonction. Prouvez que :*

a) f est surjective $\Leftrightarrow \exists h : B \to A$ telle que $f \circ h = id_B$;

b) f est injective $\Leftrightarrow \exists g : B \to A$ telle que $g \circ f = id_A$. Ici on suppose $A \neq \emptyset$.

Exercice 3.7. *Soit $f : X \to Y$ une fonction. Prouver que $\forall A \subset X$ et $\forall B \subset Y$ on a : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

Exercice 3.8. *Montrer, avec les notations de la proposition 3.1, que, pour tous sous-ensembles X_1, X_2 de A, on a égalité dans le c) de ce lemme, si et seulement si f est injective.*

4 Raisonnement par récurrence

On veut démontrer une propriété qu'ont tous les entiers naturels n, par exemple : « la somme de tous les entiers de 0 à n est égale à $n(n+1)/2$». Comme on considère une propriété quelconque, on va la noter $P(n)$, à lire : n a la propriété P. On veut donc montrer que $P(0)$ est vraie, ainsi que $P(1)$, $P(2)$, et ainsi de suite. On utilise pour cela, le raisonnement par *récurrence*, ou par *induction*. Commençons par l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.1. *$P(n)$ est la propriété « la somme des entiers de 0 à n est égale à $n(n+1)/2$». La propriété $P(0)$ est vraie, puisque $0 = 0 \cdot (0+1)/2$. Nous faisons maintenant ce qu'on appelle l'*hypothèse de récurrence*, c'est-à-dire nous supposons que $P(n)$ est vraie et essayons d'en déduire $P(n+1)$. L'hypothèse de récurrence implique que la somme des entiers de 0 à n vaut $n(n+1)/2$; nous en déduisons que la somme des entiers de 0 à $n+1$ vaut $n(n+1)/2 + n + 1 = (n+1)(n/2+1) = (n+1)(n+2)/2$, ce qui démontre que $P(n+1)$ est vraie. Ainsi nous avons montré que : (i) $P(0)$ est vraie, et (ii) si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie. Le principe de récurrence nous assure alors que $P(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel n.*

Principe de récurrence : On veut démontrer une propriété $P(n)$ que possèdent tous les entiers naturels n. On fait comme suit :

(i) On démontre que P(0) est vraie.

(ii) On fait l'hypothèse que $P(n)$ est vraie (*hypothèse de récurrence*), et on démontre que $P(n+1)$ est vraie. Autrement dit, on démontre que « $P(n)$ vraie » implique « $P(n+1)$ vraie ». Ceci étant fait, on est sûr que la propriété est vraie pour tous les entiers : intuitivement en effet, $P(0)$ est vraie par (i), donc $P(1)$ est vraie par (ii), donc $P(2)$ est vraie par (ii) et ainsi de suite.

Attention : pour (ii), il faut prendre un entier n quelconque, non spécifié, et pas 17, ou 1789, ou autre.

Principe de récurrence (variante) : On laisse tel quel (i) et on remplace (ii) par :

(ii') on fait l'hypothèse que $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ sont toutes vraies (*hypothèse de récurrence*), et on démontre qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Une autre variante consiste, au lieu de commencer par 0, à commencer par un nombre plus grand, comme dans la preuve de l'énoncé suivant. Rappelons d'abord qu'un entier naturel est dit *premier* s'il est ≥ 2 et s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Théorème 4.1. *Tout entier naturel ≥ 2 est divisible par un entier naturel premier.*

Démonstration. Pour $n = 2$, le théorème est évident car 2 est premier et 2 est divisible par 2.

Soit n un entier ≥ 2 et supposons que pour tout entier compris entre 2 et n, k est divisible par un nombre premier. Considérons $n+1$: s'il est premier alors il est divisible par un nombre premier ; s'il n'est pas premier, alors on a $n+1 = k \cdot m$, où k est un entier naturel non nul, différent de 1 et de $n+1$. Alors k est compris entre 2 et n. Donc, par l'hypothèse de récurrence, k est divisible par un nombre premier p. Comme p divise k et que k divies $n+1$, p divise $n+1$, ce qui finit la preuve. □

Exercice 4.1. *Démontrer par récurrence les assertions suivantes, où n est un entier naturel quelconque. Indications : dans tous ces exercices, la difficulté est comment passer de l'expression avec n à l'expression avec $n+1$.*

a) $n^2 - n$ *est divisible par 2.*
b) $n^3 - n$ *est divisible par 3.*
c) $4^n - 1$ *est divisible par 3.*
d) $2^{2n+1} + 1$ *est divisible par 3.*
e) $9^n - 8n - 1$ *est divisible par 64.*
f) $7^n - 3^n$ *est divisible par 4.*
g) $2^n > n$.
h) si $n \geq 1$, *alors* $2^{n-1} \leq n!$.
i) $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
j) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
k) $0 \cdot 0! + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
l) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdot + n^3 = (1 + 2 + \cdot + n)^2$.

Deuxième partie
Cours d'algèbre linéaire 1

5 Espaces vectoriels et applications linéaires

5.1 Les huit axiomes d'un espace vectoriel

Définition 5.1. *Un* espace vectoriel *est un ensemble E qui a deux opérations. La première, appelé e*addition*, ou* somme*, et la seconde est appelée* produit externe*. L'addition associe à deux éléments quelconques x, y de E un élément noté $x + y$. Le produit externe associe à un nombre réel a et à un élément x de E un élément de E noté ax. Ces deux opérations*

jouissent des propriétés suivantes (appelées axiomes des espaces vectoriels*) : quels que soient les éléments x, y, z de E et les réels a, b, on a :*

1. $x + y = y + x$ *(commutativité) ;*
2. $(x + y) + z = (x + y) + z$ *(associativité ;*
3. *Il existe un élément* 0_E *de* E *tel que* $x+0_E = x$ *(existence de l'élément neutre) ;*
4. *Il existe un élément* x' *de* E *tel que* $x+x' = 0$ *(existence de l'opposé) ;*
5. $1x = x$ *(le produit externe de* $1 \in \mathbb{R}$ *avec* x *est égal à* x*) ;*
6. $(ab)x = a(bx)$ *(associativité).*
7. $(a + b)x = ax + bx$ *(distributivité) ;*
8. $a(x + y) = ax + ay$ *(distributivité) ;*

Notez qu'on écrit parfois 0 pour le 0_E dans l'axiome 3. Ceci constitue ce qu'on appelle un *abus de notation*, qui peut être ambigu ; le contexte en général lève l'ambiguïté. Si par exemple, $e \in E$ et si on écrit $e+0$, c'est clair que c'est $e+0_E$, et non pas $e+0_{\mathbb{R}}$, car il n'y a pas de sens à additionner un élément de E et un élément de $\mathbb{R}$ (sauf dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$). De même, dans $0e$, c'est clair que le 0 est le zéro des réels (il n'y a pas de produit de deux vecteurs).

Pour un exemple concret de ces propriétés, regardez l'exemple 5.2 ci-dessous : x, y, z sont des matrices de même taille et ax désigne le produit du réel a par la matrice x (ax s'obtient de x en y multipliant tous les coefficients par a)

On appelle souvent *scalaire* un élément de $\mathbb{R}$; ceci, par opposition aux éléments des éléments des espaces vectoriels, qui sont souvent appelés *vecteurs*.

On a $0e = 0$ (ici le premier 0 est le zéro de $\mathbb{R}$, et le second celui de E) : en effet $0e + 0e = (0 + 0)e = 0e$, donc en ajoutant de chaque côté l'opposé de $0e$, on trouve $0e = 0$.

De plus l'opposé de e est $(-1)e$ (qu'on note $-e$) : en effet, $e + (-1)e = 1e + (-1)e = (1 + (-1))e = 0e = 0$.

La *soustraction* dans un espace vectoriel est définie par $u-v = u+(-1)v$; c'est-à-dire soustraire v de u, c'est additionner u est l'opposé de v. On a l'identité (a est un scalaire)

$$a(u - v) = au - av$$

et en particulier

$$-(u + v) = -u - v.$$

Exemple 5.1. L'espace vectoriel nul *est l'ensemble à un élément* $\{0\}$. *C'est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *On a évidemment* $0+0=0$ *et* $a0=0$ *pour tout scalaire* a.

Exemple 5.2. *Fixons des entiers naturels* n *et* p. *Alors l'ensemble* $M_{np}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel ; car on peut additionner deux matrices, et on peut multiplier toute matrice par un scalaire, et tous les huit axiomes sont satisfaits, comme on le voit dans la section 12.2.*

Exemple 5.3. *Fixons un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et soit* F *l'ensemble des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Alors* F *est un espace vectoriel. Car on peut additionner deux fonctions dans* F *et multiplier une fonction dans* F *par un scalaire ; de plus les huit axiomes sont satisfaits.*

Exercice 5.1. *On note* E *l'ensemble des matrices infinies à coefficients réels, dont les lignes et les colonnes sont indexées par les entiers naturels positifs 1,2,3,4.... Définir de manière naturelle une addition dans* E. *De même, un produit d'un scalaire par une telle matrice. Montrer que* E *est alors un espace vectoriel sur les réels (vérifier les huit axiomes).*

Exercice 5.2. *Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus 4, à coefficients réels, est un espace vectoriel.*

Exercice 5.3. *Montrer que l'ensemble des suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels est un espace vectoriel.*

5.2 Combinaisons linéaires

Définition 5.2. *Soit* E *un espace vectoriel. Une* combinaison linéaire *dans* E *est une expression de la forme* $a_1e_1+\ldots+a_ne_n$ *où* $a_1,\ldots,a_n$ *sont dans* $\mathbb{R}$ *et* $e_1,\ldots,e_n$ *sont dans* E. *On appelle* coefficients *de la combinaison linéaire les réels* $a_1,\ldots,a_n$.

Une telle expression s'écrit aussi $\sum_{i=1}^{i=n} a_ie_i$, ou aussi $\sum_{1\leq i\leq n} a_ie_i$. On appelle *longueur* de la combinaison linéaire l'entier n. Le cas particulier $n=0$ est aussi considéré : on l'appelle la *combinaison linéaire vide*. Elle est utile pour faire des raisonnements par récurrence.

La combinaison linéaire, définie ci-dessus comme une expression, représente aussi un vecteur dans E[2] ; ce vecteur est défini par récurrence

2. On peut pensee à l'expression $3+4$, qui d'une par est une expression représentant une addittion, et d'autre part représente le nombre 7.

sur n : si $n = 0$, c'est le vecteur nul ; si $n = 1$, c'est $a_1 e_1$; et si $n \geq 2$, c'est $(a_1 e_1 + \ldots + a_{n-1} e_{n-1}) + a_n e_n$. Le fait qu'on omet les parenthèses provient de ce que l'addition dans E est associative.

La combinaison linéaire ci-dessous est dite *triviale* si tous ses coefficients sont nuls.

Il n'est pas difficile de calculer avec des combinaisons linéaires. Par exemple, si $\sum_{i=1}^{i=n} a_i e_i = 0$, et si $a_1 \neq 0$, alors e_1 s'exprime comme une combinaison linéaire de $e_2, \ldots, e_n$. En effet, on a d'abord $a_1 e_1 = -\sum_{i=2}^{i=n} a_i e_i$; puis en multipliant pas l'inverse $\frac{1}{a_1}$ du scalaire a_1, on obtient : $e_1 = -\sum_{i=2}^{i=n} \frac{a_i}{a_1} e_i$. Faire les exercices 5.4 et 5.5 pour se familiariser avec ce type de calculs.

Exercice 5.4. *Dans cet exercice les lettres u, v, w, x, y, z représentent des vecteurs d'un espace vectoriel E et a, b, c, d, e des scalaires.*

(i) Montrer que si $u = 3v - w + x$, alors chacun des vecteurs v, w, x est combinaision linéaire de u et des autre vecteurs (par exemple, v est combinaison linéaire de u, w, x).

(ii) Montrer que si $au + bv + cw = 0$ et si $a \neq 0$, alors u est combinaison linéaire de v et w. Pourquoi l'hypothèse $a \neq 0$ est-elle essentielle ?

(iii) Montrer que si $u = 3v - w$, $v = x + y$ et $w = y - z$, alors u est combinaison linéaire de x, y, z.

(iv) Montrer que si u est combinaison linéaire de v et w, que v et w sont chacun combinaison linéaire de x et y, alors u est combinaison linéaire de x et y.

Exercice 5.5. *Montrer que si le vecteur x est combinaison linéaire des vecteurs y et z, et si $x \neq 0$, alors soit y est combinaison linéaire de x et z, soit z est combinaison linéaire de x et y.*

5.3 Applications linéaires

Une application linéaire est une fonction d'un espace vectoriel vers un autre qui préserve les opérations de ces espaces. Plus précisément :

Définition 5.3. *Soient E, F des espaces vectoriels. Une fonction $f : E \to F$ (c'est-à-dire une fonction de E vers F) est appelée une* application linéaire *si pour tous vecteurs x, y dans E et tout scalaire a on $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(ax) = af(x)$.*

Un exemple est la fonction *trace*, qui est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$: elle envoie toute matrice carrée sur la somme de ses éléments diagonaux. Un autre exemple est la fonction qui à toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$

(où I est un intervalle fixé) associe $f(a)$ ($a \in I$ fixé). Un autre exemple est la fonction transposition $M_{np}(\mathbb{R}) \to M_{pn}(\mathbb{R})$.

Définition 5.4. *On appelle* endomorphisme *de V une application linéaire de l'espace vectoriel V dans lui-même.*

Un exemple d'endomorphisme est la transposition de l'espace de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Exercice 5.6. *Montrer que les applications suivantes sont linéaires.*

(i) $M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto a+b+c+d.$

(ii) $M_{13}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R}), [a,b,c] \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$

(iii) $M_{13}(\mathbb{R}) \to M_{31}(\mathbb{R}), [a,b,c] \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$

(iv) $M_{12}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R}), [a,b] \mapsto \begin{bmatrix} 2a+b & a-b \\ a & a+2b \end{bmatrix}.$

Exercice 5.7. ** Soit $P(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ un polynôme ($a_i \in \mathbb{R}$). Montrer que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto P(a)$ est une application linéaire si et seulement si $\forall i \neq 1, a_i = 0$.*

5.4 Matrice d'une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Considérons une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, dont les éléments sont représentés par des matrices-colonnes. Soit f une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$; on définit la *matrice de f* de la manière suivante : c'est une matrice de taille $n \times p$, dont la j-ème colonne est le vecteur colonne image par f du vecteur ${}^t(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ (le 1 est en position j).

Soient x, y des vecteurs dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n$ respectivement, représentés respectivement par des matrices colonnes X, Y. On a alors

$$Y = MX.$$

La matrice M permet donc de calculer l'image $y = f(x)$ de tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ donné.

6 Sous-espaces vectoriels

6.1 Définition et caractérisation

Définition 6.1. *Un* sous-espace vectoriel *d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble E non vide de V qui est fermé sous les deux opérations de V ; ce qui signifie que quels que soient les vecteurs u, v dans E et le scalaire a, on a $u + v \in E$ et av dans E.*

Notez que puisque le sous-espace est non vide, il contient 0 (obtenu en multipliant par le scalaire 0 n'importe quel vecteur du sous-espace).

Exemple 6.1. *Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Considérons le sous-ensemble F des matrices de trace nulle. La matrice nulle est dans F ; la somme de deux matrices de trace nulle est de trace nulle ; et le produit externe d'une matrice de trace nulle par un réel est encore de trace nulle. Donc F est un sous-espace. Soyons encore plus concret : par exemple $n = 2$, $E = M_2(\mathbb{R}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\}$ et $F = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\}$.*

Exemple 6.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, F l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et C l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Alors C est un sous-espace vectoriel de F. En effet, C est bien un sous-ensemble de F. De plus, la fonction nulle est dans C (elle est continue). De plus si $f, g \in C$, alors $f + g \in C$ (la somme de deux fonctions continues sur I est continue). Enfin, si $f \in C$ et $a \in \mathbb{R}$, alors la fonction af est continue.*

Lorsque F est un sous-espace de l'espace vectoriel de E, F devient un espace vectoriel avec les *opérations induites* de E à F ; c'est-à-dire, la somme dans E et le produit externe de E définissent sur F une somme et un produit externe, car F est fermé sous ces opérations.

Proposition 6.1. *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel avec les opération induites.*

Démonstration. Soit F un sous-espace de E. Le 0 est dans F, comme nous l'avons vu. De plus si $x \in F$, alors son opposé est $(-1)x$: il est aussi dans F. Donc les axiomes 3 et 4 sont satisfaits. Les six autres axiomes sont évidemment satisfaits. □

Pour montrer qu'un sous-ensemble donné d'un espace vectoriel en est un sous-espace, on applique la recette suivante.

Proposition 6.2. *Soit F un sous-ensemble de l'espace vectoriel de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si on a les trois propriétés suivantes :*

1. $0 \in F$ *;*

2. pour tous x, y *dans* F*, on a* $x + y \in F$ *;*

3. pour tous $x \in E$ *et pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, on a* $ax \in F$*.*

Démonstration. C'est évident. □

Ne pas oublier de vérifier que F est un sous-ensemble de E ; c'est souvent évident, mais on peut le mentionner.

Exercice 6.1. *Montrer que si G est sous-espace de F et si F est sous-espace de E, alors G est sous-espace de E.*

Exercice 6.2. *Montrer que l'espace des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace de l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 6.3. *Montrer que l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'' + f = 0$ est un espace vectoriel. Indication : montrer que c'est un sous-espace d'un espace judicieusement choisi.*

Exercice 6.4. *Montrer que l'ensemble des* matrices magiques *dans $M_{np}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne est nulle) est un sous-espace de $M_{np}(\mathbb{R})$.*

Exercice 6.5. *Est-ce que l'ensemble des matrices de trace égale à 2 est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$?*

Exercice 6.6. *Est-ce que l'ensemble des matrices de déterminant non nul (resp. de déterminant nul) est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$?*

Exercice 6.7. *Montrer qu'un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E est un sous-espace de E si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

1. $0 \in F$ *;*

2. pour tous $x, y \in F$ *et pour tout* $a \in \mathbb{R}$*,* $x + ay \in F$*.*

Exercice 6.8. *a) Montrer que si E est un sous-espace de l'espace vectoriel V, et que si u, v sont des vecteurs tels que u et $u + v$ sont dans E, alors u est dans E.*

b) On suppose que A, B sont des sous-espaces de V tels que B n'est pas inclus dans A. Montrer qu'il existe un vecteur b dans B tel que b n'est pas dans A.

c) On suppose que la réunion $A \cup B$ est un sous-espace de V. Montrer que si a est un vecteur quelconque de A, alors $a+b$ est dans $A \cup B$, où b est le vecteur de la question b).

d) Montrer que $a+b$ n'est pas dans A, en utilisant la question a).

e) En déduire que $a+b$ est dans B, et que a est dans B en utilisant la question a).

f) En déduire que A est inclus dans B.

g) En déduire que si la réunion de deux sous-espaces est un sous-espace, alors l'un est inclus dans l'autre.

6.2 Sous-espace engendré par un nombre fini de vecteurs

Il découle de ce qui précède que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore dans F. En notation mathématique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_n \in F, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{1 \geq i \geq n} a_i x_i \in F.$$

Ceci démontre facilement par récurrence sur n, en commençant par $n = 0$, c'est-à-dire la combinaison linéaire vide, qui représente le vecteur nul.

Proposition 6.3. *Soient $e_1, \ldots, e_k$ des vecteurs dans un espace vectoriel E. L'ensemble F des vecteurs de E qui sont combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient chacun des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.*

Démonstration. La combinaison linéaire triviale (tous les coefficients nuls) représente le vecteur nul, qui est donc dans F. Soient $x, y \in F$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors, par définition de $\mathbb{R}$, il existe des coefficients a_i, b_i dans $\mathbb{R}$ tels que $x = \sum_i a_i e_i$ et $y = \sum_i b_i e_i$. Donc $x + y = \sum_i (a_i + b_i) e_i$ et $ax = \sum_i (a a_i) e_i$ sont aussi dans F, car ils sont des combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_k$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E par la proposition 6.2. □

Définition 6.2. *On appelle* sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$ *le sous-espace de la proposition précédente. Notation :* $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Exercice 6.9. *Soit F le sous-espace de E engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Montrer que F est le plus petit sous-espace de E qui contient $e_1, \ldots, e_n$. Indication : montrer que si un sous-espace G de E contient $e_1, \ldots, e_n$, alors $F \subset G$.*

6.3 Intersection de sous-espaces et systèmes d'équations linéaires

Rappelons que si F, G sont ensembles, leur *intersection* est l'ensemble des éléments de F qui sont aussi dans G.

Proposition 6.4. *L'intersection de deux sous-espaces d'un espace vectoriel en est un sous-espace.*

Démonstration. Si $x, y \in F \cap G$, alors $x \in F$ et $y \in F$; donc $x + y \in F$. De même, $x + y \in G$. Donc $x + y \in F \cap G$.

Si $x \in F \cap G$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $x \in F$, donc $ax \in F$. De même $ax \in G$. Donc $ax \in F \cap G$. □

Corollaire 6.1. *L'intersection d'un nombre fini de sous-espaces d'un espace vectoriel est un sous-espace.*

Démonstration. Récurrence sur le nombre de sous-espaces. □

On montre aussi qu'une intersection quelconque de sous-espaces et un sous-espace, voir l'exercice 6.10.

Un exemple important de sous-espace vectoriel est le sous-espace de $\mathbb{R}^p = M_{1p}(\mathbb{R})$ associé à un système d'équations linéaires homogène. Considérons le système d'équations linéaires

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0,$$

$$\cdots,$$

$$a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = 0,$$

L'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui satisfont le sytème est un sous-espace de $\mathbb{R}^p$. Pour le voir, on remarque que cet ensemble est l'intersection des n sous-ensembles $\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = 0\}$, $i = 1, \ldots, n$.

On est donc ramené (par le corollaire 6.1) au cas d'une seule équation linéaire : $a_1x_1 + \ldots + a_px_p = 0$. On remarque que l'ensemble de p-uplets qui satisfont une équation linéaire satisfait les trois conditions de la proposition 6.2 (une preuve plus moderne consiste à vérifier que cet ensemble est le noyau de l'application linéaire $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_px_p \in \mathbb{R}$, voir le corollaire 8.1)

Qu'en est-il des systèmes d'équations linéaires généraux non homogènes ? Ceci est traité dans l' exercice 6.12.

Exercice 6.10. *Montrer que l'intersection d'un ensemble quelconque de sous-espaces d'un espace vectoriel E est un sous-espace de E.*

Exercice 6.11. *Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E, et soit F le sous-espace qu'ils engendrent. On considère l'ensemble des sous-espaces G de E tels que $e_1, \ldots, e_n$ sont éléments de G. Montrer que l'intersection de tous les sous-espaces de cet ensemble est égale à F.*

Exercice 6.12. * *Un* sous-espace affine *d'un espace vectoriel E est une partie de E qui est soit vide, soit de la forme $e + F = \{e + f, f \in F\}$, où F est un sous-espace vectoriel de E et $e \in E$. Montrer que si $e' \in e + F$, alors $e + F = e' + F$. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine ; de même pour un nombre fini quelconque de sous-espaces affines. Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires en p variables est un sous- espace affine de $\mathbb{R}^p$.*

7 Bases et dimension

7.1 Dépendance et indépendance linéaire

Définition 7.1. *On dit que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace vectoriel V sont* linéairement dépendants *s'il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ et que $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$. On dit aussi que $v_1, \ldots, v_n$ sont* liés.

Rappelons que $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ signifie $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, c'est-à-dire, le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas égal au n-uplet $(0, \ldots, 0)$. Pour exprimer que $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, on dit que $a_1, \ldots, a_n$ sont *non tous nuls*[3].

Définition 7.2. *On dit que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace vectoriel V sont* linéairement indépendants *s'ils ne sont pas linéairement dépendants. On dit aussi qu'ils sont* libres.

Cela signifie que quels que soient les scalaires $a_1, \ldots, a_n$,

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Ceci donne la recette suivante : si vous voulez prouver que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, vous considérez des scalaires *quelconques* $a_1, \ldots, a_n$ et vous devez prouver l'implication ci-dessus.

3. Cette condition est essentielle, car si on l'omet, la définition précédente n'a pas de sens (puisque pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ on a $0v_1 + \ldots + 0v_n = 0$).

Exemple 7.1. *Prouvons que les vecteurs* $(1,2)$ *et* $(2,3)$ *sont linéairement indépendants. Soient* a, b *des réels quelconques ; écrivons qu'on a le côté gauche de l'implication ci-dessus :* $a(1,2) + b(2,3) = 0$. *On obtient* $(a + 2b, 2a + 3b) = (0,0)$, *donc* $a + 2b = 0$ *et* $2a + 3b = 0$. *On résout ce système d'équations linéaires, et on trouve* $a = b = 0$ *; cqfd.*

Définition 7.3. *On dit qu'un vecteur* v dépend linéairement de $v_1, \ldots, v_n$ *si* v *est égal à une combinaison linéaire de* $v_1, \ldots, v_n$.

De manière équivalente : $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$.
Il y a donc trois notions dont la terminologie est semblable :

1. $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants ;
2. $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants ;
3. v dépend linéairement de $v_1, \ldots, v_n$.

Il vaut mieux apprendre par coeur, et surtout comprendre, ces trois notions. Pour s'aider, noter que 1. et 2. sont la négation l'un de l'autre.

Proposition 7.1. *Soit* $0 \leq p < n$. *Si* $v_1, \ldots, v_p$ *sont linéairement indépendants et si* $v_1, \ldots, v_n$ *sont linéairement dépendants, alors il existe* $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ *tel que* v_j *dépend linéairement des autres vecteurs* v_k, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq j$.

Preuve. Il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$, non tous nuls, tels que $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$. On ne peut avoir $a_{p+1} = \ldots = a_n = 0$: sinon en effet les $a_1, \ldots, a_p$ sont non tous nuls et $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement dépendants, contrairement à l'hypothèse.

Il existe donc $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ tel que $a_j \neq 0$. Alors $a_j v_j = -\sum_{i \neq j} a_i v_i$ et par suite $v_j = \frac{-1}{a_j} \sum_{i \neq j} a_i v_i = \sum_{i \neq j} \frac{-a_i}{a_j} v_i$. □

Proposition 7.2. *Si* v *dépend linéairement de* $v_1, \ldots, v_n$ *et si* v_n *dépend linéairement de* $v_1, \ldots, v_{n-1}$, *alors* v *dépend linéairement de* $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Autrement dit : si $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ et si $v_n \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$, alors $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Preuve. On a en effet $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ et $v_n = b_1 v_1 + \ldots + b_{n-1} v_{n-1}$. Par suite $v = a_1 v_1 + \ldots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n(b_1 v_1 + \ldots + b_{n-1} v_{n-1}) = a_1 v_1 + \ldots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n b_1 v_1 + \ldots + a_n b_{n-1} v_{n-1} = (a_1 + a_n b_1) v_1 + \cdots (a_{n-1} + a_n b_{n-1}) v_{n-1}$. □

Proposition 7.3. *Si des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace vectoriel dépendent linéairement de vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ et si $n > p$, alors $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants.*

Lemme 7.1. *Si des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires non nuls, alors les vecteurs $\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n$ sont linéairement dépendants.*

Démonstration. Il existe des scalaires non tous nuls tels que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$. On a alors $(\frac{a_1}{\alpha_1})(\alpha_1 v_1) + \ldots + (\frac{a_n}{\alpha_n})(\alpha_n v_n) = 0$, et les scalaires $\frac{a_i}{\alpha_i}$ son non tous nuls. □

Preuve de la Proposition 7.3. On fait un raisonnement par récurrence sur p. Le cas de base est $p = 0$: alors $n > 0$ et $v_1, \ldots, v_n$ dépendent alors linéairement de 0 vecteurs ; ils sont donc tous nuls. Alors ils sont linéairement dépendants, puisque qu'on a la relation de dépendance linéaire $\sum_{1 \geq i \geq n} v_i = 0$.

Supposons maintenant que $p \geq 1$ et supposons que la proposition est vraie pour $p-1$ (c'est-à-dire : si m vecteurs dépendent linéairement de $p-1$ vecteurs et si $m > p-1$, alors ces m vecteurs sont linéairement dépendants).

Soient alors $v_1, \ldots, v_n$ et $x_1, \ldots, x_p$ comme dans l'énoncé. Nous pouvons écrire $v_1 = a_1 x_1 + \cdots$ où les points représentent une combinaison linéaire de $x_2, \ldots, x_p$, qu'on n'a pas besoin de préciser pour comprendre le raisonnement. De même, $v_i = a_i x_1 + \ldots$. Si les a_i sont tous nuls, alors les n vecteurs v_i dépendent linéairement des $p-1$ vecteurs $x_2, \ldots, x_p$; par hypothèse de récurrence, ils sont donc linéairement dépendants. Si par contre, ils ne sont pas tous nuls, on peut sans perte de généralité supposer que $a_1 \neq 0$.

Remplacons v_1 par $a_1^{-1} v_1$ (sans perte de généralité, car nous allons montrer que $a_1^{-1} v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants, et on conclura avec le lemme précédent) ; alors on aura $v_1 = x_1 + \ldots$. Définissons $u_i = v_i - a_i v_1$, pour $i = 2, \ldots, n$: alors u_i est combinaison linéaire des $x_1, \ldots, x_p$: $u_i = a_i x_1 + \ldots - a_i(x_1 + \ldots)$, et on voit qu'en fait u_i est combinaison linéaire de $x_2, \ldots, x_p$. Par hypothèse de récurrence (puisque $n-1 > p-1$), les $n-1$ vecteurs $u_2, \ldots, u_n$ sont donc linéairement dépendants : $b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n = 0$, avec des scalaires b_i non tous nuls. Ceci implique que $0 = b_2(v_2 - a_2 v_1) + \cdots + b_n(v_n - a_n v_1) = -(b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n) v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$, et les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ sont donc linéairement dépendants. □

Exercice 7.1. *Montrer que :*

(i) Si $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, alors $\forall i, v_i \neq 0$.

(ii) Si $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, alors $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sont linéairement indépendants.

(iii) Si l'un des vecteurs v_i est nul, alors $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants.

(iv) Si $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants, alors $v_1, \ldots, v_{n+1}$ le sont aussi.

(v) Si v dépend linéairement de $v_1, \ldots, v_n$, alors $v, v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants.

Exercice 7.2. *Les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'eux est linéairement dépendants des autres.*

Exercice 7.3. *Si u et v sont linéairement dépendants de $v_1, \ldots, v_n$, alors aussi $u + v$ et av (a est un scalaire).*

Exercice 7.4. *Montrer que si x, y sont linéairement indépendants, alors aussi $x, x+y$. Généraliser : si $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants, alors aussi $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$.*

Exercice 7.5. *Dans $\mathbb{R}^n$: on suppose que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Montrer que $(a_1, \ldots, a_n)$ est combinaison linéaire de $(1, -1, 0, \ldots, 0), (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 1, -1)$.*

Exercice 7.6. *Montrer que les résultats de cette section impliquent les énoncés suivants :*

a) Soit $0 \leq p < n$. Si $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants et si $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants, alors il existe $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ tel que $v_j \in \mathrm{Vect}(\{v_k \mid k \in \{1, \ldots, n\} \setminus j\})$.

b) Si n vecteurs sont linéairement dépendants et $n \geq 1$, alors l'un de ces vecteurs est linéairement dépendants des autres.

c) Si $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants et si $v_1, \ldots, v_{p+1}$ sont linéairement dépendants, alors v_{p+1} est linéairement dépendant de $v_1, \ldots, v_p$.

d) Si $v_n \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$, alors $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

e) Si $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ et si $n > p$, alors $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants.

7.2 Bases : existence et unicité de la dimension

Définition 7.4. *On dit que l'espace vectoriel V est* finiment engendré *s'il existe des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans V, en nombre fini, qui engendrent V.*

Ceci signifie donc que tout vecteur dans V est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$.

Définition 7.5. *Soit V un espace vectoriel finiment engendré. Une* base *de V est une suite de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de V qui l'engendrent et qui sont linéairement indépendants.*

Ceci signifie donc que tout vecteur dans V est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$, de manière unique (voir l'exercice 7.7).

Un exemple typique est l'espace vectoriel $M_{np}(\mathbb{R})$ et sa *base canonique*. Celle-ci consiste en les np matrices E_{ij} : cette matrice a tous ses coefficients nuls, sauf celui en position i, j, qui vaut 1.

Théorème 7.1. *Soit $p \leq q$. Soient $v_1, \ldots, v_q$ des vecteurs d'un espace vectoriel V, qui engendrent V, et tels que $v_1, \ldots, v_p$ soient linéairement indépendants. Il existe alors parmi les vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_q$ des vecteurs $u_1, \ldots, u_r$ tels que $v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_r$ forment une base de V.*

Preuve. (récurrence sur $q - p$) Si $q - p = 0$, il n'y a rien à démontrer : en effet, dans ce cas $v_1, \ldots, v_p$ est déjà une base de V.

Supposons que $q - p > 0$, c'est-à-dire $p < q$. Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_q$ sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de V et on a fini. Sinon, ils sont linéairement dépendants. Alors par la proposition 7.1, il existe $j > p$ tel que v_j soit linéairement dépendant des autres vecteurs v_k, $k \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{j\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que c'est v_q qui est linéairement dépendant de $v_1, \ldots, v_{q-1}$. Alors ces $q - 1$ vecteurs engendrent V, comme il découle de la proposition 7.2. On a $p \leq q - 1$ et $q-1-p < q-p$. Par hypothèse de récurrence, on obtient donc qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_r$, pris parmi $v_{p+1}, \ldots, v_{q-1}$ tels que $v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_r$ est une base de V. □

Corollaire 7.1. *Si $v_1, \ldots, v_q$ engendrent V, il existe parmi ces vecteurs des vecteurs qui forment une base de V.*

Preuve. On applique le théorème avec $p = 0$. □

Corollaire 7.2 (Premier théorème fondamental de l'algèbre linéaire)**.** *Tout espace vectoriel finiment engendré possède une base finie.*

Preuve. Il existe des vecteurs $v_1, \ldots, v_q$ qui engendrent V. On applique le corollaire 7.1. □

Corollaire 7.3. *(théorème dit de la "base incomplète") Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel finiment engendré V. Il existe alors des vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_n$ tels que $v_1, \ldots, v_n$ forment une base de E.*

Preuve. Il existe des vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_q$ qui engendrent V. On applique le théorème aux vecteurs $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q$ qui engendrent évidemment V. □

Théorème 7.2 (Second théorème fondamental de l'algèbre linéaire)**.** *Dans un espace vectoriel finiment engendré, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration. Si on avait deux bases de cardinalités différentes, cela contredirait la proposition 7.3. □

Définition 7.6. *Soit E un espace vectoriel finiment engendré. On appelle* dimension *de E le nombre d'éléments d'une base de E. Notation :* $\dim(E)$.

Théorème 7.3. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e_1, \ldots, e_n \in E$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $e_1, \ldots, e_n$ forment une base ;
(ii) $e_1, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants ;
(iii) $e_1, \ldots, e_n$ engendrent E.

Il peut paraître bizarre que (ii) ou (iii) suffise. Mais c'est parce que le nombre des vecteurs est égal à la dimension de l'espace. Pour appliquer le théorème, il ne faut pas oublier de vérifier cette condition, qui suppose entre autres qu'on connaisse la dimension.

Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii) et (iii).

(ii) ⇒ (i) : on peut compléter ces n vecteurs en une base de E (corollaire 7.3). Mais une base de E a n éléments. Donc $e_1, \ldots, e_n$ forment une base.

(iii) ⇒ (i) : si les e_i étaient linéairement dépendants, l'un d'eux serait linéairement dépendants des autres. On trouverait alors un système de $n-1$ vecteurs qui engendrent E (proposition 7.2). Donc une base avec au plus $n-1$ éléments (corollaire 7.1), contradiction. □

Nous finissons cette section par un critère pour les bases d'un espace vectoriel. Il utilise les matrices.

Corollaire 7.4. *Soit E un espace de dimension n avec base $e_1, \dots, e_p$. Soit $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs dans E tels que $v_j = \sum_i a_{ij} e_i$. Alors les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ forment une base de E si et seulement si la matrice $[a_{ij}]$ est inversible.*

Remarquez que la matrice de l'énoncé s'obtient en écrivant dans chaque colonne j les coefficients du développement de v_j dand la base $e_1, \dots, e_n$.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 2, 3)$ et si on prend la base canonique e_1, e_2, e_3 de E, la matrice est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Pour déterminer si la matrice carrée est inversible, on peut utiliser le déterminant : il doit être non nul, voir Théorème 13.2.

Le corollaire sera démontré dans la sous-section 8.7.

Exercice 7.7. *Montrer que $v_1, \dots, v_n$ forment une base de l'espace vectoriel V si et seulement si tout vecteur v dans V est égal à une combinaison linéaire unique (i.e les coefficients sont uniques) de $v_1, \dots, v_n$.*

Exercice 7.8. *Soit V l'espace vectoriel des vecteurs (a, b, c, d) tels que $a + b + c + d = 0$. (i) Montrer que les vecteurs $(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)$ en forment une base. (ii) Montrer que les vecteurs $(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)$ en forment une autre base.*

Exercice 7.9. *Montrer que toutes les bases de $\mathbb{R}$, qui est de dimension 1, sont formées par un seul élément a, $a \neq 0$.*

Exercice 7.10. *Montrer que les deux vecteurs $(a, b), (c, d)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

7.3 Bases des sous-espaces

Proposition 7.4 (Troisième théorème fondamental de l'algèbre linéaire)**.** *Tout sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie n est un espace vectoriel de dimension finie $\leq n$.*

Démonstration. Soit p maximum tel que dans F, il existe p vecteurs linéairement indépendants. Ce p existe (c'est-à-dire, ce n'est pas l'infini) et $p \leq n$, car dans E (donc dans F), $n + 1$ vecteurs sont toujours linéairement dépendants, d'après la proposition 7.3 et le fait que tout vecteur dans E dépend linéairement des n vecteurs d'une base de E.

Soient alors p vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ dans F, linéairement indépendants. Montrons qu'ils engendrent F (et on en conclura qu'ils forment une base de F, qui est donc de dimension finie p). Soit v un vecteur quelconque dans F. Alors $v_1, \ldots, v_p, v$ sont linéairement dépendants, par maximalité de p. Donc v est linéairement dépendant de $v_1, \ldots, v_p$, d'après la proposition 7.1. □

Corollaire 7.5. *Sous les mêmes hypothèses, si la dimension de F est égale à n, alors $F = E$.*

Démonstration. Appliquer le théorème 7.3. □

Exercice 7.11. *Un* hyperplan *de l'espace vectoriel E, de dimension n, est un sous-espace de dimension $n-1$. Montrer que E possède des hyperplans.*

Exercice 7.12. *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures dans $M_n(\mathbb{R})$? Indication : trouver une base, sous-ensemble de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 7.13. *Montrer que les monômes x^n, $n \in \mathbb{N}$, sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[x]$. En déduire que $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel de dimension infinie.*

7.4 Calcul d'une base d'un sous-espace engendré

I. Considérons d'abord le cas particulier d'un sous-espace F de de $\mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ qui engendrent F. Définissons la matrice M de taille $k \times n$ dont les k lignes sont ces vecteurs. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à cette matrice (voir la section 12.6). Alors les lignes non nulles de la matrice réduite-échelonnée obtenue forment une base du sous-espace F.

Il est en effet clair que les lignes de deux matrices obtenue l'une de l'autre par une opération élémentaire de lignes engendrent le même sous-espace. De plus, les lignes non nulles d'une matrice échelonnée-réduite sont linéairement indépendantes.

Essayons un petit exemple : soient $(1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et E le sous-espace qu'ils engendrent. La matrice M associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Par une opération de ligne $l_2 - l_1$, on la transforme en

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui, par une transformation $l_3 - l_2$ devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut encore par une opération $l_1 + l_2$ transformer cette matrice la matrice réduite-échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs $(1, 0, -1), (0, 1, -1)$ forment une base de F.

II. Considérons maintenant un espace vectoriel E avec base $e_1, \ldots, e_n$ et un sous-espace F engendré par des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$. On considère la matrice $M \in M_{kn}(\mathbb{R})$ dont la i-ème ligne est formée des coefficients de v_i dans la base donnée. Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient une matrice réduite-échelonnée, dont on supprime les lignes nulles ; les ℓ lignes restantes sont utilisées pour former des combinaisons linéaires de la base, et ces ℓ vecteurs forment une base de F. Les calculs sont donc les mêmes que en I.

Exercice 7.14. *Calculer une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(0, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 0), (-1, 0, 0, 1), (3, 2, 3, -2)$.*

Exercice 7.15. *Montrer que F, G, sous-espaces de E de dimension finie, sont supplémentaires, si et seulement s'il existe une base de F et une base G dont la réunion est une base de E. Montrer que c'est aussi vraie pour toutes les bases.*

Exercice 7.16. *Soit $E = \mathbb{R}[x]$, F le sous-espace engendré par les x^n avec n multiple de 3, et G le sous-espace engendré par les x^n, n pas multiple de 3. Montrer que F, G sont supplémentaires.*

Exercice 7.17. *Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que F est de dimension $n-2$. Quelle est la dimension de G ? Soit u, v une base de G, $f \in F$ et G' le sous-espace engendré par $u + f, v + f$. Quelle est la dimension de G' ? Montrer que F et G' sont supplémentaires.*

Exercice 7.18. *Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit a un réel. Soit F le sous-ensemble E constitué des suites qui satisfont $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = aa_n$. Montrer que F est un sous-espace de E. Montrer que toute suite (a_n) dans F satisfait $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a^{n+1}a_0$. Montrer que F est de dimension 1.*

Exercice 7.19. ** Avec E comme dans l'exercice précédent, et a, b des réels, on considère l'ensemble G des suites (a_n) dans E qui satisfont $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$. Montrer que G est un sous-espace de dimension de 2 de E. Montrer que pour un réel r, la suite $(1, r, r^2, r^3, \ldots)$ est dans G si et seulement si $r^2 = ar + b$.*

8 Applications linéaires

8.1 Exemples

Les exemples sont très nombreux.

Exemple 8.1. *La fonction* identité *d'un espace vectoriel dans lui-même, c'est-à-dire la fonction qui envoie tout vecteur sur lui même, est une application linéaire. Si E est l'espace en question, on la note* id_E*,ou simplement* id. *On a donc : $\forall x \in E$,* $\mathrm{id}(x) = x$.

Exemple 8.2. *Soient E, F deux espaces vectoriels. La fonction qui envoie tout vecteur sur le vecteur nul (de F), est une application linéaire. On la note simplement* 0. *On a donc $0(x) = 0$, $\forall x \in E$. On appelle cette fonction la* fonction nulle de E vers F.

Exemple 8.3. *La fonction de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui envoie (x, y, z) sur $(x, x + y, x + y + z)$ est une application linéaire.*

Exemple 8.4. *La dérivation, qui envoie toute fonction sur sa dérivée, est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables $I \to \mathbb{R}$ dans l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$).*

Exemple 8.5. *La fonction $X \mapsto AX$ est une application linéaire de $M_{pq}(\mathbb{R})$ dans $M_{nq}(\mathbb{R})$ (ici $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ est fixée).*

Exercice 8.1. *Soit E un espace vectoriel et $e \in E$. Montrer que la fonction qui à $a \in \mathbb{R}$ associe ae est une application linéaire $\mathbb{R} \to E$.*

Exercice 8.2. *Montrer que toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to E$ est de la forme ci-dessus (prendre $e = f(1)$).*

Exercice 8.3. *Montrer que la fonction $M_{np}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à la matrice M associe la somme de tous ses coefficients est une application linéaire.*

8.2 Propriétés

Proposition 8.1. *Soit f une application linéaire de E vers F. On a $f(0) = 0$ et $f(\sum_i a_i x_i) = \sum_i a_i f(x_i)$ quels que soient les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ dans E les scalaires $a_1, \ldots, a_n$.*

Autrement dit, f envoie le vecteur nul (de E) sur le vecteur nul (de F). La seconde propriété exprime que *f préserve les combinaisons linéaires.*

Un cas particulier de la deuxième propriété est que $f(x - y) = f(x) - f(y)$: on dit que *f préserve la soustraction.*

Preuve. On a $f(0_E) = f(0_\mathbb{R} 0_E) = 0_\mathbb{R} f(0_E) = 0_F$.

Pour les combinaisons linéaires, on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est vrai, car la combinaison linéaire de longueur nulle vaut 0 et on applique ce qu'on vient de voir. Passage de n à $n + 1$: on a $f(\sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i x_i) = f((\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i) + a_{n+1} x_{n+1}) = f(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i) + f(a_{n+1} x_{n+1})$ (par linéarité de f) $= \sum_{1 \leq i \leq n} a_i f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1})$ (par hypothèse de récurrence et par linéarité de f) $= \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i f(x_i)$. □

On va définir maintenant des opérations sur les applications linéaires : somme, et produit externe. Plus loin nous verrons aussi la composition.

Définition 8.1. *Si f, g sont des applications linéaires de E vers F, on appelle* somme *de f et g, notée $f + g$, la fonction $E \to F$ qui envoie tout vecteur x dans E sur $f(x) + g(x)$. Si a est un scalaire, on appelle* produit externe de a par f *la fonction $E \to F$ qui envoie tout vecteur x de E sur $af(x)$.*

On a donc les formules

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ (af)(x) = af(x).$$

Proposition 8.2. *Avec cette définition, $f + g$ et af sont des applications linéaires. L'ensemble, noté $\mathcal{L}(E, F)$, des applications linéaires de E vers F, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel. Le vecteur nul de cet espace est la fonction nulle de E vers F. L'opposée de f est la fonction $-f = (-1)f$.*

Preuve. Dans cette preuve, nous abandonnons les abus de notations, et nous allons différencier les notations de l'addition dans E, celle dans F et celle dans $\mathcal{L}(E,F)$. Elles seront notées respectivement $+_E$, $+_F$ et $+_{\mathcal{L}}$. On a donc par définition $\forall f,g \in \mathcal{L}(E,F), \forall x \in E$,

$$(f +_{\mathcal{L}} g)(x) = f(x) +_F g(x).$$

1. Il faut vérifier que $f +_{\mathcal{L}} g$ et af sont linéaires, dès que f, g sont linéaires et que a est un scalaire. Pour l'additivité, il faut montrer que $\forall x, y \in E$, $(f +_{\mathcal{L}} g)(x +_E y) = (f +_{\mathcal{L}} g)(x) +_F (f +_{\mathcal{L}} g)(y)$. Le côté gauche est égal, par définiition de $+_{\mathcal{L}}$, à $f(x +_E y) +_F g(x + y)$, ce qui est égal, par linéarité de f et g, à $f(x) +_F f(y) +_F g(x) +_F g(y)$. Le côté droit est égal à $f(x) +_F g(x) +_F f(y) +_F g(y)$. D'où l'égalité des deux côtés par la commutativité de $+_F$.

2. Puis vérifier les huit axiomes. C'est routinier, mais un peu long. Faisons-en quelques-uns. ... □

Rappelons la notion de *composition* de deux fonctions. Si f est une fonction de E vers F et si g est une fonction de F vers G, alors la *composée* de ces deux fonctions est la fonction $g \circ f$ définie par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Proposition 8.3. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Autrement dit, si f est une application linéaire de E vers F et si g est une application linéaire de F vers G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E vers G.

Preuve. Soient x, y dans E et a dans $\mathbb{R}$. On $g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$. De plus, $g \circ f(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = ag \circ g(x)$. □

Exemple 8.6. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0. Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables $I \to \mathbb{R}$. La fonction qui envoie toute fonction sur sa dérivée est une application linéaire de E dans l'espace F des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. La fonction de F dans $\mathbb{R}$ qui envoie f sur $f(0)$ est une application linéaire. La composée de ces deux fonctions est la fonction qui envoie tout $f \in E$ sur $f'(0)$: elle est linéaire par la proposition précédente.*

8.3 Applications linéaires et sous-espaces

Si f est une fonction de E dans F, et X est une partie de E, alors...

Proposition 8.4. *Une application linéaire envoie tout sous-espace sur un sous-espace, par image directe et inverse.*

Preuve. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On applique ci-dessous, systématiquement, plusieurs fois, et sans le dire, la proposition 6.2.

1. Soit V un sous-espace de E. Montrons que $f(V)$ est un sous-espace de F. On a $0 = f(0) \in f(V)$, car $0 \in V$. Si $u, v \in f(V)$, il existe $x, y \in V$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$; alors $u + v = f(x) + f(y) = f(x + y) \in f(V)$. Si $v \in f(V)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $x \in V$ tel que $v = f(x)$; alors $av = af(x) = f(ax) \in f(V)$.

2. Soit V un sous-espace de F. Montrons que $f^{-1}(V)$ est un sous-espace de F. On a $0 \in f^{-1}(V)$ car $f(0) = 0 \in V$. Soient $x, y \in f^{-1}(V)$, c'est-à-dire $f(x), f(y) \in V$; alors $f(x + y) = f(x) + f(y) \in V$, donc $x + y \in f^{-1}(V)$. Soit $x \in f^{-1}(V)$ et $a \in \mathbb{R}$; alors $f(x) \in V$, donc $f(ax) = af(x) \in V$, donc $x \in f^{-1}(V)$. □

Définition 8.2. *Le* noyau *d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs qu'elle envoie sur* 0*.*

Si f est une application linéaire de E vers F, on note $\mathrm{Ker}(f)$ son noyau. On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0)$.

Corollaire 8.1. *Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace de E.*

Preuve. Le noyau est en effet l'image réciproque du sous-espace nul. □

Définition 8.3. *L'*image *d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $f(E)$.*

Notation : $\Im(f)$. On a donc $\Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Corollaire 8.2. *Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\Im(f)$ est un sous-espace de F.*

Preuve. $\Im(f)$ est en effet l'image de E (sous-espace de lui-même) par f. □

Théorème 8.1. *(théorème du rang) Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. On a* $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\Im(f))$.

Ce théorème s'appelle théorème du rang car on appelle *rang* de f la dimension de $\Im(f)$. Notation $\mathrm{rg}(f)$.

Preuve. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace de E. Il est de dimension finie p. Il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E tel que $e_1, \ldots, e_p$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)$ est une base de $\Im(f)$. En effet, soit $y \in \Im(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que $x = a_1e_1 + \cdots a_ne_n$. On alors $f(x) = a_1f(e_1) + \cdots + a_nf(e_n) = a_{p+1}f(e_{p+1}) + \cdots + a_nf(e_n)$. On en déduit que les vecteurs $f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)$ engendrent $\Im(f)$.

Montrons pour finir que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Soient donc des scalaires $a_{p+1}, \ldots, a_n$ tels que $a_{p+1}f(e_{p+1}) + \cdots + a_nf(e_n) = 0$. Donc $f(a_{p+1}e_{p+1} + \cdots + a_ne_n) = 0$. Donc $a_{p+1}e_{p+1} + \cdots + a_ne_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Il existe donc des scalaires $a_1, \ldots, a_p$ tels que $a_{p+1}e_{p+1} + \cdots + a_ne_n = a_1e_1 + \cdots + a_pe_p$. Par suite $a_1e_1 + \cdots + a_pe_p - a_{p+1}e_{p+1} - \cdots - a_ne_n = 0$ et il s'ensuit que tous ces scalaires sont nuls.

En conclusion, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p$ et $\dim(\Im(f)) = n - p$ ce qui prouve le théorème. □

Exercice 8.4. *Montrer que si U, V sont des sous-espaces de F, et f une application linéaire de E vers F, alors $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Est-ce un sous-espace ?*

Exercice 8.5. *Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire, et X, Y des sous-espaces de E, alors $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. Donner un exemple d'application linéaire $f : E \to F$ et de sous-espaces X, Y de E tels que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.*

Exercice 8.6. *On considère l'application linéaire $(a, b, c, d, e) \mapsto (a, d)$. Déterminer son noyau et son image et leurs dimensions et vérifier le théorème du rang sur cet exemple.*

Exercice 8.7. *Mêmes questions pour l'application linéaire qui envoie (a, b, c) sur $(a + b, b + c)$.*

8.4 Calcul d'une base du noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$

On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, avec sa matrice M, comme il est expliqué dans la section 5.4. Notons $M = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ cette matrice. Considérons le système d'équations linéaires de la section 6.1.

Alors le noyau de f est égal à l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui sont les solutions de ce système d'équations linéaires. Nous pouvons donc, pour calculer le noyau de f, remplacer le système par un système équivalent. Pour ce faire, nous pouvons transformer la matrice du système, à savoir M, par des opérations de lignes, ce qui nous donnera des matrices dont les sytème associés sont tous équivalents. Nous appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan.

Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on met la matrice M sous forme réduite-échelonnée, et on obtient une matrice N. Celle-ci correspond à un système d'équations linéaires en les variables $x_1, \ldots, x_p$. Parmi celles-ci,il y a des variables libres, et des variables liées (voir la section 12.7). La matrice N permet d'exprimer chaque variable liée comme une combinaison linéaire des variables libres. On considère alors le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_p)$, et l'on y remplace les variables liées par leur combinaisons linéaires de variables libres, et finalement, on exprime le vecteur x comme une combinaison linéaire de vecteurs dont les coefficients sont les variables libres. Ces derniers vecteurs forment une base du noyau.

Regardons un exemple : supposons que $p = 6, n = 3$ et que N soit de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix}$$

Ici, a, b, c, d, e sont des scalaires. Les variables liées (qui correspondent aux colonnes-pivots) sont donc x_2, x_3, x_5 et les autres, x_1, x_4, x_6, sont libres. Les équations exprimant les variables liées comme combinaison linéaires des variables libres sont

$$\begin{aligned} x_2 &= -ax_4 - bx_6 \\ x_3 &= -cx_4 - dx_6 \\ x_5 &= -ex_6 \end{aligned}$$

On obtient

$$(x_1, \ldots, x_6) = (x_1, -ax_4 - bx_6, -cx_4 - dx_6, x_4, -ex_6, x_6)$$

$$= x_1(1,0,0,0,0,0) + x_4(0,-a,-c,1,0,0) + x_6(0,-b,-d,0,-e,1).$$

Une base du noyau est

$$(1,0,0,0,0,0), (0,-a,-c,1,0,0), (0,-b,-d,0,-e,1).$$

Pour prouver la véracité de cet algorithme, on constate que calculer le noyau d'une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, c'est la même chose que cal-

culer l'ensemble des solutions d'un système de n équations linéaires homogènes en p inconnues. On met cet ensemble sous forme paramétrée (les paramètres sont x_1, x_4, x_6 dans l'exemple), puis on exprime la solution générale comme une combinaison linéaire de vecteurs, dont les coefficients sont ces paramètres ; les vecteurs de la combinaison linéaire forment alors une base du noyau. Le fait que les vecteurs obtenus sont linéairement indépendants se montre facilement (voir l'exemple).

Exercice 8.8. *Déterminer une base des noyaux des applications linéaires $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ données par leur matrices :*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *; b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *; c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *; d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.5 Injections, surjections, isomorphismes

Rappelons les notions de fonctions injectives, surjectives, et bijectives ; voir la section 3.1.

Proposition 8.5. *Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est (le sous-espace) nul.*

Démonstration. Le noyau de f contient toujours 0. Supposons que f soit injective et soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$. Par injectivité, on doit avoir $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Suposons que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$. Donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $x - y = 0$ et par suite $x = y$. Donc f est injective. □

Définition 8.4. *a) Un* isomorphisme *est une application linéaire bijective.*

b) S'il existe un isomorphisme de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F, on dit que E est F sont isomorphes.

Proposition 8.6. *Si f est un isomorphisme, alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Il suffit de montrer que f^{-1} est une application linéaire. Soient y, y' dans F. Il existe alors x, x' dans E tels que $y = f(x), y' = f(x')$ (car f est surjectif). Par linéarité de f, on a $y + y' = f(x + x')$. Par l'équation (1), on a $x = f^{-1}(y), x' = f^{-1}(y'), x + x' = f^{-1}(y + y')$. Donc $f^{-1}(y + y') = f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$. Il s'ensuit que f^{-1} préserve la somme.

Pour le produit externe, c'est analogue. Donc f^{-1} est linéaire. □

Proposition 8.7. *Soient E, F des espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) toute base de E est envoyée par f sur une base de F ;

(iii) il existe une base de E qui est envoyée par f sur une base de F.

Nous notons $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F.

Lemme 8.1. *Soit $f \in L(E, F)$.*

1. Si f est injective, et si $e_1, \dots e_n$ dans E sont linéairement indépendants, alors $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants.

2. Si f est surjective et si $e_1, \dots e_n$ engendrent E, alors $f(e_1), \dots, f(e_n)$ engendrent F.

Démonstration. 1. Soient $e_1, \dots, e_n$ linéairement indépendants dans E. Montrons que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n) = 0$. Alors $f(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = 0$. Donc $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est injective, on a $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0$. Par suite, les a_i sont tous nuls, car les e_i sont linéairement indépendants. On conclut donc que les $f(e_i)$ sont linéairement indépendants.

2. Soient $e_1, \dots e_n$ qui engendrent E. Soit y dans F ; comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Il existe alors $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Alors $y = f(x) = f(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$ et par suite $f(e_1), \dots, f(e_n)$ engendrent F. □

Preuve de la proposition 8.7. (i) implique (ii) : on suppose que f est un isomorphisme. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E. Le lemme 8.1 implique que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ est une base de F.

(ii) implique (iii) est évident.

(iii) implique (i) : soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E telle que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ est une base de F. Montrons que f est un isomorphisme. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, On peut écrire $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, $a_i \in F$. Alors $0 = f(x) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$. Comme les $f(e_i)$ sont linéairement indépendants, les a_i sont tous nuls, donc x est nul. Donc f est injective.

Soit maintenant $y \in F$. On peut écrire $y = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$. Soit $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Alors $y = f(x)$. □

Proposition 8.8. *La composition de deux isomorphismes est un isomorphisme.*

Démonstration. Nous savons que le produit de deux applications linéaires est une application linéaire. Et aussi que le produit de deux bijections est une bijection. □

Exercice 8.9. *Quel est le noyau de l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ qui à (a, b) associe $(a, a + b, b, a - b)$? Est-elle injective ?*

Exercice 8.10. *Montrer que l'application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe P' (dérivé) est surjective, mais pas injective.*

Exercice 8.11. *Montrer que l'application linéaire $A \mapsto Tr(A)$, $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est surjective.*

Exercice 8.12. *Prouver les implications réciproques des deux implications du lemme 8.1.*

8.6 Applications linéaires et bases

Théorème 8.2. *Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base E et si $v_1, \ldots v_n$ sont des vecteurs dans V, il existe une unique application linéaire de E vers F qui envoie chaque e_i sur v_i.*

Démonstration. L'application linéaire est unique, car tout $e \in E$ est combinaison linéaire de $e_. \ldots, e_n$, et donc son image est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$ avec les mêmes coefficients. L'image de e est donc entièrement déterminée par les images de e_i, et l'apllication linéaire est unique.

Montrons maintenant son existence. Définissons $f : E \to V$ par : pour tout v dans E, il existe des coefficients $a_1, \ldots a_n$, uniquement déterminés par e, tels que $e = \sum_i a_i e_i$. Nous définissons $f(e) = \sum_i a_i v_i$, qui ne dépend que de e. Il faut alors vérifier que f préserve l'addition est le produit externe. □

Corollaire 8.3. *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.*

Démonstration. Si E, F sont isomorphes, il existe un isomorphisme $f : E \to F$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E. Alors $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une base de F, d'après la proposition 8.7. Donc $\dim(F) = n = \dim(E)$.

Réciproquement, supposons que E, F aient la même dimension. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et $v_1, \ldots, v_n$ une base de F. Il existe d'après le théorème 8.2, une application linéaire qui envoie chaque e_i sur v_i. D'après la proposition 8.7, c'est un isomorphisme. □

Rappelons que $\mathcal{L}(E,V)$ est un espace vectoriel (proposition 8.2)

Corollaire 8.4. *La dimension de $L(E,V)$ est $dim(E) \cdot dim(V)$.*

Démonstration. Soient $e_1, \ldots, e_p$ une base de E et $v_1, \ldots, v_n$ une base de V. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ et chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, définissons $f_{ij} \in \mathcal{L}(E,V)$ par $f_{ij}(e_k) = 0$ si $k \neq j$ et $f_{ij}(e_j) = v_i$. Cette application linéaire existe par le corollaire 8.2.

On vérifie que ces pn applications linéaires sont linéairement indépendantes et qu'elles engendrent $\mathcal{L}(E,V)$. Pour cette dernière asertion, on montre que $f \in \mathcal{L}(E,V)$ implique $f = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}$ où les coefficients a_{ij} sont déterminés par l'égalité $f(e_j) = \sum_i a_{ij} v_i$. □

Exercice 8.13. *Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec sa base canonique $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ et $F = \mathbb{R}^3$. Soit f l'application linéaire de E dans F qui envoie e_1 sur $(1,0,1)$ et e_2 sur $(2,-1,1)$. Avec les notations de la preuve de la proposition* **??**, *calculer $\psi(f)$.*

Exercice 8.14. *Avec les notations de l'exercice 8.13, on suppose que $g \in L(E,F)$ et que $\psi(g) = ((1,2,3),(0,1,0)) \in F^2$. Calculer $g(e_1), g(e_2)$, puis $g((1,1))$.*

Exercice 8.15. *A quelle condition sur n les espaces vectoriels $\mathbb{R}^4$ et $M_{nn}(\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes ? Même question pour $\mathbb{R}^k$ et $M_{np}(\mathbb{R})$. Même question pour $L(E,F)$ et $M_{np}(\mathbb{R})$, avec l'hypothèse que $n' = dim(E)$ et $p' = dim(F)$.*

Exercice 8.16. *Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ avec les notations de l'exercice 8.13 ?*

8.7 Matrice d'une application linéaire

Proposition 8.9. *Soient E, V des espaces vectoriels de dimension p, n, et $e_1, \ldots, e_p$, $v_1, \ldots, v_n$ des bases de ces espaces, respectivement. Il y a isomorphisme entre l'espace des applications linéaires $L(E,V)$ et l'espace des matrices $M_{np}(\mathbb{R})$. Cet isomorphisme associe à toute application linéaire la matrice $[a_{ij}]$ définie par $f(e_j) = \sum_i a_{ij} v_i$.*

Remarquez que la matrice est bien définie, car $f(e_j)$ est de manière unique combinaions linéaire des v_i. Aussi que la taille de la matrice est $n \times p$ car les lignes correspondent aux éléments de la base v_j et les colonnes à ceux de la base e_i.

Démonstration. Il faut vérifier que la fonction $f \mapsto [a_{ij}]$ ainsi définie est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,V)$ dans l'espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{R})$, et qu'elle est bijective. Pour cette dernière assertion, on remarque que la fonction $f_{i,j}$ qui apparaît dans la preuve du corollaire 8.4 est envoyée sur la matrice élémentaire E_{ij} qui a des 0 partout , sauf en position i,j où il y a un 1. Donc notre fonction est un isomorphisme, car elle envoie une base sur une base, voir Proposition 8.7. □

Définition 8.5. *On appelle* matrice de l'application linéaire $f \in L(E,V)$, dans les bases (e_j) et (v_i) de E et V respectivement, *la matrice définie dans la proposition ci-dessus. On la note* $M(v,f,e)$

Définition 8.6. *La* matrice d'un vecteur v dans la base (v_i) *de V est le vecteur colonne des coefficients de v dans la base v_i. C'est-à-dire le vecteur* ${}^t(a_1,\dots,a_n)$ *où les coefficients a_i sont définis par $v = \sum_i a_i v_i$.*

Corollaire 8.5. *Si X (resp. Y) est la matrice colonne représentant un vecteur x de E (resp. y de F) dans une base de E (resp. de F), et M la matrice de $\alpha \in L(E,F)$ dans ces bases, et si $y = \alpha(x)$, alors $Y = MX$.*

Démonstration. On note f_j et e_i ces bases de F et E. On a, avec $M = [m_{ij}]$, $\alpha(e_j) = \sum_i m_{ij} f_i$. De plus, avec $X = {}^t(x_j)$ et $Y = {}^t(y_i)$, on a $\sum_i y_i f_i = y = \alpha(x) = \alpha(\sum_j x_j e_j) = \sum_j x_j \alpha(e_j) = \sum_j x_j \sum_i m_{ij} f_i = \sum_i (\sum_j m_{ij} x_j) f_i$; donc $y_i = \sum_j m_{ij} x_j$, d'où $Y = MX$. □

Proposition 8.10. *Soit $\alpha \in L(E,F)$, $\beta \in L(F,G)$, et (e_k), (f_j), (g_i) des bases de E,F,G respectivement. Soient A la matrice de α dans les bases (e_k), (f_j), et B la matrice de β dans les bases (f_j), (g_i). Alors la matrice de $\beta \circ \alpha$ dans les bases (e_i), (g_k) est BA.*

On peut même dire que le produit des matrices a été défini pour que ce résultat soit vrai. Dans nos notations, cela s'écrit

$$M(g, \beta \circ \alpha, e) = M(g,\beta,f) M(f,\alpha,e).$$

Démonstration. Soient $A = [a_{jk}], B = [b_{ij}], C = [c_{ik}]$ les matrices de $\alpha, \beta, \beta \circ \alpha$ respectivement. On a $\alpha(e_k) = \sum_j a_{jk} f_j$ et $\beta(f_j) = \sum_i b_{ij} g_i$. Donc $\sum_i c_{ik} g_i = \beta \circ \alpha(e_k) = \beta(\sum_j a_{jk} f_j) = \sum_j a_{jk} \beta(f_j) = \sum_j a_{jk} \sum_i b_{ij} g_i = \sum_i (\sum_j b_{ij} a_{jk}) g_i$. Ceci prouve que $c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}$, donc que $C = BA$. □

8.8 Changement de base : matrice de passage

Définition 8.7. *Soient deux bases $(e_i), (e'_i)$ d'un espace vectoriel E. La* matrice de passage de la base de (e_i) vers la base (e'_i) *est la matrice, notée $P_{ee'} = [p_{ij}]$, définie par $e'_j = \sum_i p_{ij} e_i$.*

Proposition 8.11. *Soient (e_i), (e'_i) deux bases de E.*

1. Si C, C' sont les matrices d'un vecteur x de E dans les bases (e_i) et (e'_i) respectivement, alors $C = P_{ee'}C'$.

2. L'inverse de $P_{ee'}$ est $P_{e'e}$.

3. Soient v, v' deux bases de F. Soit $f \in L(E, F)$ et A, A' ses matrices dans les bases e, v d'une part, et e', v' d'autre part. Alors $A' = P_{v'v} A P_{ee'}$.

Démonstration. En comparant les définitions 8.7 et 8.5, on observe que $P_{ee'}$ est égal à la matrice de l'identité de E dans les bases (e'_i), (e_i) (dans cet ordre !). L'assertion 2. découle donc de cette observation et du corollaire 8.7.

Pour 1. on applique cette observation et le corollaire 8.5.

Pour 3. la même observation et la proposition 8.10 s'appliquent : la matrice $P_{v'v} A P_{ee'}$ est la matrice (dans les bases appropriées) de l'application linéaire composée de trois applications linéaires : $\mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$. □

8.9 Matrice d'un endomorphisme

Définition 8.8. *La* matrice $[a_{ij}]$ d'un endomorphisme *de V dans la base $v_1, \ldots, v_n$ de V est définie par $f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$, $j = 1, \ldots, n$.*

C'est donc un cas particulier de la définition ci-dessus, avec $E = F = V$, avec la même base au départ et à l'arrivée. Avec nos notation, la matrice est $M(v, f, v)$. De même, le corollaire suivant est un cas particulier de la proposition 8.10.

Corollaire 8.6. *Si A, B sont les matrices des endomorphismes f et g respectivement dans une base de V, alors la matrice de $g \circ f$ dans cette base est BA.*

Un *automorphisme* est un endomorphisme inversible, c'est-à dire bijectif. Son inverse est alors aussi un automorphisme (Proposition 8.6).

Corollaire 8.7. *La matrice de l'inverse d'un automorphisme est l'inverse de sa matrice.*

Démonstration. On applique la proposition 8.10 au cas où $E = F = G$ et où les trois bases (e_k), f_j et (g_i) coïncident : d'abord au produit $\alpha \circ \alpha^{-1}$, puis au produit $\alpha^{-1} \circ \alpha$. □

Deux matrices A, B carrées de même ordre sont *conjuguées* s'il existe une matrice P inversible de même ordre telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Proposition 8.12. *Les deux matrices d'un endomorphisme donné dans deux bases de V sont conjuguées.*

Démonstration. On applique la proposition 8.11 avec $E = F = V$, $e = v$, $e' = v'$. La matrice de l'endomorphisme dans la base e est A et dans la base e', c'est A'. On obtient $A' = P_{e'e}AP_{ee'}$ et on obtient le corollaire car $P_{e'e} = P_{ee'}^{-1}$. □

Démonstration du corollaire 7.4. Si $v_1, \ldots, v_p$ est une base, alors l'endomorphisme, dont la matrice dans la base e_i est $[a_{ij}]$, est un isomorphisme, par la proposition 8.7. Sa matrice est donc inversible.

Réciproquement, si la matrice est inversible, alors cette matrice , et son inverse, définissent des endomorphismes de E (proposition 8.9), qui sont inverse l'un de l'autre (corollaire 8.7). L'endomorphisme envoie $e_1, \ldots, e_p$ sur $v_1, \ldots, v_p$, qui est donc une base (proposition 8.7). □

Exercice 8.17. *On considère l'application linéaire f de l'exercice 8.13. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques ? Prenez quelques vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et vérifiez le corollaire 8.5.*

Exercice 8.18. *On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de ces espaces est*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Que valent n et p ? Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$ (e_1, e_2 est la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Calculer $f(-1, 1)$ de deux manières : directement en écrivant $(-1, 1)$ dans la base e_1, e_2 et en appliquant la linéarité ; puis en appliquant le corollaire 8.5.

Exercice 8.19. *On suppose que l'application linéaire $f : E \to F$ a la matrice $M \in M_{np}(\mathbb{R})$ dans les bases $e_1, \ldots, e_p$ de E et $v_1, \ldots, v_n$ de F. Montrer que le noyau de f contient le vecteur $e_1 + \cdots + e_p$ si et seulement si pour chaque ligne de M, la somme des ses coefficients est nulle (utiliser le corollaire 8.5).*

Exercice 8.20. *Avec les notations du Corollaire 8.5. Montrer que résoudre les sytème d'équations linéaires $Y = MX$ revient à déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes, dans la base donnée de E, des vecteurs x de E tels que $\alpha(x) = y$. A quelle condition sur α ce système a-t-il une solution unique, pour tout Y ?*

Exercice 8.21. *Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V de dimension finie. Soit M la matrice de f dans une certaine base de V. Montrer que f est bijectif si et seulement si M est une matrice inversible.*

8.10 Calcul d'une base du noyau d'une application linéaire

La méthode est essentiellement la même que en section 8.4. On part de $f \in \mathcal{L}(E, V)$ avec sa matrice M dans les bases $e_1, \ldots, e_p$ de E et $v_1, \ldots, v_n$ de V.

En suivant la méthode de la section 8.4, on trouve une base du noyau de f, dont chaque vecteur est exprimée comme une combinaison linéaire dans la base $e_1, \ldots, e_p$.

Par exemple, se référant à la section indiquée, le vecteur $(0, -a, -c, 1, 0, 0)$ signifiera $-av_2 - cv_3 + v_4$.

9 Diagonalisation

9.1 Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 9.1. *Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une* valeur propre *de f s'il existe un vecteur v non nul dans V tel que $f(v) = \lambda v$. Un tel vecteur est alors appelé* vecteur propre*, et on dit qu'il est* attaché à la valeur propre λ.

Remarquez qu'un vecteur propre est, par définition, toujours non nul.

Proposition 9.1. *Si le vecteur v non nul est dans le noyau de f, alors v est un vecteur propre, attaché à la valeur propre 0. De plus, f est non injective si et seulement si 0 est valeur propre de f.*

Démonstration. On se ramène à la définition de valeur et vecteur propres. □

Attention : (le scalaire) 0 peut être valeur propre, et dans ce cas, f n'est pas injective, mais (le vecteur nul) 0 n'est jamais vecteur propre. Si 0 est valeur propre, un vecteur propre attaché n'est jamais nul. C'est une

confusion commune. Par exemple, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$: $f(a,b) = (a, 2a)$ n'est pas injectif, puisque $(0,1)$ est dans le noyau, et ce vecteur est un vecteur propre attaché à la valeur propre 0 : $f(0,1) = 0(0,1)$ $(= (0,0))$.

Proposition 9.2. *Un endomorphisme de V a la valeur propre λ si et seulement si $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme de V.*

Démonstration. Si λ est une valeur propre de f, alors il existe v non nul tel que $f(v) = \lambda v$. Donc $(f - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0$. Donc $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme de V, car non injectif (proposition 8.5).

Réciproquement, si $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme de V, alors $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif (Corollaire **??**). Donc $Ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq 0$. Il existe donc $v \neq 0$ dans V tel que $(f - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0$. C'est-à-dire : $f(v) = \lambda v$. Donc λ est une valeur propre de f. □

Le *déterminant* d'un endomorphisme de V est par définition le déterminant de sa matrice dans une base de V. Ceci est bien défini, car si on change de base, alors on conjugue la matrice (proposition 8.12), et par suite le déterminant reste le même.

Il découle de la proposition 8.7 et du théorème 13.2 qu'un endomorphisme est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul. On obtient donc le

Corollaire 9.1. *Un endomorphisme a la valeur propre λ si et seulement le déterminant de $f - \lambda\,\mathrm{id}$ est nul.*

En appliquant ceci à la valeur propre$\lambda = 0$, et en remarquant que f est injective si et seulement si f n'a pas la valeur propre 0, on obtient le

Corollaire 9.2. *Un endomorphisme est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Exercice 9.1. *Montrer que si un automorphisme f a la valeur propre λ, alors f^{-1} a la valeur propre λ^{-1}.*

Exercice 9.2. *(requiert un peu d'analyse) Soit F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, qui sont indéfiniment dérivables. Soit D l'endomorphisme de F qui envoie tout $f \in F$ sur sa dérivée. Montrer que la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est un vecteur propre de D attaché à la valeur propre λ.*

Exercice 9.3. *Soit M la matrice d'un endomorphisme de V dans la base $v_1, \ldots, v_n$ de V. Montrer que $v_1 + \cdots + v_n$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1 de f si et seulement si la somme de chaque ligne de M est égale à 1.*

Exercice 9.4. *Si $f(x, y) = (y, x)$, f endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, montrer que f a les valeurs propres 1 et -1 et calculer des vecteurs propres correspondants.*

Exercice 9.5. *Si $f(x, y, z) = (y, z, x)$, f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, montrer que f a la valeur propre 1 et calculer un vecteur propre correspondant. Y a-t-il une autre valeur propre ?*

Exercice 9.6. *Soit f un endomorphisme de V et a un scalaire. Montrer que l'ensemble des vecteurs v tels que $f(v) = av$ est un sous-espace de V. Cet sous-espace coïncide-t-il avec l'ensembles des vecteurs propres attachés à la valeur propre a ?*

Exercice 9.7. *Soient f, g des endomorphismes de V, v un vecteur propre de f et g, pour les valeurs propres a et b respectivement. Montrer que v est aussi un vecteur propre de $f + g$ et $g \circ f$. Pour quelles valeurs propres ? Généraliser à $xf + yg$, où x, y sont des scalaires.*

9.2 Polynôme caractéristique

On va parler dans cette partie de matrices carrées dont les coefficients sont des polynômes en la variable x, et de leur déterminants. Cela est un tantinet plus avancé que les déterminants des matrices carrées à coefficients réels, comme vus en section 13.

Pour calculer ces déterminants, on procède par la formule de Laplace, et aussi par les formules usuelles pour les matrices carrées d'ordre 2 ou 3. La principale propriété dont nous aurons besoin est la formule du produit.

Exemple 9.1. *Soit la matrice* $M = \begin{bmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{bmatrix}$. *Son déterminant est* $(x-1)(x-4) - (-2)(-3) = x^2 - x - 4x + 4 - 6 = x^2 - 5x - 2$.

Définition 9.2. *Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n. Son* polynôme caractéristique *est le déterminant de la matrice $xI_n - A$.*

Notons que xI_n désigne la matrice dont tous les coefficients diagonaux valent x, et les autres sont nuls. On remarque aussi que le degré du polynôme caractéristique est n, et que le coefficient de x^n est 1.

Exemple 9.2. *Le polynôme caractéristique de la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *est* $x^2 - 5x - 2$*, conformément à l'exemple précédent.*

Proposition 9.3. *Si deux matrices carrées* A, B *sont conjuguées, elles ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. On a $B = P^{-1}AP$. Alors $xI - B = P^{-1}(xI - A)P$. On prend les déterminants, on utilise la formule du produit, en remarquant que $det(P^{-1}) = det(P)^{-1}$, et on en déduit le résultat. □

Corollaire 9.3. *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie,* f *une endomorphisme de* V *et* A, B *ses matrices dans deux bases de* V*. Alors ces deux matrices ont même polynôme caractéristique.*

Démonstration. Appliquer la proposition 8.12. □

Le corollaire implique la cohérence de la définition qui suit.

Définition 9.3. *Le* polynôme caractéristique d'un endomorphisme *de* V *est le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base de* V*.*

Théorème 9.1. *Soit* f *un endomorphisme de* V *de dimension finie. Alors* λ *est une valeur propre de* f *si et seulement si* λ *est une racine de son polynôme caractéristique.*

Cela découle du corollaire 9.1.

Exercice 9.8. *Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes des exercices 9.4 et 9.5. Vérifiez le théorème 9.1 sur ces exemples.*

Exercice 9.9. *Calculer les valeurs propres de l'endomorphisme dont le polynôme caractéristique est* $x^2 - 5x + 6$*. Trouver une matrice qui a ce polynôme caractéristique. Calculer des vecteurs propres de l'endomorphisme associé pour chacune des valeurs propres.*

Exercice 9.10. *Calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme dont la matrice est triangulaire supérieure. Montrer que les valeurs propres sont les éléments diagonaux de la matrice.*

Exercice 9.11. *Pour des polynômes de degré 2 et 3, déterminer la somme et le produit de leurs racines. Pour des matrices 2 par 2, puis 3 par 3, déterminer la somme et le produit des racines de leur polynôme caractéristique. Généraliser pour des matrices* n *par* n*.*

Exercice 9.12. *Quel est le polynôme caractéristique de la matrice* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *?*

9.3 Endomorphismes diagonalisables

Définition 9.4. *Un endomorphisme de V est dit* diagonalisable *s'il existe une base de V formé de vecteurs propres de f.*

On a donc la

Proposition 9.4. *Un endomorphisme f de V, espace vectoriel de dimension finie, est diagonalisable, si et seulement si V a une base où la matrice de f est diagonale. Dans ce cas, les éléments diagonaux sont les valeurs propres de f.*

Démonstration. Il suffit de prouver la dernière assertion, car la première découle de la définition. La matrice de f dans une base de vecteurs propres est diagonale. Son polynôme caractéristique est donc le produit des $x - \lambda$ où les λ sont les éléments diagonaux. Donc ceux-ci sont les valeurs propres, d'après la théorème 9.1. □

Les endomorphismes sont loin d'être tous diagonalisables. Par exemple l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui envoie (x, y) sur $(y, 0)$. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Son unique valeur propre est 0. Si f était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nulle. Donc $f = 0$, ce qui n'est pas.

Théorème 9.2. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Si le polynôme caractéristique de f a n racines distinctes, alors f est diagonalisable.*

Cette condition suffisante, mais elle n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple de la fonction identité d'un espace de dimension au moins 2. De même la fonction nulle.

Démonstration. Supposons que f a n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, qui sont distinctes. Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs attachés respectivement à ces valeurs propres. Montrons que ces vecteurs forment une base de E. Il suffit, en vertu du théorème 7.3, de montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Ecrivons, par l'absurde, qu'une combinaison linéaire non triviale des e_i est nulle. En se restreignant aux e_i dont le coefficient est non nul, on peut écrire $a_1 e_{i_1} + \cdots a_k e_{i_k} = 0$, avec des coefficients non nuls $a_1, \ldots, a_k$ et des indices i_j dans $\{1, \ldots, n\}$ et de plus $i_1 < \ldots < i_k$. On peut supposer que k est le plus petit possible. On ne peut avoir $k = 1$, car les vecteurs propres sont non nuls. On a donc $k \geq 2$. Appliquons f à la relation précédente. Ça donne $a_1\lambda_{i_1} e_{i_1} + a_2\lambda_{i_2} e_{i_2} + \cdots a_k\lambda_{i_k} e_{i_k} = 0$. Si λ_{i_1} est nul, on obtient une relation plus courte (car les autres λ_j sont alors non nuls), ce qui contredit la minimalité de k. Si λ_{i_1} est non nul, divisons par λ_{i_1} : ça donne $a_1 e_{i_1} + a_2\frac{\lambda_{i_2}}{\lambda_{i_1}} e_{i_2} + \cdots + a_k\frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1}} e_{i_k} = 0$. Soustrayons la relation ci-dessus : nous obtenons $a_2(\frac{\lambda_{i_2}}{\lambda_{i_1}} - 1)e_{i_2} + \cdots + a_k(\frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1}} - 1)e_{i_k} = 0$. C'est une relation plus courte (car les λ_j sont distincts, donc les nouveaux coefficients sont non nuls), ce qui contredit la minimalité de k aussi. □

9.4 Diagonalisation des matrices

Définition 9.5. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel des colonnes $V = M_{n1}$ dont A est la matrice. Autrement dit, si $v \in V$, alors $f(v) = Av$. Les* valeurs propres *(resp.* vecteurs propres*) de A sont les valeurs propres (resp. vecteurs propres) de f. La matrice A est dite* diagonalisable *si f est diagonalisable*

Un vecteur propre de la matrice A est donc un vecteur colonne v non nul telque $Av = \lambda v$, et λ est la valeur propre attachée à v.

Proposition 9.5. *1. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.*

2. Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est conjuguée à une matrice diagonale.

Ceci découle des sections précédentes.

Exercice 9.13. *Montrer qu'une matrice* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *telle que* $(a-d)^2+4bc > 0$ *est diagonalisable.*

Exercice 9.14. *On suppose que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n est égal à $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. Montrer que cette matrice est diagonalisable.*

9.5 Calcul d'une base d'un sous-espace propre et diagonalisation effective

9.6 Applications de la diagonalisation

9.6.1 Puissance d'une matrice

9.6.2 Une équation différentielle matricielle

On peut ramener les *équations différentielles linéaire à coefficients constants*, d'ordre plus grand que 1, à des équations différentielles matricielles d'ordre 1. Nous l'illustrons par un exercice.

Exercice 9.15. *1. L'équation du mouvement d'une masse m de position x attachée à un ressort est donnée par*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

où k est la constante de Hooke *du ressort et γ est la* constante donnant la force de friction.

(a) Supposons que $\frac{k}{m} = 16$ et $\frac{\gamma}{m} = 10$ et posons

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice $\mathbf{A}$ de sorte que l'équation (2) prenne la forme

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \mathbf{A}\vec{u}(t). \tag{3}$$

(b) Trouver les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$.

(c) Pour chacune des valeurs propres, déterminer l'espace propre correspondant.

(d) La solution générale de l'équation différentielle (3) est de la forme

$$\vec{u}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + A_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2,$$

où $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dénote une base de vecteurs propres (de valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement) et $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Après avoir choisi une telle base de vecteurs propres $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, déterminer les constantes A_1 et A_2 pour qu'au temps $t = 0$, on ait $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{dt}(0) = 6$.

(e) Écrire la solution correspondante pour $x(t)$.

10 Espaces euclidiens

10.1 Produits scalaires et bases othonormales

Définition 10.1. *Soit E une espace vectoriel. Un* produit scalaire *sur E est une fonction de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$, qu'on note $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, avec les propriétés suivantes :*

- *si on fixe $x \in E$, la fonction $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;*
- *si on fixe $y \in E$, la fonction $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;*
- *$\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;*
- *$\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$;*
- *$\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Un espace euclidien *est un espace vectoriel de dimension finie avec un produit scalaire.*

Exemple 10.1. *Avec $E = \mathbb{R}^n$, on définit pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. C'est un produit scalaire sur E, appelé* produit scalaire canonique *de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 10.1. *Avec $E = M_{np}(\mathbb{R})$, montrer que la fonction $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire.*

Exercice 10.2. *Avec $E =$ l'espace vectoriel des fonctions continues $[0, 1] \to \mathbb{R}$, montrer que la fonction $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire.*

Exercice 10.3. *Dans un espace euclidien calculer $\langle u + v, u - v \rangle$ et $\langle u + v, u + v \rangle$ en fonction de $\langle u, u \rangle, \langle u, v \rangle, \langle v, v \rangle$.*

10.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Deux vecteurs d'un espace euclidien sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Définition 10.2. *1. Une* base othogonale *d'un espace euclidien est une base $e_1, \ldots, e_n$ telle que $\forall i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ (autrement dit e_i, e_j sont orthogonaux).*

2. Une base orthonormale *d'un espace euclidien est une base othogonale $e_1, \ldots, e_n$ telle que $\forall i$, on a $\langle e_i, e_i \rangle = 1$.*

Si on note $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $= 0$ si $i \neq j$, une base othonormale satisfait $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Théorème 10.1. *Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E espace euclidien. Il existe une unique base orthonormale $v_1, \ldots, v_n$ de E telle que : $\forall j = 1, \ldots, n$, $Vect(e_1, \ldots, e_j) = Vect(v_1, \ldots, v_j)$ et que $\langle e_j, v_j \rangle > 0$.*

La notation $Vect(e_1, \ldots, e_j)$ désigne le sous-espace de E engendré par $e_1, \ldots, e_j$.

Lemme 10.1. *Si $Vect(u_1, \ldots, u_{j-1}) = Vect(e_1, \ldots, e_{j-1})$ et si $u_j = e_j + a_1 e_1 + \ldots + a_{j-1} e_{j-1}$, alors $Vect(u_1, \ldots, u_j) = Vect(e_1, \ldots, e_j)$.*

Démonstration du théorème 10.1. 1. Construisons d'abord une base orthogonale $u_1, \ldots, u_n$ qui satisfait les deux conditions de l'énoncé (avec u au lieu de v).

Posons $u_1 = e_1$. On a bien $Vect(u_1) = Vect(e_1)$ et $\langle e_1, u_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle > 0$.

Supposons que $j \geq 2$ et qu'on ait construit $u_1, \ldots, u_{j-1}$, non nuls et deux à deux orthogonaux, tels que $Vect(u_1, \ldots, u_k) = Vect(e_1, \ldots, e_k)$ et que $\langle e_k, v_k \rangle > 0$ pour $k = 1, \ldots, j-1$.

Prenons a_k tel que $0 = \langle e_j, u_k \rangle + a_k \langle u_k, u_k \rangle$ pour $k = 0, \ldots, j-1$; c'est possible car $\langle u_k, u_k \rangle \neq 0$. Posons $u_j = e_j + a_1 u_1 + \ldots + a_{j-1} u_{j-1}$. On a alors $\langle u_j, u_k \rangle = \langle e_j + a_1 u_1 + \ldots + a_{j-1} u_{j-1}, u_k \rangle = \langle e_j, u_k \rangle + a_1 \langle u_1, u_k \rangle + \ldots + a_{j-1} \langle u_{j-1}, u_k \rangle = \langle e_j, u_k \rangle + a_k \langle u_k, u_k \rangle = 0$. Donc u_j est orthogonal à $u_1, \ldots, u_{j-1}$. Il est non nul, car sinon e_j est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{j-1}$, donc de $e_1, \ldots, e_{j-1}$, ce qui est impossible. Le lemme implique que $Vect(u_1, \ldots, u_j) = Vect(e_1, \ldots, e_j)$. De plus, u_j étant par construction orthogonal à $u_1, \ldots, u_{j-1}$, on a $\langle e_j, u_j \rangle = \langle u_j - a_1 u_1 - \ldots - a_{j-1} u_{j-1}, u_j \rangle = \langle u_j, u_j \rangle - a_1 \langle u_1, u_j \rangle - \ldots - a_{j-1} \langle u_{j-1}, u_j \rangle = \langle u_j, u_j \rangle > 0$.

Pour $j = n$, la construction de $u_1, \ldots, u_n$ est achevée.

2. On pose maintenant $v_j = u_j / \sqrt{\langle u_j, u_j \rangle}$, $j = 1, \ldots, n$. Alors $\langle v_j, v_j \rangle = 1$ et $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$. Les propriétés de l'énoncé se déduisent des celles pour les u_i.

3. L'unicité se prouve d'une manière similaire. Montrons d'abord l'unicité des vecteurs u_i, sous les conditions suivantes : ils sont non nuls, deux à deux orthogonaux, ils satisfont aux deux propriétés de l'énoncé (avec u au lieu de v), et chaque u_j est la somme de e_j et d'une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{j-1}$. On prouve l'unicité par récurrence. Pour $j = 1$, on doit avoir $u_1 = e_1$. On suppose l'unicité prouvée pour $u_1, \ldots, u_{j-1}$, $j \geq 2$. Alors les conditions impliquent que $u_j = e_j + a_1 u_1 + \ldots + a_{j-1} u_{j-1}$. Ensuite, on doit avoir $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ et le même calculque dans 1. implique que $0 = \langle e_j, u_k \rangle + a_k \langle u_k, u_k \rangle$ pour $k = 0, \ldots, j-1$. Comme $\langle u_k, u_k \rangle$ non nul, on obtient l'unicité de u_j.

4. Prouvons maintenant l'unicité des v_i, satisfaisant les propriétés de l'énoncé. On doit avoir $v_j = b_j e_j + b_{j-1} u_{j-1} + \cdots + b_1 u_1$, avec b_j non nul. Alors les $u_j = v_j / b_j$ satisfait aux conditions de 3., et sont donc uniques. De plus, comme $\langle v_j, v_j \rangle = 1$, on aura $(1/b_j^2) \langle u_j, u_j \rangle = 1$, donc $b_j^2 = \langle u_j, u_j \rangle$ et b_j

est unique au signe près. Mais on a aussi $v_j = b_j e_j + c_{j-1}e_{j-1} + \cdots + c_1 e_1$, donc $0 < \langle v_j, e_j \rangle = b_j$ et b_j est positif. □

Corollaire 10.1. *Un espace euclidien possède une base orthonormale.*

Théorème 10.2. *Dans un espace euclidien de dimension n, n vecteurs non nuls forment une base s'ils sont deux à deux orthogonaux.*

Attention : la condition "non nuls" ne doit pas être oubliée. Pour la preuve voir l'exercice 10.8.

Exercice 10.4. *Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire canonique. Soit $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, 0)$. Appliquer l'algorithme de la preuve du théorème 10.1 à ces deux vecteurs et calculer la base orthonormale v_1, v_2.*

Exercice 10.5. *Soit E un espace euclidien et $v \in E$. Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v est un sous-espace de E.*

Exercice 10.6. *A quelle condition un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, avec son produit scalaire canonique, est-il orthogonal à $(1, 1, \ldots, 1)$?*

Exercice 10.7. *Soit E un espace euclidien. Si $H \subset E$, on note $H^\perp$ l'ensemble $\{v \in E \mid \forall h \in H, \langle h, v \rangle = 0\}$. Montrer que $H^\perp$ est un sous-espace de E. Montrer que $H \cap H^\perp = 0$.*

Exercice 10.8. *Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux d'un espace euclidien (on a donc $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, où le* symbole de Kronecker *δ_{ij} signifie 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$). Montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants (calculer $\langle e_j, \sum_i a_i e_i \rangle$). En déduire que la dimension de l'espace est au moins n. En déduire que la dimension de l'espace est égale au nombre maximum de vecteurs deux à deux orthogonaux.*

10.3 Diagonalisation des matrices symétriques

Remarquons d'abord que la décomposition de n'importe quel vecteur v dans une base orthonormal $e_1, \ldots, e_n$ est donnée par

$$v = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Ça se prouve en faisant le produit scalaire de $v = \sum_i a_i e_i$ et de e_j : on obtient $\langle v, e_j \rangle = a_j$.

Théorème 10.3. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. Dans toute base othonormale de E, la matrice de u^* est la transposée de celle de u*

Démonstration. 0. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de E. Si u^* existe, on doit avoir $\langle u^*(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$. On doit avoir $u^*(e_j) = \sum_i \langle e_j, u(e_i)\rangle e_i$.

1. Définissons donc u^* par : (*) $u^*(e_j) = \sum_i \langle u(e_i), e_j\rangle e_i$. La matrice de u^* dans cette base est $[\langle u(e_i), e_j\rangle]_{ij}$. Celle de u est $[m_{ij}]$ avec $u(e_j) = \sum_i m_{ij} e_i$. Par orthonormalité, on a $\langle u(e_j), e_i\rangle = m_{ij}$. Donc les matrices de u et u^* sont transposées l'une de l'autre.

2. Considérons les deux fonctions $E \times E \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle u(x), y\rangle$ et $(x, y) \mapsto \langle x, u^*(y)\rangle$. Pour $x = e_i$ et $y = e_j$, on a $\langle u(e_i), e_j\rangle = \langle u^*(e_j), e_i\rangle$, en utilisant (*). Ceci implique que les deux fonction considérées coïncident sur la base. Il s'ensuit qu'elles sont égales (voir exercice 10.9). D'où l'existence et l'unicité de u^* et l'assertion sur les matrices.

Comme l'égalité dans le théorème est indépendante des bases, on conclut que les matrices de u et u^* sont transposées dans toute base orthonormale. □

Définition 10.3. *1. On appelle* adjoint *de u l'endomorphisme, noté u^*, défini dans le théorème précédent.*

2. On dit que u est symétrique *si $u = u^*$.*

Corollaire 10.2. *1. u est symétrique si et seulement sa matrice dans une base orthonormale est symétrique (et alors elle l'est dans toutes).*

2. u est symétrique si et seulement si pour tous vecteurs x, y, on a $\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle$.

Théorème 10.4. *Si u est un endomorphisme symétrique de E euclidien, il existe une base orthonormale de E où la matrice de u est diagonale.*

Il est donc diagonalisable, mais on obtient plus : il existe une base de vecteurs propres qui forment une base orthonormale.

Corollaire 10.3. *Une matrice symétrique est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Démonstration. On considère l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ qui a M comme matrice dans la base canonique. E est un espace euclidien avec le produit scalaire usuel. Par le corollaire 10.2, c'est un endomorphisme symétrique. On conclut par le théorème 10.4. □

Pour démontrer ce théorème concernant des matrices à coefficients réels, on passe par les matrices à coefficients complexes. Il nous faut donc parler brièvement des nombres complexes.

Exercice 10.9. *On dit que la fonction $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est* bilinéaire *si pour tous $x \in E$, la fonction $y \to f(x, y)$ est linéaire et si pour tous $y \in E$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est linéaire. Montrer que si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E et si $f(e_i, e_j) = 0$ pour tous i, j, alors $f = 0$.*

10.4 Les nombres complexes et les espaces vectoriels associés

Un *nombre complexe* est une expression de la forme

$$z = a + bi,$$

où a, b sont des nombres réels, et i un symbole spécial. La *partie réelle* de z est a, et sa *partie imaginaire* est b (ou parfois bi). Si $z' = a' + b'i$ est un autre nombre complexe, on dira que $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. Tout nombre réel a est identifié au nombre complexe $a + 0i$; ainsi $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes. On définit l'addition et la multiplication dans C par $z + z' = (a + a') + (b + b')i$ et $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$. C'est un exercice de routine, de vérifier que $\mathbb{C}$ avec ces deux opérations, a les mêmes propriétés que $\mathbb{R}$: commutativité, associativité et éléments neutres pour les deux opérations, distributivité. De plus tout élément non nul de $\mathbb{C}$ a un inverse : on définit d'abord le *conjugué* $\bar{z}$ de $z = a + bi$ par $\bar{z} = a - bi$. Alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$ et par suite $z(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i) = 1$. Le nombre réel positif ou num $a^2 + b^2$ s'appelle le *module* du nombre complexe $z = a + bi$; il est nul si et seulement si $z = 0$.

La fonction $z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même, est appelée *conjugaison*. Elle préserve l'addition et la multiplication des nombres complexes : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{zz'} = \bar{z} + \bar{z}'$. Elle se prolonge naturellement aux matrices complexes, coefficient par coefficient, et cette fonction des matrices préserve aussi l'addition et la multiplication des matrices. On la note de la même manière, et donc, si A, B sont deux matrices (à coefficients) complexes, multipliables, on a $\bar{A}\bar{B} = \overline{AB}$. Une propriété importante, mais simple, de la conjugaison est que pour tout nombre complexe z, on a : $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Tout l'algèbre linéaire avec $\mathbb{R}$ peut se faire avec $\mathbb{C}$. En particulier, tout matrice carrée à coefficients complexes a un polynôme caractéristique, dont les racines sont les valeurs propres de cette matrice. Il découle du *théorème fondamental de l'algèbre* que tout polynôme à coeffients complexes, non constant, a une au moins une racine complexe.

Il découle ceci que si M est une matrice à coefficents complexes, elle a au moins une valeur propre complexe.

10.5 Preuve du théorème 10.4

Preuve par récurrence sur la dimension de E : si la dimension de E est 1, il n'y a rien à démontrer.

Supposons maintenant que $dim(E) > 1$ et soit M la matrice de u dans une certaine base orthonormale de E ; nous savons que M est symétrique.

Nous utilisons maintenant les nombres complexes. D'après ce qui précède, M a une valeur propre complexe λ. Il existe un vecteur colonne sur $\mathbb{C}$ tel que $Mv = \lambda v$. On va montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a donc $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Donc $\bar{\lambda}{}^t v\bar{v} = {}^t v(\bar{\lambda}\bar{v}) = {}^t vM\bar{v} = {}^t({}^t vM\bar{v})$ (car c'est un scalaire = une matrice 1×1) $= {}^t\bar{v}Mv = {}^t\bar{v}\lambda v = \lambda {}^t\bar{v}v = \lambda {}^t v\bar{v}$.

Ecrivons $v = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$. Alors ${}^t v\bar{v} = (z_1, \ldots, z_n)\,{}^t(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) = \sum_i z_i\bar{z}_i = \sum_i |z_i|^2$. Ce nombre est non nul, car $v \neq 0$; notons le r. Nous venons de montrer que $r\lambda = r\bar{\lambda}$. Nous en déduisons $\bar{\lambda} = \lambda$. Donc λ est un nombre réel et, abandonnant les nombres complexes, nous retournons au monde réel.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de M pour la valeur propre λ ; nous pouvons supposer que $\langle v, v\rangle = 1$. Soit D la droite $\mathbb{R}v$ et $F = \{x \in E \mid \langle x, v\rangle = 0\}$. Alors F est un sous-espace de E (exercice 10.7). Nous montrons que $u(F) \subset F$: si $x \in F$, alors $\langle u(x), v\rangle = \langle x, u(v)\rangle$ (car u est un endomorphisme symétrique) $= \langle x, \lambda v\rangle = \lambda\langle x, v\rangle = 0$; donc $u(x) \in F$. Donc la restriction u' de u à F (c'est-à-dire la fonction u' sur F définie par $u'(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$) est un endomorphisme de F ; ce dernier est, par restriction du produit scalaire de E, un espace euclidien. De plus, u' est symétrique, par le corollaire 10.2 2.

Il existe donc, par hypothèse de récurrence une base orthonormale de F formée de vecteurs propres de u'. En complétant par v cette base, on obtient une base orthonormale de E : en effet, ses vecteurs sont linéairement indépendants (exercice 10.8), et ils engendrent F. En effet, tout vecteur dans E est somme d'un vecteur dans D et d'un vecteur dans F. Car si $e \in E$, nous posons $w = \langle e, v\rangle v \in D$; alors $\langle w, v\rangle = \langle\langle e, v\rangle v, v\rangle = \langle e, v\rangle\langle v, v\rangle = \langle e, v\rangle$, et par suite $\langle e - w, v\rangle = \langle e, v\rangle - \langle w, v\rangle = 0$, donc $e - w \in F$; enfin $v = w + (e - w)$ et $w \in D$, $e - w \in F$.

Dans cette base orthonormale de E, la matrice de u est diagonale, car elle est formée de vecteurs propres de u.

Exercice 10.10. *Démontrer directement le fait qu'une matrice symétrique*

sur $\mathbb{R}$ de taille 2×2 a toutes ses valeurs propres réelles. Indication : montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice est ≥ 0. Indication : utiliser l'identité $(a+d)^2 - 4ad = (a-d)^2$.

Exercice 10.11. *Montrer que si f est une appplication bilinéaire comme dans l'exercice 10.9, et si u, v sont des endomorphismes de E, alors la fonction $(x, y) \mapsto f(u(x), v(y))$ est bilinéaire. Vérifier d'abord que cette notation a du sens, et déterminer les espaces de départ et d'arrivée de cette fonction.*

Exercice 10.12. *Montrer que l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ (cf. exercice 10.9) est un espace vectoriel.*

Exercice 10.13. *Vérifier que l'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ est bilinéaire, mais ce n'est pas une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 10.14. *Avec f comme dans l'exercice 10.9, montrer que $f(\sum_i a_i x_i, \sum_j b_j y_j) = \sum_{i,j} a_i b_j f(x_i, y_)$, où les x_i, y_j sont des vecteurs dans E, et les a_i, b_j des scalaires.*

Exercice 10.15. ** On rappelle que si un polynôme $ax^2 + bx + c$ ne prend que des valeurs positives ou nulles, alors son discriminant $b^2 - 4ac$ est ≤ 0. Dans un espace euclidien avec deux vecteurs u, v et un scalaire x, montrer que $\langle u + xv, u + xv \rangle = ax^2 + bx + c$, et déterminer a, b, c. En déduire que $\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$ (*inégalité de Cauchy-Schwartz*).*

Exercice 10.16. ** On appelle* norme *d'un vecteur v dans un espace euclidien le nombre $N(v) = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Montrer que $N(v) \geq 0$, que $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, et que $N(av) = |a| N(v)$ si a est un scalaire. En utilisant l'exercice précédent, montrer que $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ (*inégalité du triangle*).*

Exercice 10.17. ** On appelle* distance *de u à v dans un espace euclidien la quantité $d(u, v) = N(u - v)$. En utilisant l'exercice précédent, montrer que $d(u, v) \geq 0$, que $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$, et que $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (*inégalité du triangle*).*

Troisième partie

Appendice : rappels du cours de CEGEP

11 Système d'équations linéaires : résolution par la méthode d'élimination des variables, ou de substitution

Cette méthode est peut-être la plus naturelle. On choisit une des variables du système, on l'exprime en fonction des autres en utilisant une des équations ; puis on remplace dans toutes les autres équations cette variable par l'expression obtenue. Cela donne un nouveau système, avec moins de variables, et moins d'équations ; il se peut que des équations soient identiques, auquel cas on supprime les équations redondantes. On continue jusqu'à obtenir des variables sujettes à aucune équation : elles sont *libres*. En remontant le calcul à l'envers, on exprime toutes les variables non libres en fonctions des variables libres ; celle-ci peuvent prendre des valeurs arbitraires, et ça donne pour chaque choix une solution du système. Il y a alors une infinité de solutions, qui sont paramétrisées par les variables libres.

Il peut arriver qu'on ne trouve aucune variable libre : il y aura alors une solution unique.

Il peut arriver aussi qu'on arrive à une équation contradictoire (comme 0=1), et dans ce cas le système n'a aucune solution.

Ces trois alternatives, qui sont les seules possibles, sont illustrées dans les trois exemples très simples suivants.

Exemple 11.1.

$$a + 2b - c + 3d = 0,\ 2a - b - c - 2d = 0,\ 3a + b - 2c + d = 0.$$

Exprimons c en fonction des autres variables, en utilisant la première équation : $c = a + 2b + 3d$. Remplaçons c par l'expression $a + 2b + 3d$ dans les autres équations : $2a - b - a - 2b - 3d - 2d = 0$, $3a + b - 2a - 4b - 6d + d = 0$. Ces deux équations se simplifient toutes les deux en la même équation $a - 3b - 5d = 0$. Celle-ci permet d'exprimer a : $a = 3b + 5d$. Il n'y a plus d'autres équations ; les variables libres sont b et d.

On remonte : $c = a + 2b + 3d = 3b + 5d + 2b + 3d = 5b + 8d$. On obtient donc

$$a = 3b + 5d, c = 5b + 8d,$$

avec des valeurs arbitraires pour b et d. Il y a une infinité de solutions.

Exemple 11.2.

$$x + 3y = 8, 3x + y = 0.$$

Exprimons y en fonction de x avec la deuxième équation : $y = -3x$. Reportons y dans la première : $x + 3(-3x) = 8$, c'est-à-dire $-8x = 8$. Donc $x = -1$ et en remontant : $y = -3(-1) = 3$. Solution unique :

$$x = -1, y = 3.$$

Exemple 11.3.

$$u - v = 1, u + v + w = 2, 2u + w = 0.$$

Avec la première équation $u = v + 1$. Reportons u dans les autres : $v+1+v+w = 2$, $2(v+1)+w = 0$. Ça se réécrit $2v+w = 1$, $2v+w = -2$. On peut déjà voir qu'il n'y aura pas de solutions. Mais soyons plus systématique : en utilisant $2v + w = 1$, on obtient $w = -2v + 1$. Reportons dans la dernière équation : $2v + (-2v + 1) = -2$, ce qui se réécrit en $1 = -2$. Il n'y a pas de solution.

Exercice 11.1. *Résoudre :* $x + 2y = 4, 3x + 7y = 2$.

Exercice 11.2. *Résoudre :* $2x+3y-2z = 7, x-y-z = 1, 3x+2y-3z = 8$.

Exercice 11.3. *Résoudre :* $2a + 3b + 4c = 4, a - b + c = 1, 3a + 2b + 5c = 8$.

Exercice 11.4. *Résoudre :* $i + j + k + l = 0, i + j + k - l = 4, i + j - k + l = -4, i - j + k + l = 2$.

12 Matrices

12.1 Définitions (rappels)

Nous notons $M_{np}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ sur $\mathbb{R}$. Une telle matrice a donc n lignes et p colonnes. On note une telle matrice $[a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où a_{ij} désigne le coefficient (ou élément) en position i, j (ligne i, colonne j) de la matrice. On note la matrice aussi plus simplement $[a_{ij}]$ si aucune confusion n'est à craindre.

Une *matrice-ligne* (resp. *matrice-colonne*) est un élément de $M_{1p}(\mathbb{R})$ (resp. $M_{n1}(\mathbb{R})$). On dit aussi *vecteur-ligne* ou *vecteur-colonne*. Nous écrirons aussi $\mathbb{R}^p$ pour $M_{1p}(\mathbb{R})$.

Les lignes d'une matrice sont des matrices-lignes. Les colonnes d'une matrice sont des matrices-colonnes.

Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et si pour tous i, j leur élément en position i, j sont égaux.

La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note 0_{np} et plus souvent simplement 0 (c'est ce qu'on appelle un *abus de notation*).

Une *matrice carrée d' ordre* n est un élément de $M_n(\mathbb{R}) = M_{nn}(\mathbb{R})$. Les éléments diagonaux d'une matrice carrée $[a_{ij}]$ sont les éléments a_{ii}. On appelle diagonale d'une matrice les positions des éléments diagonaux. Une matrice carrée $[a_{ij}]$ est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si pour tous i, j, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$). Une matrice diagonale est une matrice qui est triangulaire à la fois supérieure et inférieure ; autrement dit, les éléments d'une matrice diagonale, qui sont en dehors de la diagonale, sont nuls.

Ce vocabulaire est très intuitif : voici des exemples de matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale (de gauche à droite) :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

On note I_n (ou simplement I) la matrice carrée d'ordre n, qui est diagonale, avec des des 1 comme éléments diagonaux. On l'appelle la matrice identité d'ordre n.

La *transposée* d'une matrice $A = [a_{ij}]$, de taille $n \times p$, est la matrice, notée ${}^tA$, de taille $p \times n$, telle que son élément en ligne i, colonne j, est l'élément de A en colonne j, ligne i. Ecrivant ${}^tA = [b_{ij}]$, ceci s'exprime par

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

12.2 Matrices : somme et produit externe

La somme de deux matrices $[a_{ij}]$ et $[b_{ij}$ de même taille est la matrice $[c_{ij}]$, de même taille, dont les coefficients sont définis par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Le *produit externe* d'un réel r par la matrice $[a_{ij}]$ est la matrice $[a_{ij}]$ dont les coefficients sont définis par $a_{ij} = ra_{ij}$. Par exemple

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}, \; r \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}.$$

Ces deux opérations jouissent des propriétés suivantes : quelles que soient les matrices de même taille X, Y, Z et les réels a, b :

1. $X + Y = Y + X$ (commutativité de la somme) ;
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (associativité de la somme) ;
3. $X + 0 = 0$ (0 est élément neutre pour l'addition) ;
4. Il existe une matrice X' telle que $X + X' = 0$ (existence de la matrice opposée) ;
5. $1X = X$ (le produit externe de $1 \in \mathbb{R}$ avec X est égal à X) ;
6. $(a + b)X = aX + bX$ (distributivité) ;
7. $a(X + Y) = aX + aY$ (distributivité) ;
8. $(ab)X = a(bX)$ (associativité).

L'associativité de la somme permet d'omettre les parenthèses : on écrit $A + B + C$ au lieu de $(A + B) + C$. Plus généralement, $A_1 + \ldots + A_k$ désigne la somme des ces k matrices (de même taille !) avec n'importe quel parenthésage.

Soient $A_1, \ldots, A_k \in M_{np}(\mathbb{R})$ et $a_1, \ldots, a_k \in R$. On appelle $a_1A_1 + \cdots + a_kA_k$ une *combinaison linéaire* des matrices $A_1, \ldots A_k$. Les a_i s'appellent les *coefficients* de cette combinaison linéaire ; plus précisément a_i est le coefficient de A_i.

S'il existe une combinaison linéaire telle que $a_1A_1 + \cdots + a_kA_k = 0$ et que les coefficients a_i ne sont pas tous nuls, on dit que les matrices $A_1, \ldots, A_k$ sont *linéairement dépendantes*.

Exercice 12.1. *Calculer la combinaison linéaire dans $M_2(\mathbb{R})$:*

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{y+z}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{z-y}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.3 Produit de matrices

Soient $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ des matrices de tailles respectives $n \times p$ et $p \times q$ (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). Le produit AB de ces deux matrices est la matrice $C = [c_{ij}]$, de taille $n \times q$ (le nombre de lignes de C est égal au nombre de lignes de A et son nombre de colonnes à celui de B), est défini par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}.$$

Notez que cela s'exprime aussi comme suit :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Le produit des matrices jouit des propriétés suivantes : soient $A, A' \in M_{np}(\mathbb{R})$, $B \in M_{pq}(\mathbb{R})$, $C \in M_{qr}(\mathbb{R})$, on a :

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit)
2. $(A + A')B = AB + A'C$ (distributivité) ;
3. $A(B + B') = AB + AB'$ (distributivité) ;
4. $I_n A = A$, $BI_p = B$ (élément neutre pour le produit) ;
5. $a(AB) = (aA)B = A(aB)$;

Comme pour l'addition, l'associativité permet d'omettre les parenthèses : on écrit simplement ABC au lieu de $(AB)C$. Plus généralement $A_1 \cdots A_k$ désigne le produit de ces k matrices, avec n'importe quel parenthésage.

Comme conséquence immédiate de la formule du produit de deux matrices, on note que le produit d'une matrice nulle par une matrice quelconque, à gauche ou à droite est toujours une matrice nulle.

Pour un entier naturel $k > 0$, on définit la puissance k-ème d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$: $A^n = AA \cdots A$, avec n facteurs A.

Proposition 12.1. *La transposée d'un produit est égal au produit des transposées dans l'autre sens.*

La preuve est laissée en exercice.

Exercice 12.2. *Trouver des matrices A et B telles que $AB \neq BA$.*

Exercice 12.3. *Calculer le cube de la matrice* $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 12.4. *Calculer la puissance n-ème de la matrice* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 12.5. *Calculer la puissance n-ème de la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *($n \geq 1$). Indication : essayer avec $n = 1, 2, 3$, deviner une formule générale et la prouver par récurrence sur n.*

Exercice 12.6. *Soit* $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Montrer que $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$.*

Exercice 12.7. *Soit $L = (a_1, \ldots, a_n)$ une matrice ligne et M une matrice de taille $n \times p$ dont les lignes sont $L_1, \ldots, L_n$. Montrer que LM est la matrice-ligne égale à la combinaison linéaire $a_1L_1 + \cdots + a_nL_n$.*

Exercice 12.8. *Enoncer un analogue du résultat de l'exercice précédent avec une matrice-colonne et avec les colonnes d'une matrice.*

Exercice 12.9. *La* trace *d'une matrice carrée M, notée $\mathrm{Tr}(M)$, est la somme de ses éléments diagonaux. a) Montrer que si $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{pn}(\mathbb{R})$, alors AB et BA sont des matrices carrées et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. b) Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB - BA = I_n$ ($n \geq 1$).*

Exercice 12.10. *Montrer que si M est une matrice, alors M^tM est une matrice carrée, dont la trace est égale à la somme des carrés de tous les coefficients de M.*

Exercice 12.11. *Soit A une matrice carrée et k un entier naturel > 0. Montrer par récurrence sur k que $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^k) = I-A^{k+1}$. En déduire que si A est* nilpotente *(c'est-à-dire : il existe une puissance de A qui est nulle), alors $I - A$ est inversible à droite ; de manière analogue, qu'elle est inversible à gauche.*

Exercice 12.12. *Soient A, B des matrices triangulaires supérieures d'ordre n, dont les éléments diagonaux sont repectivement $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$. Montrer que les éléments diagonaux de la matrice AB sont $a_1b_1, \ldots, a_nb_n$.*

Exercice 12.13. *Soient A, B des matrices carrées de même taille. Montrer que la formule du binôme $(A+B)^n = \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i} A^iB^{n-i}$ est vraie si $AB = BA$. Montrer par un contre-exemple qu'elle n'est pas vraie en général ($n = 2$ suffira).*

12.4 Matrices inversibles

Définition 12.1. *Une matrice carrée A d'ordre n est dite* inversible à gauche *(resp.* inversible à droite*) s'il existe une matrice de même taille B (resp. C) telle que $BA = I_n$ (resp. $AC = I_n$).*

Elle est dite inversible *s'il existe B telle que $AB = BA = I_n$.*

Proposition 12.2. *Si une matrice a un inverse à gauche et un inverse à droite, alors ces inverses sont égaux et la matrice est inversible.*

Démonstration. Par hypothèse, $BA = I = AC$. Il suffit de montrer que $B = C$. On a : $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. □

Il découle de cette proposition que si l'inverse d'une matrice A existe, cette matrice inverse est unique. On note A^{-1} l'inverse de la matrice A.

Proposition 12.3. *Soient $A_1, \ldots, A_k$ des matrices carrées de même taille, inversibles. Alors leur produit est inversible et $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.*

Autrement dit, l'inverse d'un produit de matrices inversibles est leur produit, mais dans l'autre sens.

Démonstration. Ça se prouve par récurrence sur k. Si $k = 1$, il n'y a rien à prouver. Supposons que le résultat soir vrai pour k et déduisons-en qu'il est vrai pour $k+1$. Soient $A_1, \ldots, A_{k+1}$ des matrices carrées inversibles de même taille. Par hypothèse de récurrence, $A_1 \cdots A_k$ est inversible et son inverse est $A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$. On donc $(A_1 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = I$. On en déduit que $(A_1 \cdots A_{k+1})(A_{k+1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_k)A_{k+1}A_{k+1}^{-1}(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_k)I(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = I$. □

Proposition 12.4. *Si une matrice est inversible, sa transposée l'est aussi et l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.*

La preuve est laissée en exercice.

Exercice 12.14. *Soient A, B des matrices carrées de même taille. Montrer que si AB est inversible à droite, alors A est inversible à droite.*

Exercice 12.15. *Montrer que si A est une matrice inversible à droite et B une matrice telle que $BA = 0$, alors $B = 0$.*

Exercice 12.16. *Soit*

$$R(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & (t^2-4)e^t & 2+2(t-1)e^t \\ 0 & e^t & te^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que $R(t+s) = R(t)R(s)$ pour tous nombres réels t et s. b) Quelle est l'inverse de $R(t)$?.

Exercice 12.17. *Montrer que si deux matrices carrées A, B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), et si elles sont inversibles, alors A et B^{-1} commutent, ainsi que A^{-1} et B^{-1}.*

Exercice 12.18. *Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, On suppose que A et $I_n + A$ sont inversibles. a) Montrer que $I_n + A^{-1}$ a pour inverse $A(I_n + A)^{-1}$. b) Montrer que $(I_n + A^{-1})^{-1} + (I_n + A)^{-1} = I_n$.*

Exercice 12.19. *Montrer que si une matrice carrée A satisfait $A^2 = A$, alors $I - A$ n'est pas inversible, sauf si $A = 0$.*

Exercice 12.20. *Soit J la matrice $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer J^2 et $(I-J)J$. En déduire que les matrices J et $I - J$ ne sont pas inversibles.*

Exercice 12.21. *Montrer que si A, P sont des matrices carrées de même taille, et si P est inversible, alors $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$. Utiliser l'exercice 12.9.*

Exercice 12.22. *On suppose que A est une matrice carrée non nulle telle que $A^2 = A$. Pour $r, s \in R$, montrer que $(I+rA)(I+sA) = (I+sA)(I+rA)$ est une combinaison linéaire de I et A. En déduire que $I + rA$ est inversible sauf si $r = -1$.*

12.5 Système d'équations linéaires de Cramer

Définition 12.2. *Le système d'équations linéaires $AX = B$, où A est une matrice inversible d'ordre n, où $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ est une matrice-colonne de variables et où $B = (b_1, \ldots, b_n)^t$ est une matrice colonne, est appelé un* système de Cramer.

Théorème 12.1. *Un système de Cramer a une unique solution, qui est $X = A^{-1}B$.*

Démonstration. Si $AX = B$, on obtient par multiplication par A^{-1} à gauche : $X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}B$. Réciproquement, si $X = A^{-1}B$, on obtient par multiplication à gauche par A : $AX = AA^{-1}B = B$. □

12.6 Opérations de lignes

Définition 12.3. *Les* opérations de lignes *sont de trois sortes, où A, B sont des matrices de même taille et où $A \longrightarrow B$ signifie qu'on transforme A en B par l'opération en question :*

1. *$A \overset{l_i + a l_j}{\longrightarrow} B$, qui signifie qu'on a ajouté à la ligne i de A la ligne j de A préalablement multipliée par a ($i \neq j$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).*

2. $A \xrightarrow{(ij)} B$, *qui signifie qu'on a échangé les lignes* i *et* j *dans* A $(i \neq j)$.

3. $A \xrightarrow{al_i} B$, *qui signifie qu'on a multiplié par* a *la ligne* i *de* A $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Définition 12.4. *Une* matrice élémentaire *est une matrice obtenue à partir d'une matrice identité par une opération de ligne.*

Proposition 12.5. *Si* $A \longrightarrow B$ *par une opération de ligne, alors* $B = PA$, *où* P *est la matrice élémentaire correspondant à cette opération.*

Démonstration. C'est un excellent exercice, un peu long. □

Proposition 12.6. *Toute matrice élémentaire a un inverse qui est aussi une matrice élémentaire.*

Démonstration. Si $A \xrightarrow{l_i+al_j} B$, on a clairement aussi $B \xrightarrow{l_i-al_j} A$. Soit P la matrice élémentaire correspondant à l'opération l_i+al_j. On a donc $I \xrightarrow{l_i+al_j} P$ et par ce qui précède, $P \xrightarrow{l_i-al_j} I$. La proposition précédente montre implique que $I = QP$, où Q est la matrice élémentaire qui correspond à l'opération de lignes $l_i - al_j$.

En remplaçant a par $-a$ dans le raisonnement précédent, on trouve que $I = PQ$. Donc l'inverse de P est Q. □

Corollaire 12.1. *Si on transforme* A *en* B *par une suite d'opérations de lignes, alors il existe une matrice inversible* P *telle que* $B = PA$. *En fait,* P *est produit de matrices élémentaires.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le nombre d'opérations de lignes qui transforment A en B. L'assertion à prouver est la suivante : si A est transformé en B par n opérations de lignes, alors il existe P produit de matrices élémentaires telle que $B = PA$.

Si $n = 1$, c'est-à-dire $A \to B$ par une opération de lignes, alors $B = PA$ où P est une matrice élémentaire (Proposition 12.5).

L'hypothèse de récurrence est que l'assertion est vraie pour n. Soit alors des matrices A et B telles que B s'obtient de A par $n + 1$ opérations de lignes. Il existe alors une matrice B' telle que B' s'obtienne de A par n opérations de lignes, et que $B' \to B$ par une opération de lignes. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice P qui est un produit de matrices élémentaires telle que $B' = PA$; de plus, par la proposition 12.5, il existe une matrice élémentaire P' telle que $B = P'B'$. On a alors

$B = P'B' = P'PA = (P'P)A$ est l'assertion pour $n+1$ s'ensuit, car $P'P$ est un produit de $n+1$ matrices élémentaires.

Pour conclure la preuve, il suffit d'appliquer la proposition 12.3. □

Définition 12.5. *Une matrice est dite* échelonnée *si elle a les propriétés suivantes :*

- *si une ligne est nulle, toutes les nulles plus basses sont nulles ;*
- *si une ligne est non nulle, le premier coefficient non nul dans cette ligne est* 1 *(on appellera* pivot *un tel élément) ;*
- *si une ligne est non nulle, avec le premier coefficient non nul en colonne j, alors la ligne suivante a son premier coefficient non nul en colonne $> j$.*

Une matrice échelonnée a l'allure suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème 12.2. *(Algorithme de Gauss-Jordan) On peut par une suite d'opérations de lignes transformer toute matrice en une matrice échelonnée.*

Preuve et algorithme. On va raisonner de manière un peu littéraire.

Etape 1. Si la matrice a sa première colonne nulle, on travaille sur la matrice obtenue en la supprimant, et on la rétablit à la fin. On obtient bien une matrice échelonnée, car si on rajoute une colonne nulle à gauche d'une matrice échelonnée, on obtient une matrice échelonnée.

Etape 2. On peut donc supposer que la première colonne comporte un élément non nul. On en choisit un (de préférence le plus petit possible, 1 si c'est possible). Par une opération $(1i)$, on le ramène en haut à gauche. Par une opération al_1, on le change en 1. Puis par des opérations $l_i + al_1$, on annule tous les autres éléments de la première colonne (donc avec $i \geq 2$).

Etape 3 : On a maintenant une matrice de la forme.

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{bmatrix}$$

On retourne à l'étape 1 pour la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne. On les rétablira à la fin, et on obtiendra une matrice échelonnée. □

Dans la pratique, on peut ne pas supprimer des lignes ou des colonnes, mais on les garde tout au cours du calcul. C'est peu plus lourd, mais ça évite de devoir les garder en mémoire.

Proposition 12.7. *Si une matrice échelonnée a plus de lignes que de colonnes, alors sa dernière ligne est nulle.*

Démonstration. Soit $n \times p$ la taille de la matrice. On a par hypothèse $p < n$. Soit m le nombre de lignes non nulles.

Soit φ la fonction de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, p\}$ qui à i associe l'indice j de la colonne où se trouve le pivot de la ligne i. C'est une fonction injective, car les pivots sont tous dans des colonnes ditinctes. De l'injectivité on déduit que $m \leq p$. Donc $m \leq p < n$, d'où $m < n$.

Il y a donc moins de lignes non nulles que de lignes. Il existe donc au moins une ligne nulle. □

Corollaire 12.2. *Si une matrice a plus de lignes que de colonnes, ses lignes sont linéairement dépendantes.*

Autrement dit : soit $M \in M_{np}(K]$ avec $n > p$; soient $l_1, \ldots, l_n$ ses lignes (chacune d'elles est une élément de $M_{1p}(\mathbb{R})$) ; alors il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 l_1 + \ldots + a)nl_n = 0$ et que (condition essentielle !) $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Par exemple, pour

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

on a $(1, 2) - 2(3, 4) + (5, 6) = (0, 0)$ (autrement dit les réels a_1, a_2, a_3 sont ici $1, -2, 1$).

Preuve. Soit M cette matrice, de taille $n \times p$. Il existe par le corollaire 12.1 et le théorème 12.2 une matrice inversible P et une matrice échelonnée N telle que $N = PM$. On a donc $M = IM = P^{-1}PM = P^{-1}N$. La matrice N a sa dernière ligne nulle par la proposition 12.7. On a donc, avec $v = (0, \ldots, 0, 1)$, qui est un vecteur-ligne de longueur n : $vN = 0$. Posons $u = (a_1, \ldots, a_n) = vP$; alors $uM = vPP^{-1}M = vN = 0$, ce qui exprime exactement que $a_1 l_1 + \ldots + a_n l_n = 0$. Mais u n'est pas nul : sinon $v = uP^{-1}$ serait nul, ce qui n'est pas. □

Exercice 12.23. *Soit $A \in M_n(R)$. Montrer que si on transforme par des opérations de lignes la matrice $[A, I_n]$ (c'est une matrice de taille $n \times 2n$ obtenue en plaçant I_n à la droite de A) en la matrice $[B, P]$, alors $B = PA$ (indication : montrer d'abord que $Q[A, B] = [QA, QB]$).*

Exercice 12.24. *Pour des matrices A, B de même taille, on écrit $A \sim B$ si on peut obtenir B à partir de A par une suite d'opérations de lignes. Montrer que $\sim$ est* relation d'équivalence*, c'est-à-dire qu'on a les trois propriétés (A, B, C sont quelconques, mais de même taille) : (i) $A \sim A$; (ii) $A \sim B$ implique $B \sim A$; (iii) $A \sim B$ et $B \sim C$ implique $A \sim C$.*

Exercice 12.25. *Montrer que certaines opérations de lignes commutent. Par exemple que si $A \overset{l_i+al_j}{\longrightarrow} B \overset{l_i+bl_k}{\longrightarrow} C$ et $A \overset{l_i+bl_k}{\longrightarrow} B' \overset{l_i+al_j}{\longrightarrow} C'$, alors $C = C'$. En déduire que les matrices élémentaires correspondant aux opérations l_i+al_j et l_i+bl_k commutent. Montrer que ce n'est pas vrai pour les opérations $l_1 + l_2$ et $l_2 + l_1$, ni pour les matrices élémentaires correspondantes.*

Exercice 12.26. *Prouver le corollaire 12.2 en utilisant la proposition 7.3.*

Exercice 12.27. ** Pour n, p fixé, quel est le nombre de formes possibles de matrice échelonnées ?*

12.7 Système d'équations linéaires : méthode de Gauss

Définition 12.6. *Une matrice est dite* échelonnée réduite *si elle est échelonnée et si de plus pour chaque pivot, sa colonne ne comporte à part lui que des 0.*

Proposition 12.8. *On peut par des transformations de lignes transformer toute matrice en un matrice échelonnée réduite. Celle-ci est unique.*

Preuve et algorithme. On peut partir d'une matrice échelonnée. Il suffit d'appliquer pour chaque pivot, en position i, j, des opérations de lignes $l_k + al_i$, $k < i$, de manière a annuler l'élément en position k, j.

Nous ne démontrons pas l'unicité ici. □

Définition 12.7. *La* matrice *du système d'équations linéaires* homogènes *(c'est- à-dire, dont les seconds membres sont nuls), à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ et n équations*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0,$$
$$\ldots,$$

$$a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = 0,$$

est la matrice $[a_{ij}]_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.

Pour résoudre ce système, on transforme la matrice en une matrice échelonnée réduite. Le système correspondant à cette nouvelle matrice est *équivalent* au précédent (c'est-à-dire, a les mêmes solutions). Alors les variables correspondant aux pivots (c'est-à-dire, les x_j avec un pivot en colonne j) sont appelées *liées* et les autres sont *libres*[4]. Le nouveau système permet d'exprimer les variables liées en fonction des variables libres, qui peuvent prendre des valeurs arbitraires.

Pour un système général, où les seconds membres sont $b_1, \ldots, b_n$ (en place des 0 ci-dessus), la matrice du système est la même que ci- dessus sauf qu'on y rajoute à droite la colonne $(b_1, \ldots, b_n)^t$. On transforme cette matrice en une matrice échelonnée réduite. Le nouveau système est équivalent au précédent. S'il y a une ligne de la forme $[0, \ldots, 0, c]$, alors on a une équation du type $0x_1 + \cdots + 0x_p = c$; s'il y en a une avec $c \neq 0$, le sytème n'a pas de solution. Sinon, on obtient comme ci-dessus des expressions pour les variables liées en fonction des variables libres. S'il n'y a pas de variable libre, il y a une solution unique. Sinon, il y a une infinité de solutions obtenues en donnant des valeurs arbitraires aux variables libres.

Un examen attentif de la méthode de substitution et de la méthode ci-dessus révèle qu'elles sont essentiellement équivalentes : à condition, pour la méthode de substitution, de se donner un ordre sur les variables, qu'on éliminera dans cet ordre.

Une autre conséquence de l'existence de la matrice échelonnée réduite est la caractérisation suivante des matrices inversibles.

Corollaire 12.3. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est produit de matrices élémentaires.*

On utilise dans la preuve qui suit le résultat suivant, laissé en exercice : si une matrice carrée est échelonnée réduite, et si elle n'a pas de ligne nulle, alors c'est la matrice identité.

Démonstration. Un produit de matrices élémentaires est inversible (proposition 12.3 et corollaire 12.6). Réciproquement, soit A une matrice inversible. Il existe donc, par la proposition 12.8 et le corollaire 12.1, une matrice P qui est produit de matrice élémentaires et une matrice B échelonnée réduite

4. On dit aussi variables *indépendantes*, resp. *dépendantes*, pour variables libres, resp. liées.

telle que $B = PA$. Alors B est inversible (proposition 12.3), car elle est un produit de matrices inversibles ; donc B doit être la matrice identité I (sinon elle a une ligne nulle, et ne peut être inversible). Donc, en multipliant $I = PA$ à gauche par P^{-1}, on trouve $A = P^{-1}$: donc A est un produit de matrices élémentaires par la proposition 12.3 et le corollaire 12.6. □

Exercice 12.28. ** Retravailler la preuve du corollaire 12.3 pour montrer que si A est carrée et inversible à droite, alors elle est produit de matrices élémentaires (indication : B est inversible à droite, carrée et réduite échelonnée ; donc sa dernière ligne n'est pas nulle) ; donc inversible. En déduire, par transposition, qu'une matrice est inversible à droite si et seulement si elle est inversible à gauche.*

12.8 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss

Si A est une matrice carrée d'ordre n, elle est inversible si et seulement si sa forme réduite échelonnée est la matrice identité I_n. Pour calculer son inverse, on calcule la forme échelonnée réduite de la matrice $[A, I_n]$: on obtient $[I_n, A^{-1}]$.

13 Déterminants

13.1 Développement selon la première colonne

Définition 13.1. *Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n. Le* déterminant *de A, noté* $\det(A)$ *ou aussi $|A|$, est défini récursivement comme suit : si $n = 1$, c'est a_{11} ; si $n \geq 2$, c'est $a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\Delta_{n1}$, où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice (de taille $n-1 \times n-1$)obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.*

Proposition 13.1. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

Démonstration. Si la matrice est triangulaire supérieure, on a par définition du déterminant $\det(A) = a_{11}\Delta_{11}$. Par hypothèse de récurrence $\Delta_{11} = a_{22} \cdots a_{nn}$. D'où le résultat.

Si la matrice est triangulaire inférieure, alors Δ_{i1} est pour $i \geq 2$ le déterminant d'une matrice triangulaire dont la première ligne est nulle ; par hypothèse de récurrence son déterminant est nul. On a donc $\det(A) = a_{11}\Delta_{11}$ et on conclut comme dans le cas précédent. □

Proposition 13.2. *Soient A, A', A'' trois matrices carrées qui ne diffèrent que par leur i-ème ligne (leurs i-emes lignes sont notées respectivement l_i, l'_i, l''_i).*

1. Si $l_i = l'_i + l''_i$; alors $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

2. Si $l_i = al'_i$, alors $\det(A) = a\det(A')$.

Démonstration. Nous ne démontrons que la deuxième partie, l'autre étant analogue et laissée en exercice. Si $n = 1$, c'est clair. On a par définition $\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots, \det(A') = a'_{11}\Delta'_{11} - a'_{21}\Delta'_{21} + \ldots$. Par hypothèse de récurrence sur n, $\Delta'_{k1} = a\Delta_{k1}$ si $k \neq i$. De plus $a'_{k1} = a_{k1}$ si $k \neq i$, $a'_{i1} = aa_{i1}$ et $\Delta'_{i1} = \Delta_{i1}$. Donc $\det(A') = a\det(A)$. □

Proposition 13.3. *Soit B une matrice carrée obtenue de A par une opération de ligne. Si c'est une opération $l_i + al_j$, elles ont même déterminant. Si c'est une opération al_i, on a* $\det(B) = a\det(A)$. *Si c'est une opération (ij), on a* $\det(B) = -\det(A)$.

Lemme 13.1. *1. Si dans une matrice A, on échange deux lignes adjacentes, alors son déterminant est multiplié par -1.*

2. Si dans une matrice carrée, deux lignes sont égales, son déterminant est nul.

Démonstration. 1.Soit A' la matrice obtenue par l'échange. On a $\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots, \det(A') = a'_{11}\Delta'_{11} - a'_{21}\Delta'_{21} + \ldots$. Si $k \neq i, i+1$, alors $\Delta'_{k1} = -\Delta_{k1}$ par hypothèse de récurrence ; de plus, $a_{k1} = a_{k1}$. On a aussi $a'_{i1} = a_{i+1,1}$, $a'_{i+1,1} = a_{i1}$, $\Delta'_{i1} = \Delta_{i+1,1}$, $\Delta'_{i+1,1} = \Delta_{i1}$. Donc $(-1)^{k+1}a'_{k1}\Delta'_{k1} = -(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{k1}$ si $k \neq i, i+1$. Et $(-1)^{i+1}a'_{i1}\Delta'_{i1} = -(-1)^{i+2}a_{i+1,1}\Delta_{i+1,1}$ et enfin $(-1)^{i+2}a'_{i+1,1}\Delta'_{i+1,1} = -(-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1}$. Il découle de tout ceci que $\det(A') = -\det(A)$.

2. Supposons que dans la matrice A, $l_i = l_j$, avec $i < j$. Raisonnons par récurrence sur $j - i$. Si ceci vaut 1, soit A' obtenue en échangeant les deux lignes ; alors $A = A'$ et $\det(A) = \det(A')$. Mais d'après 1., on a $\det(A') = -\det(A)$. Donc $\det(A) = 0$. Supposons maintenant que $j - i \leq 2$. Soit B la matrice obtenue en échangeant dans A les lignes j et $j-1$. Alors $\det(B) = -\det(A)$ par 1. Dans B les lignes i et $j-1$ sont égales. Par hypothèse de récurrence (car $j - 1 - i < j - i$), on a $\det(B) = 0$. Donc $\det(A) = 0$. □

Preuve de la proposition 13.3. Soit A' la matrice obtenue par l'opération de ligne.

1. Soit B obtenue de A en y remplaçant l_i par l_j. Alors $\det(B) = 0$ par le lemme 13.1. Par la proposition 13.2, on a $\det(A') = \det(A) + a\det(B)$. Donc $\det(A') = \det(A)$.

2. Déjà vu dans la proposition 13.2.

3. On suppose que l'opération échange les lignes i et j da A. Soit M (resp. B, resp. C) la matrice ayant les mêmes lignes que A, sauf la i-ème et la j-ème toutes deux égales à $l_i + l_j$ (resp. l_i, resp. l_j). D'après le lemme, le déterminant de ces trois matrices est nul. Mais d'après la proposition 13.2, utilisée trois fois, on a $\det(M) = \det(B) + \det(A) + \det(A') + \det(C)$. Donc $\det(A') = -\det(A)$. □

Corollaire 13.1. *Soit E une matrice élémentaire, obtenue en appliquant à la matrice identité une opération de ligne (voir la définition 12.4). Alors son déterminant est 1 si c'est une opération $l_i + al_j$, a si c'est une opération al_i, et -1 si c'est une opération (ij).*

Exercice 13.1. *Montrer que le déterminant de la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ *est égal à $(b-a)(c-a)(c-b)$. Généraliser à des tailles plus grandes.*

Exercice 13.2. *Soient $v = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que si v, v' sont linéairement dépendants si et seulement si* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0.$

13.2 Formule du produit

Théorème 13.1. *Soient A, B des matrices carrées de même taille. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Lemme 13.2. *Si $B = EA$ où A, B, E sont des matrices carrées de même taille, avec E élémentaire alors, $\det(B) = \det(E)\det(A)$.*

Démonstration. Cela découle des propositions 12.5, 13.3 et du corollaire 13.1. □

Preuve du théorème 13.1. 1. Si A est une matrice élémentaire, alors la formule est vraie par le lemme 13.2.

2. Supposons que A soit inversible. Alors, grâce au corollaire 12.3, A est un produit de k matrices élémentaires, $A = E_1 \cdots E_k$. Si $k = 1$ on conclut grâce à 1. Supposons que $k \geq 2$. On alors $\det(AB) = \det(E_1(E_2 \cdots E_k B)) =$

$\det(E_1)\det(E_2\cdots E_kB)$ (par 1.) $=$ $\det(E_1)\det(E_2\cdots E_k)\det(B)$ (par récurrence sur k) $=\det(A)\det(B)$ (par le cas 1).

3, Supposons que A ne soit pas inversible. Alors il existe une matrice inversible (produit de matrices élémentaires) P telle que PA soit échelonnée réduite. Cette matrice n'est pas inversible (sinon A le serait), donc sa dernière ligne est nulle (si elle ne l'était pas, ça serait la matrice identité). Alors la dernière ligne de PAB est nulle. Le déterminant d'une matrice dont la dernière ligne est nulle est nul (multiplier par -1 cette dernière ligne et appliquer la proposition 13.2). Donc $\det(PA)=\det(PAB)=0$. Mais nous savons déjà que $\det(PA)=\det(P)\det(A)$ et $\det(PAB)=\det(P)\det(AB)$. Le déterminant de P est non nul, car P est produit de matrices élémentaires, et que son déterminant est le produit de leurs déterminants (par 2.), qui sont non nuls par le corollaire 13.1. Donc $\det(A)=0=\det(AB)$. D'où $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. □

Corollaire 13.2. *Le déterminant du produit de plusieurs matrices est égal au produit de leurs déterminants.*

Démonstration. On utilise le théorème et on fait une récurrence sur le nombre de matrices dans le produit. □

13.3 Inversion des matrices et déterminants

Théorème 13.2. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, l'élément en position i,j de A^{-1} est $\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ji}}{\det(A)}$.*

Lemme 13.3. $\sum_i(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ik}=\delta_{jk}\det(A)$.

Démonstration. □

Preuve du théorème 13.2. Si A est inversible, d'inverse B, alors $BA=I$, et d'après le théorème 13.1, $\det(B)\det(A)=\det(I)=1$. Donc $\det(A)$ est non nul.

Réciproquement, supposons que $\det(A)$ soit non nul. Posons $b_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ji}}{\det(A)}$, et soit $B=[b_{ij}]$. Calculons le coefficient (i,k) du produit BA. Il est égal à

$$\sum_j b_{ij}a_{jk}=\sum_j\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ji}}{\det(A)}a_{jk}=\frac{1}{\det(A)}\sum_j(-1)^{i+j}a_{jk}\Delta_{ji}.$$

Par le lemme, ceci vaut δ_{ik}. Donc $BA=I$.

Nous venons de prouver que si $\det(A)$ est non nul, alors il existe B telle que $BA = I$. Mais cette égalité entraine aussi que $\det(B)$ est non nul. Il existe donc C telle que $CB = I$.

Finalement, $C = CI = CBA = IA = A$, donc $C = A$ et enfin $AB = I$. Donc A a pour inverse B. □

Corollaire 13.3. *Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.*

Démonstration. Par le corollaire 13.1, c'est vrai pour les matrices élémentaires. C'est donc vrai pour tout produit de matrices élémentaires (corollaire 13.2), donc pour toute matrice inversible (corollaire 12.3). Pour traiter le cas d'une matrice non inversible, on applique le théorème 13.2 et la proposition 12.4. □

Exercice 13.3. *Déduire du théorème l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.*

13.4 Développement du déterminant selon une ligne ou colonne quelconque

Les formules qui suivent s'appellent "formules de Laplace".

Théorème 13.3. *Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n s'obtient par l'une des $2n$ formules suivantes :*

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in}$$

(développement selon la i-ème ligne) ;

$$\det(A) = (-1)^{j+1}a_{1j}\Delta_{1j} + (-1)^{j+2}a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + (-1)^{j+n}a_{nj}\Delta_{nj}$$

(développement selon la j-ème colonne).

Corollaire 13.4. *Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.*

13.5 Système de Cramer (suite)

Théorème 13.4. *L'unique solution du système de Cramer $AX = B$ est déterminée par : soit D_i le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en y remplaçant la i-ème colonne par B ; alors $x_i = D_i/\det(A)$.*

14 Solutionnaire (esquisses)

Exercice 2.1 $A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$; $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\}$; $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset,\{3\},\{4\},B\}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{3\}\},\{\{4\}\},\{B\},\{\{3\},\{4\}\},\{\{3\},B\},\{\{4\},B\},etc...\}$ (16 éléments).

Exercice 2.3 Tous vrais sauf e) qui est faux.

Exercice 2.4 C'est l'ensemble des nombres entiers naturels *composés*, c'est-à-dire produit de deux entiers naturels ≥ 2 ; autrment dit, c'est l'ensemble des entiers naturels, distincts de 0 et 1, et qui ne sont pas premiers.

Exercice 2.5 Soit a un élément de A est $B = A \setminus \{a\}$. Alors $|B| = n-1$ et on peut admettre (hypothèse de récurrence) que la cardinalité de $\mathcal{P}(B)$ est 2^{n-1}. A toute partie E de A, on associe la partie $F = E \cap B$ de B. Pour une partie F de B donnée, il y a exactement deux parties de A qui lui correspondent ainsi ; à savoir F et $F \cup \{a\}$. On en déduit que la cardinalité de $\mathcal{P}(A)$ dux fois celle de $\mathcal{P}(B)$.

Exercice 2.6 a) $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x$ appartient à l'un des ensembles, mais pas aux deux $\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ et $non(x \notin B) \Leftrightarrow x \in A$ et $non(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \setminus (A \setminus B)$.

Exercice 3.1 R n'est pas fonctionnelle car $(1,2)$ et $(1,3)$ sont tous deux dans R. L'autre relation est fonctionnelle ; en effet il n'y a pas de a,b,c tels que (a,b) et (a,c) sont dans cette relation et que de plus $b \neq c$.

Exercice 3.2 Ces égalités découlent de la définition d'une fonction au début de la section 3.1.

Exercice 3.3 Faux. On a en effet le contre-exemple suivant $f(1) = f(2) = 1, X = \{1,2\}, Y = \{2\}$. Alors $X \setminus Y = \{1\}$, $f(X \setminus Y) = \{1\}$ et $f(X) \setminus f(Y) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$.

Exercice 3.4 Si $z \in g \circ f(X)$, alors il existe $x \in X$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x)$; alors $y = f(x) \in f(X)$, donc $z = g(y) \in g(f(X))$. Réciproquement, si $z \in= g(f(X)$, alors il existe $y \in f(X)$ tel que $z = g(y)$; alors il existe $x \in X$ tel que $y = g(x)$, donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x) \in g \circ f(X)$.

Si $x \in (g \circ f)^{-1}(Y)$, alors $(g \circ f)(x) \in Y$, donc $g(f(x) \in Y$, donc $f(x) \in g^{-1}(Y)$, donc $x \in f^{-1}(g^{-1}(Y))$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(g^{-1}(Y))$, alors $f(x) \in g^{-1}(Y)$, donc $g(f(x)) \in Y$, donc $(g \circ f()x) \in Y$, donc $x \in (g \circ f)^{-1}(Y)$.

Exercice 3.5 (i) Si $g \circ f(a) = g \circ f(a')$, alors $g(f(a)) = g((a'))$, donc g étant injective $f(a) = f(a')$, donc f étant injective, $a = a'$.

(ii) Si $f(a) = f(a')$, alors $g(f(a)) = g(f(a'))$, donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$, donc $g \circ f$ étant injective $a = a'$.

(iii) Soit $c \in C$; comme $g \circ f$ est injective, il existe $a \in A$ tel que $c = g \circ f(a)$; on a donc $c = g(f(a)$ et c est donc dans l'image de g.

Exercice 3.6

Exercice 5.4 (i) On a $u = 3v - w + x$, donc $3v = u + w - x$ et enfin $v = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}w - \frac{1}{3}x$. (ii) On a $au = -bv - cw$, et comme $a \neq 0$, on peut multiplier les deux côtés par le scalaire $\frac{1}{a}$ et on obtient $u = -\frac{b}{a}v - \frac{c}{a}w$. Si u était nul, la preuve ci-dessus ne marcherait pas, car on ne pourrait pas multiplier par ce scalaire. Plus précisément voici un contre-exemple : $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (0, -1, -1)$; on a $au + bv + cw = 0$, avec $a = 0, b = 1, c = 1$ mais u n'est pas combinaison linéaire de v et w (prouvez-le). (iii) $u = 3v - w = 3(x + y) - (y - z)) = 3x + 3y - y + z = 3x + 2y + z$. (iv) On a $u = av + bw$, $v = cx + dy$, $w = ex + fy$ (où a, b, c, d, e, f sont des scalaires), donc $u = a(cx + dy) + b(ex + fy) = acx + ady + bex + bfy = (ac + be)x + (ad + bf)y$.

Exercice 5.5 On peut écrire $x = ay + bz$ pour des scalaires a et b. Alors a et b ne sont pas simultanément nuls, car sinon $x = 0$. Si $a \neq 0$, on obtient $y = (1/a)x - (b/a)z$ et y est combinaison linéaire de x, z. Si $b \neq 0$, on obtient de manière analogue que z est combinaison linéaire de x, y.

Exercice 5.6 On vérifie que la fonction satisfait aux deux conditions de la définition 5.3.

Exercice 5.7 Si la condition est réalisée, le polynôme est $a_1 x$ et on vérifie qu'il définit une application linéaire. Réciproquement, si l'application est linéaire, alors pour tous $a, \alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $P(\alpha a) = \alpha P(a)$; c'est-à-dire $\sum_i a_i (\alpha a)^i = \alpha \sum_i a_i a^i$, ce qui se réécrit en $\sum_i a_i \alpha^i a^i = \sum_i a_i \alpha a^i$. Les a_i sont constants, et α, a prennent des valeurs quelconques ; on peut donc considérer cette égalité comme un égalité de deux polynômes en deux variables α et a ; donc elle doit être vraie coefficient par coefficient, et on en déduit que les a_i sont tous nuls, sauf peut-être a_1.

Exercice 6.5 Non, car la matrice nulle n'y est pas.

Exercice 6.6 Non, car la matrice nulle n'y est pas. Non, car on peut trouver des matrices de déterminants nuls dont la somme n'est pas de déterminant nul.

Exercice 6.10 On considère un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont des sous-espaces d'un espace vectoriel V. Soit $F = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$ l'intersection des sous-espaces qui sont dans $\mathcal{E}$. Comme $0 \in E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$, on a $0 \in F$. Soient $x, y \in F$; alors $x, y \in E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$; donc $x + y \in E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$; donc $x + y \in F$. Etc...

Exercice 6.11 Soit G un sous-espace qui contient $e_1, \ldots, e_n$. Alors G contient toute combinaison linéaire de ces vecteurs, donc G contient F. On en

déduit que l'intersection des sous-espaces dans l'ensemble considéré contient F.

Réciproquement, F fait partie de l'ensemble. Donc l'intersection est contenue fdans F.

Exercice 7.4 Ecrivons une relation de dépendance linéaire pour $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} : b_1x_1 + \cdots + b_{n-1}x_{n-1} + b_n(x_n + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}) = 0$. Ceci implique $b_1x_1 + \cdots + b_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n + b_na_1x_1 + \cdots + b_na_{n-1}x_{n-1} = 0$, d'où l'on tire $(b_1 + b_na_1)x_1 + \cdots + (b_{n-1} + b_na_{n-1})x_{n-1} + b_nx_n = 0$. Comme les x_i sont linéairement indépendants, on en déduit que $b_1 + b_na_1 = 0, \ldots, b_{n-1} + b_na_{n-1}, b_n = 0$. Ceci implique que tous les b_i sont nuls.

Exercice 7.5 On a $(a_1, \ldots, a_n) = a_1(1, -1, 0, \ldots, 0) + (a_1 + a_2)(0, 1, -1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{n-1})(0, \ldots, 1, -1)$.

Exercice 7.7 Supposons que $v_1, \ldots, v_n$ soit une base. Alors tout vecteur v est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$. Si l'on a $v = \sum_i a_iv_i = \sum_i b_iv_i$ $(a_i, b_i\mathbb{R})$, alors $0 = \sum_i(a_i - b_i)v_i$; comme les v_i sont linéairement indépendants, on doit avoir $a_i - b_i = 0$, donc $a_i = b_i$, pour tout i. Donc la combinaison linéaire est unique.

Réciproquement, si tout vecteur est combinaison linéaire unique de $v_1, \ldots, v_n$, alors tout vecteur est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$, et par suite ces vecteurs engendrent l'espace. Si l'on a $\sum_i a_iv_i = 0$, alors $0 = \sum_i 0v_i = \sum_i a_iv_i$; par unicité, on doit avoir $a_i = 0$ pour tout i. Donc $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, et ils forment donc une base.

Exercice 7.12 Définissons E_{ij}, matrice carrée d'ordre n, par : son coefficient i, j est 1, et les autres sont nuls. Alors l'espace des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n a pour base les matrices E_{ij} avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Sa dimension est donc $n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 7.15 Soit $f_1, \ldots, f_p$ une base de F et $g_1, \ldots, g_q$ une base de G.

Supposons que F, G soient des sous-espaces supplémentaires dans E. Alors tout vecteur e de E est une somme $f+g$; comme f est une combinaison linéaire des f_i et g une combinaison linéaire des g_j, e est une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$. Donc ces $p + q$ vecteurs engendrent E. Ils sont aussi linéairement indépendants : en effet, si $\sum_i a_if_i + \sum_j b_jg_j = 0$, alors $\sum_i a_if_i = \sum_j(-b_j)g_j$; le membre gauche est dans F et le membre droit dans G ; donc ils sont nuls tous deux ; comme les f_i sont linéairement indépendants, de même que les g_j, on déduit que tous les coefficients a_i et b_j sont nuls. Conclusion : $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$ est une base de E.

Réciproquement, ...

Exercice 7.16 Tout polynôme s'écrit de manière unique comme une

somme $P+Q$, où P (resp. Q) est une combinaison linéaire de monômes x^n avec n multiple de 3 (resp. avec n pas multiple de 3).

Exercice 7.17 La dimension de G est 2, d'après l'exercice 7.15. Montrons que $u+f', v+f'$ sont linéairement indépendants : si $a(u+f')+b(v+f')=0$, alors $au+bv=-(a+b)f'$; le membre gauche est dans G et le droit dans F ; comme ces espaces sont supplémentaires, les deux membres doivent être nuls, et il s'ensuit que $a=b=0$, car u, v sont linéairement indépendants. Conclusion : $u+f', v+f'$ forment une base de G', qui est donc de dimension 2.

Soit $e \in E$. Alors $e=f+g$, $f \in F, g \in G$; de plus, $g=au+bv$, donc $e=(f-af'-bf')+(a(u+f')+b(v+f'))$. Le premier terme est dans F est le second dans G' ; donc $E=F+G'$. Soit maintenant un $e \in F \cap G'$; alors $e=f=a(u+f')+b(v+f')$; donc $f-af'-bf'=au+bv$; le membre gauche est dans F et celui de droite dans G ; donc ils sont nuls et l'on en tire que $a=b=0$ et enfin $e=0$. Conclusion : F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 7.18 La suite nulle est dans F. Si (a_n) et (b_n) sont dans F, alors leurs somme (a_n+b_n) aussi, car $a_{n+1}+b_{n+1}=aa_n+ab_n=a(a_n+b_n)$. De même, $\lambda(a_n)=(\lambda a_n)$ est dans F, car $\lambda a_{n+1}=\lambda a a_n=a(\lambda a_n)$.

Supposons $(a_n) \in F$. On $a_0=a^0a_0$. Supposons que $a_n=a^na_0$; alors $a_{n+1}=aa_n=aa^na_0=a^{n+1}a_0$.

L'espace F est de dimension1 : il a pour base la suite (a^n).

Exercice 7.19 Une base de ce sous-espace est formée par les deux suites (u_n) et (v_n), satisfaisant la récurrence considérée, et les conditions initiales : $u_0=1, u_1=0$, $v_0=0, v_1=1$.

Supposons que la suite $(1, r, r^2, r^3, \ldots)$ soit dans G ; en appliquant la récurrence, on trouve $r^2=ar+b$.

Exercice 8.8 a) La matrice réduite-échelonnée N associée est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le système est $x+y=0$, $x=-y$ et $(x,y)=(-y,y)=y(-1,1)$. La base est $(-1,1)$ (Noyau de dimension 1).

b) $N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Système : $x+y+z=0$, $x=-y-z$; $(x,y,z)=(-y-z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$. Base : $(-1,1,0),(-1,0,1)$.

c) $N=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La suite comme en a).

d) $N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Système : $x+y=0, z=0$. De manière

équivalente : $x = -y, z = 0$. $(x, y, z) = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$. Base : $(-1, 1, 0)$.

Exercice 8.9 Si $(a, a + b, b, a - b) = 0$ (c'est-à-dire $= (0, 0, 0, 0)$), alors $a = b = 0$. Le noyau est donc nul. La fonction est injective.

Exercice 8.10 Le dérivé du polynôme constant 1 est 0. La fonction "dérivation" n'est donc pas injective. Elle est surjective, car pour tout polynôme $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, il est le dérivé de $a_n x^{n+1}/(n + 1) + \cdots + a_1 x^2/2 + a_0 x$

Exercice 8.11 Si a est un scalaire, il est la trace de la matrice $(a/n)I_n$.

Exercice **??** Soit u cette fonction. On a $u(x, y) = x+y$. Elle est surjective car tout vecteur dans E est somme d'un vecteur dans F et d'un vecteur dans G. Si $(x, y) \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $x+y = 0$; comme $0+0 = 0$ et que les espaces sont supplmentaires, on doit avoir, par unicité, $x = 0 = y$. Donc u est injective.

Exercice 8.12 Supposons que f envoie toute famille de vecteurs linéairement indépendants sur une famille de vecteurs linéairement indépendants. Si $e \in \mathrm{Ker}(f)$, alors e doit être nul, sinon e est non nul, il est linéairement indépendant, mais son image n'est pas linéairement indépendant. Conclusion : f est injectif.

Supposons que f envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice. Si $v \in F$, nous pouvons écrire $v = \sum a_i f(e_i)$, où $e_1, \ldots, e_n$ engendrent E. Donc $v = f(\sum a_i e_i)$ et f est surjective.

Exercice 8.13 $((1, 0, 1), (2, -1, 1))$.

Exercice 8.14 $g(e_1) = (1, 2, 3)$, $g(e_2) = (0, 1, 0)$, $g((1, 1)) = (1, 3, 3)$.

Exercice 8.15 $n = 2$; $np = k$; $np = n'p'$.

Exercice 8.16 6

Exercice 8.17 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cas général : soit $v = (x, y)$; alors $v = xe_1 + ye_2$, donc $f(v) = xf(e_1) + yf(e_2) = x(1, 0, 1) + y(2, -1, 1) = (x, 0, x) + (2y, -y, y) = (x + 2y, -y, x + y)$. Par ailleurs

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.18 $p = 2, n = 3$; $f(e_1) = (1, 3, 5), f(e_2) = (2, 4, 6)$; $f((-1, 1)) = f(-e_1 + e_2) = -f(e_1) + f(e_2) = -(1, 3, 5) + (2, 4, 6) = (1, 1, 1)$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.19 Soit $v = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$. Alors v est dans le noyau de f si et seulement si $Mv = 0$. Ceci signifie que pour tout i, on a $\sum_j m_{ij} = 0$.

Exercice 8.20 $Y = MX$ est équivalent à $y = \alpha(x)$, où x, y sont représentés pas les matrices-colonnes X, Y. Il y a une solution unique si et seulement si α est un isomorphisme.

Exercice 8.21 Notons pour commencer que la matrice de la fonction identité dans une base donnée de V est la matrice identité. Et réciproquement : si la matrice d'un endomorphisme de V dand une base de V est la matrice identité, alors cet endomporphisme est la fonction identité.

Si f est bijective, la fonction réciproque g de V dans V est aussi une application linéaire. Soit P la matrice de g dans la même base. La matrice de $g \circ f$ est donc PM, par le Corollaire 8.6. Mais $g \circ f$ est la fonction identité de V, donc sa matrice est la matrice identité I. Donc $PM = I$. De manière analogue, $MP = I$.

Réciproquement, si M est inversible, soit P son inverse. Soit g l'endomorphisme de V dont la matrice (toujours dans la même base) est P : g existe par la Proposition 8.9. Alors la matrice de $g \circ f$ est $PM = I$; donc $g \circ f$ est la fonction identité. De manière analogue, $f \circ g = id_V$. Donc f a une fonction réciproque : c'est donc une bijection.

Exercice 9.1 f n'a pas la valeur propre 0 car f est injective. Si $f(v) = \lambda v$, alors $f^{-1}(\lambda v) = v$, donc $\lambda^{-1} v = \lambda^{-1} f^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}\lambda f^{-1}(v) = f^{-1}(v)$.

Exercice 9.2 On a $D(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$.

Exercice 9.3 Soit (a_{ij}) la matrice de f dans cette base. On a donc $f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$. Donc $f(\sum_j v_j) = \sum_j f(v_j) = \sum_j \sum_i a_{ij} v_i = \sum_i \sum_j a_{ij} v_i = \sum_i (\sum_j a_{ij}) v_i$. Donc $\sum_j v_j$ est vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si cette dernière somme est égale, quel que soit j, à $\sum_j v_j$. Comme les v_j forment une base de V, ceci est équivalent à : quel que soit i, $\sum_j a_{ij} = 1$, ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 10.2 Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}$, $C = A^t B = (c_{ik})$; cette dernière matrice est de taille $n \times n$. Alors $c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq p} a_{ij} b_{kj}$ et par suite $\mathrm{Tr}(A^t B) = \sum_{1 \leq i \leq n} c_{ii} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij} b_{ij}$. Cet exercice se traite donc de manière analogue à l'exemple 10.1.

Exercice 10.16 On a $N(v) = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0$. De plus $N(0) = 0$ et si $N(u) = u$, alors $\langle u, u \rangle = 0$, donc $u = 0$. On a encore $\langle au, au \rangle = a^2 \langle u, u \rangle$, donc $(au) = \sqrt{a^2 \langle u, u \rangle} = \sqrt{a^2}\sqrt{\langle u, u \rangle} = |a| N(u)$. On a enfin $N(u+v)^2 = \langle u + v, u+v \rangle^2 = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$ et $(N(u)+N(v))^2 = (\sqrt{\langle u, u \rangle} + \sqrt{\langle v, v \rangle})^2 = N(u) + N(v) + 2\sqrt{\langle u, u \rangle}\sqrt{\langle v, v \rangle}$, donc l'inégalité $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ découle de l'exercice précédent.

Exercice 10.17 On a $d(u, v) = N(u - v) \geq 0$. Si $d(u, v) = 0$, alors $N(u -$

$v) = 0$, donc $u - v = 0$ et $u = v$. De plus $d(u,u) = N(u-u) = N(0) = 0$. De plus $d(u,w) = N(u-v+v-w) \leq N(u-v) + N(v-w) = d(u,v) + d(v,w)$.

Exercice 11.1 $x = 4 - 2y$, donc $3(4-2y) + 7y = 2$, donc $y = -10$ et enfin $x = 24$. Il y a une solution unique.

Exercice 11.2 $x = 1 + y + z$. Donc $2 + 2y + 2z + 3y - 2z = 7$ et $3 + 3y + 3z + 2y - 3z = 8$; c'est-à-dire $5y = 5$ (les deux équations donnent la même chose). Solution : z est une variable libre et on a $y = 1, x = 2 + z$.

Exercice 11.3 $a = 1 + b - c$. Donc $2 + 2b - 2c + 3b + 4c = 4$ et $3 + 3b - 3c + 2b + 5c = 8$; c'est-à-dire $5b + 2c = 2$ et $5b + 2c = 2$. Pas de solution.

Exercice 11.4 $i = -j - k - l$. Donc $-j - k - l + j + k - l = 4$, $-j - k - l + j - k + l = -4$, et $-j - k - l - j + k + l = 2$. Donc $-2l = 4$, $-2k = -4$, $-2j = 2$. Donc $l = -1, k = 2, j = -1$. Enfin $i = 1$. Solution unique.

Exercice 12.1 $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

Exercice 12.2 Prendre $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 12.3 0

Exercice 12.4 Faire le calcul pour $n = 0, 1, 2, 3$ et puis montrer que la puissance n-ème ne dépend que du reste de la division entière de n par 4.

Exercice 12.5 3^{n-1}.

Exercice 12.9 b) La trace de I est non nulle.

Exercice 12.13 Récurrence sur n. Pour le contre-exemple, on peut prendre $n = 2$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 12.14 Si C est un inverse à droite de AB, alors $ABC = I$ et donc BC est un inverse à droite de A.

Exercice 12.15 Comme $BA = 0$, on obtient en multipliant à droite par l'inverse à droite C de A : $BAC = 0C = 0$; donc $BI = 0$ et enfin $B = 0$.

Exercice 12.16 b) L'inverse est $R(-t)$.

Exercice 12.17 $AB = BA$ implique par multiplication à gauche et à droite par B^{-1} : $B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1}$. Ceci implique $B^{-1}AI = IAB^{-1}$ et enfin $B^{-1}A = AB^{-1}$. Donc A et B^{-1} commutent. Pour montrer que A^{-1} et B^{-1} commutent, on multiplie la dernière égalité à gauche et à droite par A^{-1}.

Exercice 12.18 a) $(I+A^{-1})A(I+A)^{-1} = (A+I)(I+A)^{-1} = I$. Le produit de l'autre côté est analogue et donne aussi I. b) $(I + A^{-1})^{-1} + (I + A)^{-1} = A(I + A)^{-1} + (I + A)^{-1} = (A + I)(I + A)^{-1} = I$.

Exercice 12.19 On a $0 = A - A^2 = A(I - A)$. Si $I - A$ était inversible, on obtient $A = 0$ en multipliant à droite par l'inverse de $I - A$.

Exercice 12.20 On vérifie que $J^2 = J$. Donc $(I - J)J = J - J^2 = 0$. Si J était inversible, on aurait $I - J = 0$, ce qui n'est pas. Si $I - J$ était inversible, on aurait $J = 0$, ce qui n'est pas.

Exercice 12.21 On a $A = P.P^{-1}A$ et par suite $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP$, en utilisant que $\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(CB)$.

Exercice 12.22 $(I + rA)(I + sA) = I + (r + s + rs)A$. Si $r \neq -1$, soit $s = \frac{-r}{r+1}$. Alors $r + s + rs = 1$, donc $I + sA$ est l'inverse de $I + rA$. Cas où $r = -1$: $I - A$ n'est pas inversible, voir exercice refA2=A.

Exercice 12.23

Exercice 12.23 Montrons que $M := Q[A, B]$ est égal à $[QA, QB]$. NB : Q, A, B sont de taille $n \times n$ et $[A, B]$ est de taille $n \times 2n$. Supposons $k \leq n$; alors le coefficient j, k de $[A, B]$ est a_{jk} ; donc $m_{ik} = \sum_j q_{ij}a_{jk} = (QA)_{ik}$, qui est égal au coefficient i, k de QA. Supposons $k > n$; alors le coefficient j, k de $= [A, B]$ est $b_{j,k-n}$; alors $m_{ik} = \sum_j q_{ij}b_{j,k-n} = (QB)_{i,k-n}$, qui est égal au coefficient i, k de $[QA, QB]$.

Supposons que $[A, I]$ soit transformé en $[B, P]$. Il existe alors une matrice inversible (car produit de matrices élémentaires) Q telle que $[B, P] = Q[A, I]$. Donc $B = QA$ et $P = Q$. Donc $B = PA$.

Exercice 12.24 Pour (ii), on utilise le fait qu'on peut inverser les opérations de lignes.

Exercice 12.25 Montrons que $C = C'$: en effet C s'obtient en ajoutant à la ligne i la ligne j multipliée par a, puis la ligne k multipliée par b. De plus, C' s'obtient en ajoutant à la ligne i la ligne k multipliée par b, puis la ligne j multipliée par a. Notons L_i la ligne i de A. Dans les deux cas, on obtient la matrice obtenue à partir de A en y remplaçant la ligne L_i par $L_i + aL_j + bL_k$.

Soient P, Q les matrices élémentaires correspondant aux opérations $l_i + al_j$, l_+bl_k respectivement. Alors $B = PA, C = QB, B' = QA, C' = PB'$. Donc $C = QPA$ et $C' = PQA$. Comme $C = C'$, et qu'on peut choisir $A = I$, on obtient $QP = PQ$.

Exercice 13.2 Si les deux vecteurs sont nuls, les trois déterminants sont sûrement nuls. Supposons que v est un multiple scalaire de v' ; alors dans chacune de ces trois matrices, la première ligne est un multiple scalaire de la deuxième ; son déterminant est donc nul. Conclusion : si v, v' sont linéairement dépendants, alors les trois déterminants sont nuls

Réciproquement, supposons que ces trois déterminants soient nuls. Si $v = v' = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que v' soit non nul, et sans restreindre la généralité, que $a' \neq 0$; on peut même supposer que $a' = 1$. Alors $b = ab', c = ac'$, donc $v = a(1, b', c') = av'$ et les deux vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 13.3 L'inverse de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{bmatrix}$ où $D = ad - bc$.

Références

[1] [A] L. Amyotte, Introduction à l'algbre linéaire et à ses applications, 4ème édition, Pearson ERPI Sciences 2018. 3

[2] [CP] G. Charron, P. Parent, Mathématique 105, Algèbre linéaire et vectorielle : géométrie. 3

[3] [LR] J. Labelle, C. Reutenauer, cours d'algèbre 1, UQAM. http ://www.lacim.uqam.ca/ christo/cours.html 3

[4] [L] P. Leroux, Algèbre linéaire, une approche matricielle, Modulo, 1978.

[5] [LM] F. Liret, D. Martinais, Algèbre 1ère année, Dunod, 2003.

Index