

Analyse 1

UQÀM MAT1130

Christophe Reutenauer et Frédéric Rochon
Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

25 septembre 2026

Table des matières

1	Introduction	3
2	Les nombres réels	3
2.1	Addition et multiplication	4
2.2	L'ordre des nombre réels	4
2.3	Le théorème du supremum	6
2.4	Rationnels et réels	8
2.5	La valeur absolue	9
2.6	$\mathbb{R}$ est archimédien	10
2.7	Partie entière	11
2.8	Densité des rationnels et des irrationnels	12
2.9	Les intervalles	12
3	Les suites	13
3.1	Notations pour les suites	13
3.2	Limites	14
3.3	Unicité de la limite	15
3.4	Suites constantes	15
3.5	Suites bornées	15
3.6	Passage à la limite des inégalités larges	16
3.7	Opérations sur les suites et les limites	16
3.8	Théorème des gendarmes	18
3.9	Limites infinies	19
3.10	Opérations sur les suites (suite)	19
3.11	Exemples	20

3.12	Suites équivalentes	22
3.13	Suites monotones	22
3.14	Sous-suites	25
3.15	Théorème de Bolzano-Weierstrass	27
3.16	Densité et suites	28
3.17	Suites de Cauchy	29
3.18	Limites supérieures et limites inférieures*	30
4	Les séries	30
4.1	Convergence d'une série et exemples	30
4.2	Séries à termes positifs	32
4.3	Critère de Cauchy	36
4.4	Opérations sur les séries	37
4.5	Associativité de la somme infinie	37
4.6	Convergences absolue et conditionnelle	38
4.7	Séries alternées	40
4.8	Réarrangements de séries	41
5	Limites de fonctions et continuité	43
5.1	Fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	43
5.2	Limite d'une fonction en un point	43
5.3	Limite à gauche et à droite	45
5.4	Limites en l'infini	46
5.5	Limites infinies	46
5.6	Opérations sur les limites	46
5.7	Théorème des gendarmes	47
5.8	Continuité	47
5.9	Opérations sur les fonctions continues	48
5.10	Maximum et minimum	49
5.11	Théorème des valeurs intermédiaires	50
5.12	Continuité uniforme	51
5.13	Fonction réciproque	53
6	La dérivée	54
6.1	Dérivée d'une fonction en un point	54
6.2	Tangente	55
6.3	La dérivabilité implique la continuité	55
6.4	Opération sur les fonctions dérivables	55
6.5	Fonction réciproque	57
6.6	Extrema	58

6.7	Théorème de Rolle	58
6.8	Théorème des accroissements finis	59
6.9	Théorème de la moyenne de Cauchy	60
6.10	Formule de Taylor avec reste de Lagrange	60
6.11	Règle de l'Hôpital	61
7	Topologie de $\mathbb{R}$	62
7.1	Ouverts	62
7.2	Fermés	63
7.3	Adhérence et frontière	64
7.4	Compacts	65
7.5	Théorème de Heine-Borel	66
8	Solutionnaire (esquisses)	67

1 Introduction

On désigne par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (≥ 0 ou ≤ 0), et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{p/q, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. On note $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ ces mêmes ensembles privés de 0.

Il y a beaucoup d'exercices à la fin de chaque section, qui se rapportent à elle. Certains sont marqués d'une étoile, et sont plus difficiles. Le solutionnaire à la fin donne, au moins, une esquisse de solution pour chaque exercice.

Remerciements : Marie-Ève Martel, pour quelques coquilles. Antoine Abram, pour m'avoir communiqué le joli exercice 83 et sa solution.

2 Les nombres réels

La construction mathématique des nombres réels, à partir des nombres rationnels¹, est plutôt longue et compliquée. Nous donnerons seulement les propriétés principales des nombres réels : les opérations et l'ordre ($x \leq y$), déjà connus des étudiants, puisqu'ils les manipulent au secondaire et au cégep ; et le théorème du supremum (auss appelé axiome de complétude), qui devrait être nouveau, mais constitue un des fondements de toutes les démonstrations sur les nombres réels, les suites et les fonctions.

1. Les nombres rationnels, eux, sont construits plus facilement, à partir des entiers, en considérant les fractions d'entiers.

2.1 Addition et multiplication

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Il possède une *addition*, notée $a + b$, et une *multiplication*, notée $a \cdot b$ (pour tous les réels a, b).

- L'addition est *commutative*, c'est-à-dire : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$.
- La multiplication est *commutative*, c'est-à-dire : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$.
- L'addition est *associative*, c'est-à-dire : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
- La multiplication est *associative*, c'est-à-dire : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition, c'est-à-dire : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
- L'addition et la multiplication possèdent des éléments neutres, respectivement notés 0 et 1, c'est-à-dire qu'on a : $0 + a = a = a + 0$ et $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- Chaque $a \in \mathbb{R}$ a un *opposé*, noté $-a$, et on a $a + (-a) = 0$; et chaque $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ a un *inverse*, noté a^{-1} et on a $a \cdot a^{-1} = 1$.

Conventions de notations et de priorités d'opérations On écrit xy au lieu de $x \cdot y$. De plus, par convention, la multiplication a priorité sur l'addition; on peut donc omettre certaines parenthèses. Par exemple, on écrit $ab + ac$ pour $(a \cdot b) + (a \cdot c)$.

De plus, grâce à l'associativité, on peut écrire, par exemple, $a + b + c$ (qui désigne à la fois $(a + b) + c$ et $a + (b + c)$), et abc .

Règle des signes : $x(-y) = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$.

Loi des exposants Si n est un entier naturel, et x un réel, on écrit x^n pour $xx \cdots x$, avec n facteurs x . Cas particulier : $x^1 = x$, et par convention, $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. Si n est un entier avec $n < 0$, et $x \neq 0$, on note $x^n = (x^{-1})^{-n}$. Avec cette notation, on a les lois des exposants usuelles.

Égalité et opérations Une propriété importante de l'addition et de la multiplication est la suivante, utilisée constamment. Pour tous réels x, y, a

$$x = y \Rightarrow x + a = y + a, xa = ya.$$

Exercice 1. La soustraction est-elle commutative ? associative ? A-t-elle un élément neutre ?

2.2 L'ordre des nombre réels

L'ordre des nombres réels est la relation $x \leq y$, qui se lit “ x est inférieur ou égal à y ”, ou aussi “ x est plus petit ou égal à y ”.

On a les trois propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$;
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$.

On dit que la relation $\leq$ est *réflexive*, *anti-symétrique* et *transitive* . De plus, $\leq$ est un ordre *total*, ce qui signifie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

On écrit $a < b$ pour dire que : $a \leq b$ et $a \neq b$. On écrit aussi $b > a$ pour dire $a < b$, et $b \geq a$ pour exprimer que $a \leq b$. L'inégalité $a < b$ est dite *stricte*, tandis que l'inégalité $a \leq b$ est dite *large*.

Ordre et opérations On a

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow x + a < y + a \quad (1)$$

et

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x < y, a > 0 \Rightarrow xa < ya. \quad (2)$$

Autrement dit, on peut ajouter à une inégalité stricte une même quantité de chaque côté ; et on peut multiplier de chaque côté par un nombre, à condition que celui-ci soit strictement positif. Quant à la multiplication par un nombre strictement négatif, elle *renverse* l'inégalité, c'est-à-dire

$$\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x < y, a < 0 \Rightarrow xa > ya. \quad (3)$$

Dans les exercices qui suivent, on doit prouver les assertions en utilisant seulement les propriétés des nombres réels rappelées ci-dessus.

Exercice 2. Montrer que (3) peut se déduire de (1) et (2).

Exercice 3. Prouver que

- $x^2 > 0$.
- $1 > 0$.
- $x > 0$ implique $x^{-1} > 0$.
- Montrer que $x \leq y$ implique $x + a \leq y + a$
- Montrer que $x \leq y$ et $a \geq 0$ implique $xa \leq ya$.
- Montrer que $x \leq y$ et $a \leq 0$ implique $xa \geq ya$.

Exercice 4. Montrer que :

- $a < b \leq c$ implique $a < c$.
- $x < y$ et $x' \leq y'$ implique $x + x' < y + y'$.
- $x \leq y$ et $x' \leq y'$ implique $x + x' \leq y + y'$.
- $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$ implique $ac < bd$.
- $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ implique $ac \leq bd$.

Montrer que les deux dernières implications ne sont pas vraies en général si on ne suppose pas que a et c soient ≥ 0 .

Exercice 5. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels ≥ 0 ($n \geq 1$). Montrer que si leur somme est nulle, alors ils sont tous nuls.

2.3 Le théorème du supremum

Définition 2.1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A a un maximum, ou un plus grand élément, s'il y a dans A un élément a tel que : $\forall x \in A, x \leq a$; alors a est appelé le maximum de A , et aussi le plus grand élément de A .

En fait, pour que la dernière phrase dans cette définition soit correcte, il faut vérifier que si le maximum existe, alors il est unique : si a, b sont des maximums (maxima pour les puristes) de A , alors, en appliquant la définition de maximum, on trouve : $b \leq a$ et $a \leq b$; par anti-symétrie, on a alors $a = b$.

On définit symétriquement *minimum*, ou *plus petit élément*. Notation : $\max(A)$ et $\min(A)$.

Définition 2.2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Une borne supérieure de A est un élément x de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A, a \leq x$.

On définit aussi *borne inférieure*.

On remarque que si A a un maximum, alors celui-ci est une borne supérieure de A : en effet, soit m le maximum de A ; alors par définition, $\forall a \in A, a \leq m$; donc m est une borne supérieure de A .

Définition 2.3. On considère l'ensemble A' des bornes supérieures de A ; si cet ensemble A' a un minimum, on l'appelle le supremum de A dans E , noté $\sup(A)$.

On remarque que si le supremum de A existe, alors il est unique. En effet, le supremum de A est le minimum de A' , donc il est unique.

On définit symétriquement l'*infimum* de A , noté $\inf(A)$: s'il existe, c'est le maximum des bornes inférieures de A .

On remarque que si A a un maximum, celui-ci est le supremum de A : en effet, soit m le maximum de A , et soit M une borne supérieure de A ; on sait déjà que m est une borne supérieure de A , et on a $m \in A$, donc $m \leq M$; donc m est la plus petite borne supérieure de A .

Remarque sur la terminologie Ce qu'on appelle ici borne supérieure (resp. borne inférieure) est appelé en France *majorant* (resp. *minorant*). Et

ce qu'on appelle ici supremum (resp. infimum) est appelé en France *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*). Donc, attention aux confusions possibles.

La terminologie anglaise est respectivement : upper bound, lower bound, least upper bound (ou supremum), largest lower bound (ou infimum).

La notation est cependant uniforme : $\sup(A)$ et $\inf(A)$ pour le supremum et l'infimum.

Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est la suivante, qu'on appelle *théorème du supremum*.

Théorème 2.4. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, qui a une borne supérieure, a un supremum.*

On a aussi le *théorème de l'infimum*, que l'on peut déduire du précédent.

Théorème 2.5. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, qui a une borne inférieure, a un infimum.*

Exercice 6. *Montrer que si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ a un maximum, alors il est non vide. En déduire que si un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ a un supremum, alors il a une borne supérieure.*

Exercice 7. *Vrai ou faux : tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ borné supérieurement a un maximum.*

Exercice 8. *Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui a un infimum et un supremum, mais pas de maximum, ni de minimum.*

Exercice 9. *Déterminer, s'ils existent, le maximum, le minimum, l'infimum et le supremum de l'ensemble $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.*

Exercice 10. *Déterminer, s'ils existent, le supremum et l'infimum des ensembles suivants :*

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Indication : faire la liste des éléments de A et B.

Exercice 11. *Soient A, B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ d'intersection non vide. On suppose que B a une borne supérieure et que A a une borne inférieure. Montrer que $\inf(A) \leq \sup(B)$.*

Exercice 12. *Soient A et B deux sous-ensembles non vides et bornés inférieurement de $\mathbb{R}$.*

1. Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que $\inf(A \cap B)$ existe et que $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.
2. Trouver deux ensembles A et B tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et $\inf(A \cap B) > \max\{\inf A, \inf B\}$.

Exercice 13. Soient A et B des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$, on a que $x \leq y$.

1. Montrer que $\sup A$ existe et que $\sup A \leq y \forall y \in B$.
2. Montrer que $\inf B$ existe et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 14. Soient A, B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ d'intersection non vide. On suppose que $\inf(A)$ et $\sup(B)$ existent. Montrer que $\inf(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 15. Déterminer, s'ils existent, le supremum et l'infimum de l'ensemble

$$E = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q - 1| < 2\}.$$

2.4 Rationnels et réels

Théorème 2.6. $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ strictement.

Démonstration. 1. On montre qu'il y a une fonction injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Elle envoie tout entier naturel n sur $1 + 1 + \dots + 1$ (n fois). La preuve est esquissée dans l'exercice 17.

2. On prouvera plus loin, indépendamment, qu'il existe dans $\mathbb{R}$ un élément dont le carré est 2 ; c'est une application facile du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 5.18).

3. Il n'existe pas dans $\mathbb{Q}$ un élément dont le carré est 2 (*).

Commençons par vérifier que si un nombre entier est impair², son carré aussi. En effet, si n est entier, $(2n + 1)^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. La contraposée est que si le carré d'un entier est pair, celui-ci l'est aussi.

Maintenant, nous prouvons que si x est rationnel et $x^2 = 2$, alors on aboutit à une contradiction. Le principe du raisonnement par l'absurde nous permet alors de conclure à la véracité de (*). Comme x est rationnel, on a $x = p/q$ où p, q sont des entiers non nuls. On peut supposer sans perte de généralité qu'ils ne sont pas pairs tous les deux. On a $2 = x^2 = p^2/q^2$, donc $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2r$, r entier. Alors $4r^2 = p^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2r^2$, donc q^2 pair, et q aussi. Il en découle que p, q sont tous deux pairs : c'est la contradiction cherchée. $\square$

2. Mais c'est quoi, un nombre pair, ou impair ? Par définition, un nombre pair est le double d'un nombre entier, donc de la forme $2n$, $n \in \mathbb{Z}$; et un nombre impair est un nombre de la forme $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

On note $\sqrt{2}$ le réel positif dont le carré est 2. Il existe !

Exercice 16. Montrer que $r + \sqrt{2}$ n'est pas rationnel, que que soit le rationnel r .

Exercice 17. Montrer que la fonction $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie n sur $i(n) = 1 + 1 + \dots + 1$ (n fois) est injective. Etendre cette fonction à $\mathbb{Z}$ par $-n \mapsto -i(n)$, si $n \in \mathbb{N}$, et montrer que la fonction $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi obtenue est encore injective ; on la note aussi i . On étend maintenant la fonction i à $\mathbb{Q}$ en posant $i(p/q) = i(p)i(q)^{-1}$. Montrer qu'on obtient ainsi une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

2.5 La valeur absolue

Définition 2.7. La valeur absolue d'un réel x , notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Théorème 2.8. Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$ avec $a \geq 0$.

- (o) $|0| = 0$.
- (i) $|x| \geq 0$.
- (ii) $x = 0$ si et seulement si $|x| = 0$.
- (iii) $|-x| = |x|$.
- (iv) $-|x| \leq x \leq |x|$.
- (v) $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.
- (vi) (inégalité du triangle) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- (vii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
- (viii) $|xy| = |x||y|$.

Démonstration. (o) découle directement de la définition de la valeur absolue.

(i) Si $x \geq 0$, c'est clair. Si $x < 0$, alors $-x > 0$, donc c'est clair aussi.

(ii) Si $|x| = 0$, alors on ne peut avoir $x < 0$ (sinon $|x| = -x > 0$), donc $x \geq 0$, et $x = |x| = 0$.

(iii) C'est clair si $x = 0$. Si $x \neq 0$, on applique la définition de la valeur absolue, sachant que : $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$, et : $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$.

(iv) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$; donc $-|x| \leq 0 \leq x \leq |x|$. Si $x < 0$, alors on applique ce qu'on vient de voir à $-x$: $-|-x| \leq -x \leq |-x|$; donc $-|x| \leq -x \leq |x|$; en multipliant par -1, ce qui renverse les inégalités, on obtient $|x| \geq x \geq -|x|$.

(v) Si $|x| \leq a$, alors $-a \leq -|x|$, et (iv) implique $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Réciproquement, si $-a \leq x \leq a$, alors : soit $x \geq 0$, $x = |x|$, et donc $|x| \leq a$; soit $x < 0$, $|x| = -x$, et $a \geq -x = |x|$.

(vi) On a $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, donc $x + y \leq |x| + |y|$. En appliquant ceci à $-x$ et $-y$, on trouve $-x - y \leq |x| + |y|$, donc $-(|x| + |y|) \leq x + y$. Par (v), on en tire l'inégalité du triangle.

(vii) Par (v), on a $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. Symétriquement (on échange x et y), on a $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Donc $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$. Donc par (v), on obtient (vii).

(viii) C'est une conséquence de la définition de la valeur absolue et de la règle des signes (il y a plusieurs cas). $\square$

Exercice 18. Montrer que $|x| = \max\{x, -x\}$.

Exercice 19. Montrer que le maximum de x, y est égal à la moitié de $x + y + |x - y|$.

Exercice 20. (inégalité du triangle généralisée) Montrer que $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Exercice 21. Un ensemble de réels est dit borné s'il a une borne supérieure et une borne inférieure. On suppose que E est une partie de $\mathbb{R}$ et que l'ensemble $\{|x|, x \in E\}$ est borné. Est-ce que E est borné ? Et la réciproque ?

Exercice 22. Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique que $\left| \frac{2n}{2n+3} - 1 \right| < \frac{1}{327}$.

2.6 $\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème 2.9. Pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel $n > x$. De manière équivalente, pour tous réels x et a , avec $a > 0$, il existe un entier naturel n tel que $na > x$.

Dire que $\mathbb{R}$ est archimédien exprime que $\mathbb{R}$ satisfait à l'énoncé précédent. Cette propriété s'exprime par le dicton "les petits ruisseaux font les grandes rivières".

Démonstration. 1. Supposons par l'absurde que n n'existe pas. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$. Donc x est une borne supérieure de $\mathbb{N}$, lequel a donc un supremum M par l'axiome de complétude. Alors $M - 1$ n'est pas une borne supérieure

de $\mathbb{N}$, et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M - 1 < n$. Alors $M < n + 1 \in \mathbb{N}$, et M n'est pas une borne supérieure de $\mathbb{N}$: contradiction.

2. Soit x, a comme dans l'énoncé. Par la première partie, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x/a$. Alors $na > x$. Réciproquement, si la deuxième assertion du théorème est vraie, la première aussi : prendre $a = 1$. $\square$

Corollaire 2.10. *Si un réel a satisfait : $\forall \epsilon > 0, |a| \leq \epsilon$, alors $a = 0$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque et non nul ; alors $1/n > 0$. L'hypothèse implique que $|a| < 1/n$, donc $n|a| < 1$.

Supposons par l'absurde que $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$, par le théorème 2.8, (i) et (ii). Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|a| > 1$; n est alors non nul : on obtient une contradiction avec le paragraphe précédent. $\square$

Exercice 23. *En utilisant la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$.*

Exercice 24. *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ des nombres tels que $x \leq y \leq x + \frac{z}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x = y$.*

2.7 Partie entière

Théorème 2.11. *Pour tout réel x , il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.*

L'entier n est appelé *partie entière* de x et noté $\lfloor x \rfloor$ (ou aussi $[x]$).

Démonstration. Par le théorème 2.9, on sait qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|x| \leq p$. Alors $-p \leq x \leq p$ (Théorème 2.8 (iv)). Par l'exercice 25, il existe deux entiers consécutifs, disons n et $n + 1$ tels que $n \leq x < n + 1$.

Supposons maintenant qu'il existe deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq x < m + 1$ et $n \leq x < n + 1$. Alors $m \leq x < n + 1$ et $n \leq x < m + 1$. Donc $m < n + 1$ et $n < m + 1$. Donc $n - 1 < m < n + 1$, et forcément $m = n$. $\square$

Exercice 25. *Soit $m \leq p$ des entiers. Montrer que si un réel x satisfait $m \leq x \leq p$, alors il existe un entier n tel que $n \leq x < n + 1$. Indication : récurrence sur $k = p - m$.*

Exercice 26. *Montrer que pour tout réels a, b , avec $b > 0$, il existe un unique entier q et un unique réel r tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Indication : prendre $q = \lfloor a/b \rfloor$. Montrer que si a, b sont entiers, r aussi.*

2.8 Densité des rationnels et des irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre réel qui n'est pas rationnel. Par exemple, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Théorème 2.12. *Pour tous réels, a, b tels que $a < b$ il existe un rationnel r et un irrationnel i tels que $a < r < b$ et $a < i < b$.*

Démonstration. Par le théorème 2.9, il existe un entier naturel n tel que $n > \frac{1}{b-a}$. On peut supposer $n \neq 0$. Donc $b - a > \frac{1}{n}$.

Par le théorème 2.11, il existe aussi un entier m tel que $m - 1 \leq na < m$; donc $na < m \leq na + 1$. En divisant ces deux inégalités par n , on en déduit $a < m/n \leq a + 1/n < a + b - a = b$.

Par ce qu'on vient de prouver, il existe un rationnel r tel que $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$. Alors $a < r + \sqrt{2} < b$. On peut conclure, car $r + \sqrt{2}$ est irrationnel (sinon $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ serait rationnel). $\square$

Corollaire 2.13. *Soient a, b des réels tels que $a < b$. Il existe une infinité de rationnels, et une infinité d'irrationnels, entre a et b .*

Démonstration. Il existe un rationnel r_1 tel que $a < r_1 < b$. Puis il existe un rationnel r_2 tel que $r_1 < r_2 < b$. On construit ainsi pour tout n , des rationnels $r_1 < r_2 < \dots < r_n$, compris entre a et b .

Preuve analogue pour les irrationnels. $\square$

2.9 Les intervalles

On va définir huit types de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, appelés des *intervalles*.

Pour des réels $a \leq b$, on note

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, [a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, (a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

Si $a = b$, on a $[a, b] = \{a\}$, et les trois autres intervalles sont vides. La *longueur* de chacun de ces intervalles est $b - a$. Notez que $\emptyset$ et que les singletons sont des intervalles de longueur 0.

Ces intervalles sont appelés *intervalles finis*. On définit encore, pour a et b réels,

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, a < x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}.$$

Enfin, il y a aussi

$$(-\infty, \infty),$$

qui n'est autre que $\mathbb{R}$. Ces cinq intervalles sont appelés *intervalles infinis*.

Autre notation : $]a, b[$ pour (a, b) etc...

Exercice 27. * Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x < y < z$ et $x, z \in I$, on a $y \in I$.

Exercice 28. Déterminer l'ensemble des nombres réels satisfaisant aux relations suivantes :

1. $|x - 2| > 3$,
2. $|x| + |x - 1| > 1$.

Indication : écrire chacun de ces deux ensembles comme une réunion d'intervalles.

3 Les suites

3.1 Notations pour les suites

Définition 3.1. Une suite numérique (ou simplement suite) est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

La notation standard pour une suite est $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$; elle désigne la fonction $n \mapsto f_n$. Par exemple, la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à la fonction $n \mapsto n$. Autre exemple : la suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. On écrit aussi $(f_n)_{n \geq 0}$, ou même (f_n) , en omettant donc l'indice $n \in \mathbb{N}$.

On appelle f_n le *terme de rang n* de la suite, ou *terme d'indice n* .

On a souvent besoin de suites qui commencent à 1, au lieu de 0. On écrira $(f_n)_{n \geq 1}$, ou $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Exemple : la suite $(1/n)_{n \geq 1}$. Ou même des suites qui commencent à 2, etc...

Exercice 29. Soit (a_n) une suite telle que $a_0 = 4, a_1 = 2$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+2} = \frac{4}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n.$$

Montrer que $a_n = 1 + 3(\frac{1}{3})^n$.

Exercice 30. Prouver la formule

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Limites

Convention Dans la définition qui suit, comme dans beaucoup d'autres, on écrit $\epsilon > 0$ pour signifier : $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ (donc $\epsilon \in \mathbb{R}$ est sous-entendu).

Définition 3.2. Soit (a_n) une suite. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est une limite de cette suite si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, |a_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers ℓ , ou aussi tend vers ℓ , ou encore qu'elle a la limite ℓ .

Si une suite a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle est convergente. Si elle n'en a pas, on dit que la suite est divergente.

Notation : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

On reformule souvent la définition mathématique de la limite, de manière plus littéraire : a_n tend vers ℓ si a_n est aussi proche qu'on veut de ℓ , pourvu que n soit assez grand. C'est assez imprécis, ça ne permet pas en général de faire des démonstrations rigoureuses, mais cela fait image.

On vérifie dans l'exercice 31 que la définition 3.2 est équivalente à celle qu'on obtient en remplaçant les deux dernières inégalités, ou l'une d'elles, par l'inégalité large. Mais pas la première, voir l'exercice 36.

Exercice 31. Montrer que (a_n) tend vers ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, |a_n - \ell| \leq \epsilon,$$

si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |a_n - \ell| < \epsilon,$$

si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |a_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Exercice 32. On suppose que la suite (x_n) a pour limite h ; on pose $y_n = x_n + 1$. Montrer que la suite (y_n) a pour limite $h + 1$.

Exercice 33. 1. On considère une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, |x_n| \leq \frac{1}{n}$. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, et l'exercice 23, que x_n tend vers 0.

2. On considère une suite (x_n) et un réel ℓ . Montrer que x_n tend vers ℓ si et seulement si $x_n - \ell$ tend vers 0.

Exercice 34. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exercice 35. Montrer que $\sqrt[n]{2}$ tend vers 1.

Exercice 36. Que peut-on dire si on remplace $\epsilon > 0$ par $\epsilon \geq 0$ dans la définition 3.2, ou dans une des trois conditions de l'exercice 31 ?

3.3 Unicité de la limite

Théorème 3.3. Si la suite (a_n) a pour limite ℓ , celle-ci est unique.

Démonstration. Supposons que (a_n) ait les limites ℓ_1, ℓ_2 . Soit $\epsilon > 0$, quelconque. Alors $\epsilon/2 > 0$. Il existe donc N_1, N_2 tels que pour $i = 1, 2$, $\forall n > N_i, |a_n - \ell_i| < \epsilon/2$. Choisissons $n > N_1, N_2$. On a alors par l'inégalité du triangle,

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

On applique alors le corollaire 2.10. □

3.4 Suites constantes

Une suite (x_n) est dite *constante* si tous les x_n sont égaux à un même nombre x . Elle dite *ultimement constante*, ou *constante à partir d'un certain rang* s'il existe un réel x , et un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $x_n = x$.

Proposition 3.4. Toute suite constante est ultimement constante. Toute suite ultimement constante tend vers x (avec les notations ci-dessus).

Démonstration. Prouvons la deuxième assertion, avec les notations ci-dessus. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\forall n > n_0$, on a $|x_n - x| = 0 < \epsilon$. □

Exercice 37. Montrer que si une suite convergente ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est ultimement constante.

3.5 Suites bornées

Définition 3.5. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq M$.

De manière équivalente, une suite est bornée si et seulement s'il existe A, B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $A \leq a_n \leq B$ (exercice 38).

Théorème 3.6. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (a_n) une suite ayant la limite ℓ . Comme $1 > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$, $|a_n - \ell| < 1$. On a alors $|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$. Posons $M = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |\ell|)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq M$. $\square$

Exercice 38. *Montrer qu'une suite est bornée si et seulement s'il existe A, B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $A \leq a_n \leq B$.*

Exercice 39. *On dit qu'une suite (a_n) a une borne supérieure (resp. inférieure) si l'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ en a une. Montrer que (a_n) est bornée si et seulement si elle a une borne supérieure et une borne inférieure.*

3.6 Passage à la limite des inégalités larges

Théorème 3.7. *On suppose que (x_n) a la limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si pour tout $n > n_0$, $x_n \geq a$ (resp. $x_n \leq a$), alors $\ell \geq a$ (resp. $\ell \leq a$).*

Démonstration. Supposons que $\forall n > n_0$, $x_n \geq a$. Par l'absurde, supposons $\ell < a$. Il existe N tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < a - \ell$. Prenons $n > \max(N, n_0)$. Alors $x_n - \ell < a - \ell$, donc $x_n < a$: contradiction. $\square$

On dit que "l'inégalité $x_n \geq a$ est passée à la limite", car la limite ℓ satisfait $\ell \geq a$.

Attention Ce ne sont que les inégalités larges qui passent à la limite, pas les inégalités strictes ; par exemple, la suite $(1/n)$ est > 0 , mais sa limite est $\ell = 0$ et ne satisfait pas $\ell > 0$.

3.7 Opérations sur les suites et les limites

La somme de deux suites (a_n) et (b_n) est la suite $(a_n + b_n)$. Le produit de deux suites (a_n) et (b_n) est la suite $(a_n b_n)$.

Théorème 3.8. *Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites, et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Alors :*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) = k a$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a b$;
- (iv) Si b_n est non nul pour tout n , et si b est non nul, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a / b$. En particulier $(1/b_n)$ tend vers $1/b$.

Lemme 3.9. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, alors il existe M et $\beta > 0$ tel que $\forall n > M, |b_n| > \beta$.

Démonstration. Posons $\beta = |b|/2$. Alors $\beta > 0$ (Théorème 2.8 (i) et (ii)). Il existe donc M tel que pour tout $n > M$, $|b_n - b| < \beta$. Donc pour tout $n > M$, $|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| < \beta + |b_n|$; par suite $|b_n| > |b| - \beta = |b| - |b|/2 = \beta$. $\square$

Preuve du théorème 3.8. (i) Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/2 > 0$. Il existe N_a, N_b tel que $\forall n > N_a, |a_n - a| < \epsilon/2$ et $\forall n > N_b, |b_n - b| < \epsilon/2$. Soit $N = \max(N_a, N_b)$. Alors $\forall n > N$, on a $|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

(ii) Si $k = 0$, $ka_n = 0$ et la suite nulle tend vers 0 (proposition 126). Supposons maintenant $k \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/|k| > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N, |a_n - a| < \epsilon/|k|$. Alors $|ka_n - ka| = |k(a_n - a)| = |k||a_n - a| < |k|\epsilon/|k| = \epsilon$.

(iii) Par le théorème 3.6, les suites $(a_n), (b_n)$ sont bornées. Il existe donc K tel que $\forall n, |a_n|, |b_n| \leq K$. On en déduit que $|a| \leq K$ (Théorème 3.7).

Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/2K > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N, |a_n - a|, |b_n - b| < \epsilon/2K$. Alors on a $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| < (\epsilon/2K)K + K\epsilon/2K = \epsilon$.

(iv) Comme on a déjà prouvé (iii), il suffit de prouver que la limite de la suite $(1/b_n)$ est $1/b$. On applique le lemme 3.9. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon|b|\beta > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N, |b_n - b| < \epsilon|b|\beta$. Alors pour tout $n > \max(N, M)$, on a $|1/b_n - 1/b| = |b - b_n|/|bb_n| < \epsilon|b|\beta/|b||\beta| = \epsilon$. $\square$

Corollaire 3.10. On suppose qu'on a deux suites $(a_n), (b_n)$ convergeant vers les limites respectives a, b . Si pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n > b_n$, alors $a \leq b$.

Démonstration. On applique le théorème 3.7 à la suite $(b_n - a_n)$, laquelle tend vers $b - a$, par le théorème 3.8. $\square$

Exercice 40. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = 2x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ existe, alors $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.
2. Est-ce que cette limite existe ?

Exercice 41. Trouver la limite de la suite $\{x_n\}$ donnée par $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$. Indications : utiliser $a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$ et mettre $\sqrt{n}$ en facteur.

3.8 Théorème des gendarmes

Théorème 3.11. Si (a_n) tend vers ℓ , (c_n) tend vers ℓ , et si pour tout n , $a_n \leq b_n \leq c_n$, alors (b_n) tend vers ℓ .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $\forall n > N$, $|a_n - \ell|, |c_n - \ell| < \epsilon$. Alors $-\epsilon < a_n - \ell$ et $c_n - \ell < \epsilon$ (théorème 2.8 (v)); donc $\ell - \epsilon < a_n$ et $c_n < \ell + \epsilon$. Donc $\ell - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \epsilon$. On en déduit que $-\epsilon < b_n - \ell < \epsilon$ et enfin $|b_n - \ell| < \epsilon$. $\square$

Corollaire 3.12. Une suite a_n tend vers 0 si et seulement si $|a_n|$ tend vers 0.

Démonstration. Supposons que a_n tende vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n > N$, $|a_n| = |a_n - 0| < \epsilon$. Comme $||a_n| - 0| = |a_n|$, la suite $|a_n|$ tend aussi vers 0.

Réciproquement, si $|a_n|$ tend vers 0, alors $-|a_n|$ tend vers 0 (opérations sur les limites). La réciproque découle donc de l'inégalité

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

et du théorème des gendarmes. $\square$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prouvera plus tard, comme conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, que pour tout réel $a \geq 0$, il existe un unique réel $b \geq 0$ tel que $b^n = a$; voir l'exercice 104. On écrit $b = \sqrt[n]{a}$ et on appelle b la racine n -ème de a .

Corollaire 3.13. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

On commence par un lemme.

Lemme 3.14. Si u_n est positif et tend vers 0, alors $\sqrt{u_n}$ tend vers 0 aussi.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\epsilon^2 > 0$, et que u_n tend vers 0, il existe N tel que $\forall n > N$, $u_n < \epsilon^2$. Alors $\forall n > N$, $\sqrt{u_n} < \epsilon$ (sinon, on aurait $\sqrt{u_n} \geq \epsilon$, donc par multiplication $u_n \geq \epsilon^2$, contradiction). Donc $\sqrt{u_n}$ tend vers 0 (corollaire 3.12). $\square$

Preuve du corollaire 3.13. On suppose ici $n \geq 1$. Comme $\sqrt[n]{n} > 1$ pour $n \geq 2$, on a $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, $h_n > 0$. Donc, par le binôme de Newton, $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 +$ des termes positifs $\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$. Par suite, $n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$ et donc, en divisant par $n - 1$ (qui est positif), $1 \geq nh_n^2/2$, d'où $h_n^2 \leq 2/n$ et enfin $h_n \leq \sqrt{2/n}$. Comme $2/n$ tend vers 0, $\sqrt{2/n}$ tend aussi vers 0 (lemme 3.14), donc par le théorème des gendarmes, h_n tend vers 0. Donc $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ tend vers 1. $\square$

Exercice 42. Montrer que si $a > 1$, alors $\sqrt[n]{a}$ tend vers 1.

Exercice 43. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + \sqrt{n}} = 1$. Indication : montrer que $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n + \sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{2n}$; utiliser le théorème des gendarmes, avec l'aide de l'exercice 35 et du corollaire 3.13.

3.9 Limites infinies

Définition 3.15. Soit (x_n) une suite.

On dit que x_n tend vers l'infini (ou pour être plus précis, tend vers plus l'infini), ce qu'on écrit $x_n \rightarrow \infty$, si pour tout M , il existe N tel que $\forall n > N$, on a $x_n > M$.

On dit que x_n tend vers moins l'infini, ce qu'on écrit $x_n \rightarrow -\infty$, si pour tout M , il existe N tel que $\forall n > N$, on a $x_n < M$.

On utilise aussi la notation $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ou $-\infty$.

Proposition 3.16. Soit a un entier ≥ 1 . Alors la suite (n^a) tend vers l'infini.

Démonstration. En effet, pour tout $M > 0$, on a : $\forall n > M, n^a \geq n > M$. $\square$

3.10 Opérations sur les suites (suite)

Théorème 3.17. Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites.

(i) Si a_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et que b_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ (resp. $\ell = -\infty$), alors $a_n + b_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(ii) Si a_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et que b_n tend vers $\ell \neq 0$, alors $a_n b_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\ell > 0$, et $-\infty$ (resp. $+\infty$) si $\ell < 0$.

(iii) On suppose a_n non nul pour tout n . Alors $|a_n|$ tend vers ∞ si et seulement si $1/a_n$ tend vers 0.

Démonstration. (i) Supposons que a_n tend vers $+\infty$, et que b_n tend vers ℓ . Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N' tel que $\forall n > N', |b_n - \ell| < 1$, et donc $b_n > \ell - 1$. En appliquant la définition 3.15 à $M - \ell + 1$ (au lieu de M), on obtient qu'il existe N tel que $\forall n > N, a_n > M - \ell + 1$. Donc, si $n > \max(N, N')$, on a $a_n + b_n > M - \ell + 1 + \ell - 1 = M$. Donc $a_n + b_n$ tend vers $+\infty$.

(ii) Supposons que a_n tend vers $+\infty$ et que b_n tend vers $\ell > 0$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N' tel que pour tout $n > N'$ on ait $|b_n - \ell| < \ell/2$; alors $b_n > \ell/2$. Il existe N tel que pour tout $n > N$ on ait $a_n > 2M/\ell$. Alors $a_n b_n > (2M/\ell)(\ell/2) = M$. Donc $a_n b_n$ tend vers ∞ .

(iii) Supposons que $|a_n|$ tend vers ∞ . Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n > N$, on ait $|a_n| > 1/\epsilon$. Alors $|1/a_n| < \epsilon$. La suite $1/a_n$ tend donc vers 0.

Réciproquement, si $1/a_n$ tend vers 0, alors pour tout M , il existe $M' > 0$ tel que $M' \geq M$. Il existe alors N tel que $\forall n > N$, $|1/a_n| < 1/M'$. Alors $|a_n| > M' \geq M$. Donc $|a_n|$ tend vers ∞ . $\square$

Théorème 3.18. *On suppose que la suite $(|a_n|)$ tend vers ∞ . Si pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \geq 0$ (resp. $a_n \leq 0$), alors a_n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

La preuve est laissée au lecteur.

3.11 Exemples

Proposition 3.19. *Soit a un nombre réel. Considérons la suite $(a^n)_{n \geq 1}$; on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Si $a \leq -1$, a^n n'a pas de limite, voir la section 3.14.

Démonstration. Supposons $a > 1$. Alors $a = 1 + h$, $h > 0$. Alors $a^n = (1 + h)^n = 1 + nh +$ des termes positifs, donc $a^n > nh$. Soit $M > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $Nh > M$ (car $\mathbb{R}$ est archimédien par le théorème 2.9). Alors pour tout $n > N$, on a $a^n > nh > Nh > M$. Donc a^n tend vers l'infini.

Si $a = 1$, la suite est constante, donc elle converge vers $a = 1$.

Si $a = 0$, la suite est constante, donc elle converge vers 0 (proposition 126).

Si a est non nul, et $|a| < 1$, alors $1/|a| > 1$, donc $1/|a|^n = (1/|a|)^n$ tend vers l'infini par ce que nous venons de voir, et donc $|a|^n$ tend vers 0 par le théorème 3.17 (iii), et enfin a^n tend vers 0 par le corollaire 3.12. $\square$

Dans l'énoncé suivant, on considère une *fraction rationnelle* $P(x)/Q(x)$, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont des polynômes. On note

$$P(x) = a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0, Q(x) = b_j x^j + \cdots + b_1 x + b_0,$$

et on suppose

$$i \geq 0, j \geq 0, a_i \neq 0, b_j \neq 0,$$

ce qui implique que P est de *degré* i et $Q(x)$ de *degré* j .

Proposition 3.20. On suppose que $Q(n) \neq 0$ pour tout entier naturel n , et on considère la suite $(\frac{P(n)}{Q(n)})$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_i}{b_j} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i < j, \\ +\infty & \text{si } i > j \text{ et } a_i, b_j \text{ de même signe,} \\ -\infty & \text{si } i > j \text{ et } a_i, b_j \text{ de signes opposés.} \end{cases}$$

Démonstration. L'astuce ici est d'écrire

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = n^{i-j} \frac{a_i + a_{i-1}n^{-1} + \dots + a_1n^{1-i} + a_0n^{-i}}{b_j + b_{j-1}n^{-1} + \dots + b_1n^{1-j} + b_0n^{-j}}$$

Comme la suite $(1/n)$ tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent alors respectivement vers a_i et b_j . Donc la proposition découle de la proposition 3.16 et des théorèmes 3.8 (iii) et (iv), et 3.17 (ii). $\square$

Exercice 44. Pour tout nombre réel a , montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Exercice 45. Trouver des exemples de suites (a_n) et (b_n) telles que a_n tend vers ∞ , que b_n tend vers $-\infty$, et que : 1. $a_n + b_n$ tend vers ∞ ; 2. $a_n + b_n$ tend vers $-\infty$; 3. $a_n + b_n$ tend vers 0 ; 4. $a_n + b_n$ n'a pas de limite finie ou infinie.

Exercice 46. Trouver la limite de la suite (x_n) définie récursivement par $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Indication : on peut trouver i et j tels que $x_n = i + j(-1/2)^n$.

Exercice 47. Soit (x_n) une suite telle que $x_0 = 3, x_1 = 2$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+2} = \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$. On voudrait montrer que $x_n = a + b(\frac{1}{2})^n$ (*).

1) Trouver a, b en posant $n = 0$ et $n = 1$ dans (*) (après solution, ne pas oublier de vérifier que ce sont bien les bons a et b).

2) Avec ce a et ce b , prouver par récurrence sur n que la formule (*) est vraie pour tout n .

3) Montrer que la suite tend vers a .

Exercice 48. Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$.

Exercice 49. Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 0$ et $x_n = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j^2 - 1}$ pour $n \geq 2$.

- 1) Montrer que $x_n = \frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (récurrence).
- 2) Trouver la limite de la suite (x_n) .

3.12 Suites équivalentes

On considère deux suites $(u_n), (v_n)$, avec $u_n, v_n \neq 0$ pour tout n . On dit que u_n et v_n sont des *suites équivalentes* si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n/v_n = 1$.

Proposition 3.21. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites dont tous les termes sont non nuls.

Démonstration. Réflexivité : u_n/u_n tend vers 1 (théorème 3.8 (iv)).

Symétrie : si u_n/v_n tend vers 1, alors, v_n/u_n tend vers 1 (théorème 3.8 (iv)).

Transitivité : si u_n/v_n tend vers 1, et si v_n/w_n tend vers 1, alors $u_n/w_n = (u_n/v_n)(v_n/w_n)$ tend vers 1 (théorème 3.8 (iii)). $\square$

Proposition 3.22. Deux suites équivalentes sont de même nature, convergentes ou divergentes, et ont la même limite, finie ou infinie.

Démonstration. Supposons que v_n tend vers une limite ℓ . Alors $u_n = v_n(u_n/v_n)$ tend vers ℓ , d'après le théorème 3.8 (iii).

Supposons que v_n tend vers $+\infty$. Alors $u_n = v_n(u_n/v_n)$ tend vers $+\infty$, d'après le théorème 3.17 (ii). $\square$

3.13 Suites monotones

Définition 3.23. Une suite (x_n) est dite croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante) si pour tout n , on a $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n < x_{n+1}$, resp. $x_n \geq x_{n+1}$, resp. $x_n > x_{n+1}$).

Une suite est dite monotone si elle est croissante, ou décroissante. Elle est dite strictement monotone si elle est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Notez que si une suite est strictement croissante (resp. strictement décroissante), elle est croissante (resp. décroissante).

Théorème 3.24. Toute suite monotone et bornée converge.

C'est un beau théorème; il est aussi profond, et très utile (voir par exemple son application aux séries : théorème 4.6).

Remarquez qu'une suite croissante est toujours bornée inférieurement, par son premier terme; donc, une suite croissante est bornée si et seulement si elle a une borne supérieure.

Démonstration. Supposons que la suite est croissante (le cas décroissant est analogue) L'ensemble $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, et il a une borne supérieure, par hypothèse. Il a donc un supremum. Notons le ℓ . Soit $\epsilon > 0$. Alors $\ell - \epsilon$ n'est pas une borne supérieure de E . Il existe donc N tel que $\ell - \epsilon < x_N$. Pour tout $n \geq N$, on a $x_N \leq x_n$, donc $\ell - \epsilon < x_n$. Donc $\ell - x_n < \epsilon$. On a aussi $x_n \leq \ell$ (car ℓ est une borne supérieure de E). Donc $0 \leq \ell - x_n < \epsilon$ et par suite $|\ell - x_n| < \epsilon$. $\square$

La preuve montre aussi le résultat suivant.

Corollaire 3.25. *Si une suite croissante a pour limite ℓ , alors chaque terme de la suite est $\leq \ell$.*

Corollaire 3.26. *La suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ est convergente (on suppose $n \geq 1$).*

On note e la limite de cette suite, et la preuve montrera que $2 \leq e \leq 3$. Le nombre e joue un grand rôle en mathématiques³.

Démonstration. On a $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} (\frac{1}{n})^i = \sum_i \frac{n!}{(n-i)!i!} \frac{1}{n^i} = \sum_i \frac{1}{i!} \frac{n!}{(n-i)!n^i} \leq \sum_i \frac{1}{i!}$. En effet, $\frac{n!}{(n-i)!n^i} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots (n-i) n \cdots n}$, où le facteur n au dénominateur apparaît i fois. Cette quantité vaut donc $\frac{n-i+1}{n} \frac{n-i+2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n} \leq 1$. De plus $I = \sum_i \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \frac{1}{i!} \leq 1 + 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \frac{1}{2^{i-1}}$, car $i! = i \cdot (i-1) \cdots 2 \cdot 1 \geq 2^{i-1}$. Donc $I \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-1/2^n}{1-1/2} \leq 1 + 2 = 3$.

Nous avons donc prouvé que $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$. Nous montrons maintenant que la suite est croissante. On pourra en déduire qu'elle converge (théorème 3.24), et par passage à la limite, on obtient que sa limite est comprise entre 2 et 3, car chaque terme est $\geq$ le premier terme, qui est $(1 + \frac{1}{1})^1 = 2$.

On a $x_{n+1}/x_n = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}/(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n+1})((1 + \frac{1}{n+1})/(1 + \frac{1}{n}))^n = \frac{n+2}{n+1} (\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n = \frac{n+2}{n+1} (\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2})^n = \frac{n+2}{n+1} (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \geq \frac{n+2}{n+1} (1 - \frac{n}{(n+1)^2})$ (par l'inégalité de Bernoulli, voir l'exercice 50) $= \frac{n+2}{n+1} \frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$. $\square$

3. La notation e vient du mot exponentielle.

Proposition 3.27. *Si une suite croissante (resp. décroissante) n'est pas bornée, elle tend vers l'infini (resp. moins l'infini).*

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante non bornée. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme la suite n'est pas bornée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N > M$. Alors pour tout $n > N$, $x_n \geq x_N > M$. Donc la suite tend vers l'infini. $\square$

Exercice 50. (Inégalité de Bernoulli) Prouver par récurrence que $(1+a)^n \geq 1 + an$, pour tout $a \geq -1$ et tout entier $n \geq 1$.

Exercice 51. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{n}{x_n + n}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $0 \leq x_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Exercice 52. Soit x_n une suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout n , $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, où $a > 0$.

(i) Montrer que $x_n > 0$ pour tout n .

(ii) Montrer que $x_n^2 \geq a$. Indication : calculer $x_{n+1}^2 - a$.

(iii) Montrer que la suite est décroissante et bornée ; en déduire qu'elle a une limite $x > 0$. Indication : calculer $x_{n+1} - x_n$.

(iv) Montrer que la suite (x_{n+1}) tend vers x , et que la suite $(\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}))$ tend vers $\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. En déduire que $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, que $x^2 = a$ et que $x = \sqrt{a}$.

Exercice 53. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de nombres réels définies par

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{2n+1}.$$

1. Montrer que (x_n) est une suite croissante et que (y_n) est une suite décroissante.

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Indications : suites monotones bornées ; calculer la limite de $y_n - x_n$.

Exercice 54. On considère une suite croissante (x_n) et une suite décroissante (y_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$.

1) Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_p$ (considérer les deux cas $n \geq p$ et $n \leq p$).

2) Montrer que les deux suites ont une limite.

3) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n - x_n \leq \frac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites ont la même limite.

Exercice 55. Déterminer si les suites ci-dessous, définies par récurrence, convergent ou divergent. Lorsqu'elles convergent, trouver leur limite.

1. $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 3 + \sqrt{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1+3x_n}{1+7x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n - x_{n-1}}$ pour $n \geq 1$.

Indications : pour 1, suite croissante (récurrence) et bornée (par 6) ; pour 2, suite croissante et non bornée, elle tend vers ∞ . Pour 3, critère de divergence par sous-suites, appliqué à $a_n = x_{n+1} - x_n$.

Exercice 56. On considère un réel $a > 0$, et une suite (x_n) telle que $x_0 > 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

0. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ (récurrence).
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n^2 \geq a$.
3. Montrer que la suite est bornée inférieurement.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \frac{a - x_n^2}{x_n}$.
5. Montrer que la suite est décroissante.
6. Montrer que la suite est bornée supérieurement.
7. Montrer qu'elle a une limite x .
8. Montrer que la limite satisfait $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
9. Montrer que $x = \sqrt{a}$.

3.14 Sous-suites

Définition 3.28. Soit (x_n) une suite ; on dit que la suite (y_n) est une sous-suite, ou une suite extraite, de la suite (x_n) , s'il existe une suite d'entiers naturels (k_n) , strictement croissante, telle que $\forall n, y_n = x_{k_n}$.

Exemples : pour p fixé, $y_n = x_{n+p}$. Les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont des sous-suites de la suite (x_n) (appelées sous-suite des termes pairs, et sous-suite des termes impairs), de même que la suite x_{2^n} .

Théorème 3.29. Si une suite a une limite, finie ou infinie, alors toute sous-suite a la même limite.

Lemme 3.30. Si (k_n) est une suite strictement croissante d'entiers, alors $\forall n, k_n \geq n$.

La preuve se fait facilement par récurrence sur n .

Preuve du théorème 3.29. Nous prouvons le théorème dans le cas d'une limite finie (le cas infini est très similaire). Prenons les notations de la définition 3.28, et supposons que x_n tend vers ℓ . Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $\forall n > N, |x_n - \ell| < \epsilon$. Alors $\forall n > N, k_n > N$ par le lemme 3.30, donc $|y_n - \ell| = |x_{k_n} - \ell| < \epsilon$. $\square$

Corollaire 3.31. *Si deux sous-suites d'une suite ont des limites différentes, alors la suite ne converge pas.*

Exemple : $(-1)^n$: la suite des termes pairs tend vers 1, et celle des termes impairs tend vers -1 . Donc la suite ne converge pas.

Le corollaire est vrai aussi dans le cas de limites infinies. On laisse au lecteur le soin d'énoncer cette variante. Comme exemple, considérons la suite $(-a)^n$, où $a > 1$. La suite des termes pairs tend vers ∞ , et celle des termes impairs vers $-\infty$ (voir la proposition 3.19 et le théorème 3.17 (ii)) ; donc la suite n'a pas de limite, ni finie, ni infinie.

Corollaire 3.32. *Soit (x_n) une suite, p un entier naturel, et (y_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+p}$. Alors x_n tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si y_n tend vers ℓ .*

Démonstration. Si x_n tend vers ℓ , alors y_n aussi, car y_n est une suite extraite.

Réciproquement, supposons que y_n tend vers ℓ , et nous nous limitons au cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $\forall n > N, |y_n - \ell| < \epsilon$. Alors, $\forall n > N + p, n - p > N$, donc $|x_n - \ell| = |y_{n-p} - \ell| < \epsilon$. $\square$

Théorème 3.33. *Soit (x_n) une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n . On suppose que x_{n+1}/x_n tend vers ℓ .*

- (i) *Si $\ell < 1$, alors x_n tend vers 0.*
- (ii) *Si $\ell > 1$, alors x_n tend vers ∞ .*

Démonstration. (i) Il existe r tel que $\ell < r < 1$ (théorème 3.16). Il existe p tel que $\forall n \geq p, |x_{n+1}/x_n - \ell| < r - \ell$. Alors $x_{n+1}/x_n - \ell < r - \ell$ et $x_{n+1}/x_n < r$. Posons $y_n = x_{n+p}$. On a alors $\forall n, y_{n+1}/y_n < r$. Une récurrence facile implique que $\forall n, y_n < r^n y_0$. Donc $0 \leq y_n \leq r^n y_0$. La proposition 3.19 et le théorème des gendarmes impliquent alors que y_n tend vers 0. Donc x_n tend vers 0 par le corollaire 3.32.

(ii) On applique (i) à la suite $1/x_n$. On obtient que $1/x_n$ tend vers 0. Donc x_n tend vers ∞ , par le théorème 3.17 (iii). $\square$

Exercice 57. Soit (a_n) une suite. Montrer que si la sous-suite des termes pairs et la sous-suite des termes impairs ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite tend vers ℓ .

Exercice 58. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$. Indications : se ramener à $(1 + 1/n)^n$ vu en cours.

Exercice 59. Déterminer si la suite $(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}))$ converge. Indications : calculer les valeurs.

Exercice 60. Soit $a > 1$ un nombre réel et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$. Indication : utiliser le théorème 3.33.

Exercice 61. Soit $\{a_n\}$ la suite définie récursivement par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $a_n \geq 1$, $a_{2n-1}^2 > 2$ et $a_{2n}^2 < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les sous-suites $\{a_{2n}\}$ et $\{a_{2n-1}\}$ convergent.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$, ce qui donne le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, à savoir

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

3.15 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Encore un beau théorème sur les nombres réels, qui les caractérise.

Théorème 3.34. Toute suite bornée a une sous-suite convergente. Précisément, si les termes de la suite sont dans l'intervalle $[a, b]$, alors il existe une sous-suite ayant une limite dans cet intervalle.

Lemme 3.35. Toute suite possède une sous-suite monotone.

Démonstration. Appelons sommet de la suite (x_n) un entier naturel k tel que pour tout $n > k$, $x_n < x_k$. Supposons que (x_n) a une infinité de sommets. Soient $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ la suite de ces sommets. On a donc $\forall i, \forall n > k_i, x_n < x_{k_i}$. En particulier, $x_{k_{i+1}} < x_{k_i}$. Donc la suite $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. On a donc trouvé une sous-suite monotone.

Supposons au contraire que l'ensemble des sommets est fini. Soit k_0 strictement plus grand que tous les sommets. Alors k_0 n'est pas un sommet, et il existe donc $n = k_1$ tel que $n > k_0$ et $x_{k_1} = x_n \geq x_{k_0}$. Maintenant, k_1 n'est pas un sommet, puisqu'il est plus grand que k_0 . Il existe donc $k_2 > k_1$ tel que $x_{k_2} \geq x_{k_1}$. On construit ainsi une suite strictement croissante $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ telle que $\forall i, x_{k_{i+1}} \geq x_{k_i}$. On construit ainsi une sous-suite $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, qui est croissante. $\square$

Preuve du Théorème 3.34. L'existence de la sous-suite convergente découle du lemme 3.35 et du théorème 3.24, puisque la suite, donc la sous-suite, est bornée. Chaque terme de la sous-suite est dans $[a, b]$ et par passage à la limite (théorème 3.7), la limite aussi. $\square$

Exercice 62. Montrer que si on a deux suites (a_n) et (b_n) dont les termes sont dans $[a, b]$, alors il existe une suite (k_n) strictement croissante d'entiers naturels telle que les deux suites (a_{k_n}) et (b_{k_n}) convergent.

Exercice 63. La preuve du lemme 3.35 démontre un résultat plus fort que l'énoncé de ce lemme. Quel est ce résultat ?

3.16 Densité et suites

Une partie E de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans $\mathbb{R}$* si pour tous réels $a < b$, E rencontre l'intervalle (a, b) . Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ (théorème 3.16).

Proposition 3.36. E est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) dont la limite est x et dont tous les termes sont dans E .

Démonstration. Supposons que E soit dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , il existe $x_n \in E \cap (x - 1/n, x + 1/n)$. On construit ainsi une suite qui tend vers x , car $\forall n \geq 1, |x - x_n| < 1/n$ (voir exercice 33); de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$.

Réciproquement, supposons que pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) dont la limite est x et dont tous les termes sont dans E . Soit (a, b) un intervalle tel que $a < b$. Posons $x = \frac{a+b}{2}$, le milieu de cet intervalle. Soit (x_n) une suite dont la limite est x et dont tous les termes sont dans E . Prenons $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, la moitié de la longueur de l'intervalle. Comme la suite tend vers x , il existe x_n tel que $|x - x_n| < \epsilon$. Alors $x_n \in E$ et $x_n \in (a, b)$. $\square$

Exercice 64. Montrer que si E est dense dans $\mathbb{R}$ et que F est fini, alors $E \setminus F$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

3.17 Suites de Cauchy

Définition 3.37. Une suite (x_n) est appelée suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n, p > N$, $|x_n - x_p| < \epsilon$.

Il est parfois utile de reformuler ceci en : (x_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$.

Théorème 3.38. (Cauchy) Une suite est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Lemme 3.39. Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit x_n une suite de Cauchy. En prenant $\epsilon = 1$ dans la définition, on trouve qu'il existe N tel que $\forall n > N$, $|x_n - x_{N+1}| < 1$; donc $|x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| = 1 + |x_{N+1}|$. Soit $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$. Alors, pour tout n , $|x_n| \leq M$. $\square$

Preuve du théorème de Cauchy. 1. Si x_n tend vers la limite ℓ , alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < \epsilon/2$. Alors, $\forall n, p > N$, $|x_n - x_p| = |x_n - \ell + \ell - x_p| \leq |x_n - \ell| + |\ell - x_p| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

2. Si (x_n) est une suite de Cauchy, elle est bornée (lemme 3.39). Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 3.34), il existe une sous-suite (x_{k_n}) de la suite (x_n) qui a une limite ℓ , où la suite d'entiers (k_n) est strictement croissante. Montrons que x_n tend vers ℓ . Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 tel que si $n > N_1$, alors $|x_{k_n} - \ell| < \epsilon/2$. Comme la suite (x_n) est de Cauchy, il existe N_2 tel que si $n, p > N_2$, alors $|x_n - x_p| < \epsilon/2$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour tout $n > N$, on a $n > N_1$ et $n > N_2$; de plus, par le lemme 3.30, $k_n \geq n > N \geq N_2$, donc $|x_n - \ell| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - \ell| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \ell| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. $\square$

Exercice 65. On considère la suite définie par $x_0 = 1, x_1 = 1/3, x_{n+2} = (x_{n+1} + 2x_n)/3$ pour tout entier naturel n .

(i) Montrer que $x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1}(2/3)^{n+1}$.

(ii) Montrer que $|x_{n+p} - x_n| \leq 3(2/3)^{n+1}$. Indication : écrire que $x_{n+p} - x_n = x_{n+p} - x_{n+p-1} + \dots + x_{n+1} - x_n$, appliquer la formule donnant la somme d'une série géométrique, et utiliser (i).

(iii) Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.

(iv) Après avoir vérifié que la formule de récurrence pour x_{n+2} ne permet pas de calculer la limite, montrer que la limite est $3/5$. Indication : calculer $x_n - x_0$ avec la même astuce qu'en (ii), puis passer aux limites de chaque côté.

3.18 Limites supérieures et limites inférieures*

On dit que la suite (a_n) a la *limite supérieure* $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, on a :

- il n'y a qu'un nombre fini de n tels que $a_n > \ell + \epsilon$;
- il y a un n tel que $a_n > \ell - \epsilon$.

Si un tel ℓ n'existe pas, on dit que la *limite supérieure* est ∞ .

Théorème 3.40. Soit (a_n) une suite bornée. Sa limite supérieure est égale à la plus grande des limites des sous-suites convergentes de cette suite.

Autrement dit : soit L l'ensemble des limites des sous-suites de (a_n) , qui sont convergentes ; alors $\limsup(a_n) = \max(L)$.

4 Les séries

4.1 Convergence d'une série et exemples

Définition 4.1. Soit (a_n) une suite. On définit $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. La suite (S_n) est appelée *série*.

On appelle S_n la *somme partielle de la série*, et a_n est appelé le *terme général de la série*. On dit que la série converge si la suite (S_n) converge.

La limite est alors notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ou $\sum_{n \geq 0} a_n$, ou simplement $\sum a_n$, et on l'appelle la *somme de la série*.

Notation :

Par abus de notation, on note souvent $\sum a_n$ la série de terme général, sans préjuger de la convergence ou non. Par exemple, les séries $\sum \frac{1}{2^n}$, et $\sum \frac{1}{n}$.

Quelques exemples :

Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$. On a donc $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$. Comme $1/2^{n+1}$ tend vers 0, S_n tend vers $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. On écrit $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$.

Plus généralement, $\sum a^n$ est appelée la *série géométrique de raison a* . Si $-1 < a < 1$, elle tend vers $\frac{1}{1-a}$. Le calcul est analogue au calcul ci-dessus. Si $a \geq 1$, elle tend vers $+\infty$. Si $a \leq -1$, elle n'a pas de limite finie, ni infinie.

Parfois, on considère des séries commençant au rang 1 : $S_n = a_1 + \dots + a_n$. Par exemple, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Elle converge vers 1. En effet, on a $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Donc la somme partielle de rang n est $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ (*somme télescopique*), donc S_n tend vers 1.

La *série harmonique* est la série de terme général $\frac{1}{n}$ ($n \geq 1$), notée donc $\sum \frac{1}{n}$. Elle ne converge pas. En effet la somme partielle de rang 2^n est

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ & \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ & = 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \dots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + n\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

qui tend vers l'infini. Donc S_n ne peut pas converger, par le critère des sous-suites (théorème 3.29).

Un résultat très simple sur les séries convergentes est le suivant ; il fournit une *condition suffisante de non convergence*.

Proposition 4.2. *Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$, on a $a_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge, alors S_n tend vers une limite S , de même que S_{n-1} (corollaire 3.32). Donc leur différence tend vers 0. $\square$

Définition 4.3. *Deux séries sont dites de même nature si elles convergent toutes deux, ou si elles divergent toutes deux.*

Proposition 4.4. *Si deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors elles sont de même nature.*

Démonstration. Si on note S_n et T_n les sommes partielles de ces séries, on a, comme conséquence de l'hypothèse, $S_n = T_n + a$, si n est assez grand, pour un certain réel a .

Soyons plus précis. Notons $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ces deux séries. Il existe p tel que $\forall n > p$, $a_n = b_n$. Alors, pour $n \geq p$, $S_n = a_0 + \dots + a_p + a_{p+1} + \dots + a_n = b_0 + \dots + b_p + b_{p+1} + \dots + b_n + (a_0 + \dots + a_p - b_0 + \dots + b_p) = T_n + a$. $\square$

Le critère suivant est souvent utile.

Proposition 4.5. Soit (a_n) une suite, $p \in \mathbb{N}$. Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_{n+p}$. La série $\sum a_n$ converge si et seulement si la série $\sum b_n$ converge.

Démonstration. On peut supposer $p \geq 1$. On note S_n les sommes partielles de $\sum a_n$, et T_n celles de $\sum b_n$. On a alors, pour tout n , $S_{n+p} = S_{p-1} + T_n$. Donc la suite (T_n) converge si et seulement si la suite $(S_{n+p})_n$ converge. Et celle-ci converge si et seulement si la suite (S_n) converge (corollaire 3.32). $\square$

Exercice 66. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 67. Soit $a > 0$. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{a}$. Indications : imiter le cas $a = 0$ vu ci-dessus.

Exercice 68. On suppose que la série $\sum a_n$ converge ; montrer que la série $\sum \frac{1}{a_n^2 + 1}$ diverge.

Exercice 69. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \prod_{i=0}^n (1 + x^{2^i}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}).$$

Indication : calculer le produit en fonction d'une série géométrique : montrer qu'il est égal à $\sum_{0 \leq i \leq 2^{n+1}-1} x^i$.

4.2 Séries à termes positifs

Une série à termes positifs est une série dont tous les termes sont ≥ 0 .

Théorème 4.6. Une série à termes positifs converge si et seulement si ses sommes partielles S_n sont bornées (c'est-à-dire, s'il existe M tel que $\forall n, S_n \leq M$). Si elles ne sont pas bornées, la série tend vers ∞ .

Notation : Dans le deuxième cas, on écrit $\sum a_n = \infty$.

Donc, pour une série à termes positifs, soit elle converge, soit elle tend vers ∞ .

Démonstration. Si $S_n \leq M$ pour tout n , alors la suite des S_n est croissante et bornée. Elle converge par le théorème 3.24.

Si les S_n ne sont pas bornées, alors S_n tend vers ∞ par la Proposition 3.27. $\square$

Corollaire 4.7. (*critère de comparaison*) Soient deux séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, et $\alpha > 0$. Si $a_n \leq \alpha b_n$ pour tout n , et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

On utilise souvent ce critère avec $\alpha = 1$: l'hypothèse sera donc $a_n \leq b_n$.

Lemme 4.8. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs qui converge vers A . Alors pour tout n , $S_n \leq A$.

Démonstration. La suite des sommes partielles S_n est croissante. On applique le corollaire 3.25. $\square$

Démonstration. (Preuve du corollaire 4.7) Soit S_n la somme partielle de $\sum a_n$, et T_n celle de b_n . On a $S_n \leq \alpha T_n$. Par le lemme 4.8, on a $T_n \leq B$, où $B = \sum b_n$. Donc $S_n \leq \alpha B$. On conclut avec le théorème 4.6. $\square$

Exemple : considérons la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$. On a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. On a déjà vu en 4.1 que la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge. On applique le corollaire. C'est un résultat célèbre, mais hors d'atteinte dans ce cours, que la limite est $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corollaire 4.9. Si on a deux séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, si $a_n \leq b_n$ pour tout n , et si $\sum a_n = \infty$, alors $\sum b_n = \infty$.

Démonstration. C'est la contraposée du corollaire 4.7, en tenant compte du théorème 4.6. $\square$

Corollaire 4.10. (*critère des suites équivalentes, ou critère du quotient*) Soient deux suites (a_n) et (b_n) , strictement positives, et équivalentes. Alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

Démonstration. Comme $\lim a_n/b_n = 1$, il existe N tel que $n > N$ implique $|a_n/b_n - 1| < 1/2$; donc $-1/2 < a_n/b_n - 1 < 1/2$, et par suite $1/2 < a_n/b_n < 3/2$, d'où $(1/2)b_n < a_n < (3/2)b_n$. Par le critère de comparaison (corollaire 4.7), tenant compte de la proposition 4.4, les deux séries sont de même nature. $\square$

Attention Ce critère s'applique seulement aux séries à termes strictement positifs.

Corollaire 4.11. (*critère de d'Alembert*) Soit (a_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim a_{n+1}/a_n = \ell$.

- (i) Si $\ell < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
- (ii) Si $\ell > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.

Démonstration. (i) Il existe r tel que $\ell < r < 1$. Soit $\epsilon = r - \ell > 0$. Il existe N tel que si $p \geq N$, alors $|a_{p+1}/a_p - \ell| < r - \ell$; alors $a_{p+1}/a_p - \ell < r - \ell$, donc $a_{p+1}/a_p < r$ et enfin $a_{p+1} \leq ra_p$. Il s'ensuit que pour tout n , on a $a_{N+n} \leq r^n a_N$. Par le critère de comparaison (corollaire 4.7), la série $\sum_{p \geq 0} a_{N+n}$ converge, car $\sum r^n$ converge (série géométrique de raison r). Par suite, la série $\sum a_n$ converge aussi (proposition 4.5).

(ii) Il existe r tel que $1 < r < \ell$. Avec $\epsilon = \ell - r$, on trouve un N tel que $\forall n \geq N$, $|a_{n+1}/a_n - \ell| < \ell - r$; alors $r - \ell < a_{n+1}/a_n - \ell$, et par suite $1 < r < a_{n+1}/a_n$ et enfin $a_n < a_{n+1}$. Donc pour tout $n > N$, on a $a_n > a_N$, et par suite a_n ne tend pas vers 0. Il s'ensuit que $\sum a_n$ diverge, par la proposition 4.2. $\square$

Corollaire 4.12. (*critère de Cauchy, ou critère de la racine*) Soit (a_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim(a_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$.

- (i) Si $\ell < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
- (ii) Si $\ell > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du critère de d'Alembert. $\square$

Théorème 4.13. (*critère de condensation de Cauchy*) Soit a_n une suite décroissante de termes positifs. Alors $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous faisons commencer la suite a_n à $n = 1$, et la suite $2^n a_{2^n}$ à $n = 0$.

Par décroissance de la suite a_n , on a

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}.$$

Soit $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ et $T_n = 2^0 a_{2^0} + \cdots + 2^n a_{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} \cdots + 2^n a_{2^n} = T_n. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &\geq a_1 + \sum_{1 \leq i \leq n} 2^i a_{2^{i+1}} = a_1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} 2^{i+1} a_{2^{i+1}} \right) \\ &= a_1 + \frac{1}{2} (-2^0 a_{2^0} - 2^1 a_{2^1} + T_{n+1}) = \frac{1}{2} T_{n+1} + \frac{1}{2} a_1 - a_2. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_{n+1} \leq 2S_{2^{n+1}-1} - a_1 + 2a_2$. Si $\sum a_n$ converge vers S , alors S_n est borné supérieurement par S (lemme 4.8); donc T_{n+1} est borné supérieurement par $2S - a_1 + 2a_2$; donc T_n est borné pour $n \geq 1$, et enfin T_n est borné pour tout n (car $0 \leq T_0 \leq T_1$); la série $\sum 2^n a_{2^n}$ converge donc, par le théorème 4.6.

Réciproquement, si cette série converge, alors ses sommes partielles T_n sont bornées, donc les $S_{2^{n+1}-1}$ sont bornées, et par positivité, les S_n sont bornées (voir l'exercice 72). Donc les sommes partielles S_n de la série $\sum a_n$ (qui sont les $a_0 + S_n$) sont bornées, et la série converge par le même théorème. $\square$

Corollaire 4.14. *La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge si et seulement si $p > 1$.*

Démonstration. Si $p \leq 0$, alors le terme général ne tend pas vers 0, donc la série ne converge pas.

Supposons donc $p > 0$. Alors la suite $1/n^p$ est décroissante. Appliquons le critère de condensation. Il faut examiner la série $\sum_{n \geq 0} 2^n (1/(2^n)^p)$. Son terme général est $(2^{1-p})^n$, et c'est donc une série géométrique de raison 2^{1-p} . Elle converge si et seulement si $2^{1-p} < 1$ (section 4.1), ce qui est équivalent à $1 - p < 0$, donc à $p > 1$. $\square$

On note, pour $p > 1$, $\zeta(p) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$. On obtient ainsi la célèbre *fonction zeta* de Riemann (nous avons déjà rencontré $\zeta(2)$ après le lemme 4.8).

Exercice 70. *Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} n r^n$ converge, où $0 < r < 1$.*

Exercice 71. *Soit s_n la suite $s_n = \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$. On admettra la formule de Stirling (qui donne une approximation de $n!$) :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{s_n} = 1.$$

Montrer que la série $\sum \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge (comparer par quotient, corollaire 4.10, à la série $\sum \sqrt{n}$, et utiliser le corollaire 4.14).

Exercice 72. Soit a_n une suite à termes positifs et S_n ses sommes partielles. Soit (k_n) une suite d'entiers naturels qui tend vers l'infini. Montrer que si les S_{k_n} , $n \in \mathbb{N}$, sont bornées, alors les S_n sont bornées.

Exercice 73. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge. Indication : condensation. En déduire que si a_n tend vers 0, alors la série $\sum a_n/n$ ne converge pas nécessairement.

Exercice 74. * Soit (a_n) une suite décroissante de nombres positifs telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\lim na_n = 0$. Indication : utiliser la condensation pour montrer que $2^k a_{2^k}$ tend vers 0 ; pour n quelconque, intercaler n entre deux puissance de 2.

Exercice 75.

Classer les séries suivantes en séries convergentes et en séries divergentes :

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$,
2. $\sum \frac{\cos^2 n}{3^n}$,
3. $\sum \frac{n^n}{n!}$,
4. $\sum \frac{3^n + 2}{7^n + 5}$,
5. $\sum \frac{n!}{n^n}$,
6. $\sum \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$,
7. $\sum \frac{9}{3\sqrt{n} + 2}$,
8. $\sum \frac{2^n + 6n^3}{n! + 4n^2}$,
9. $\sum \frac{n^3 + 4n^2}{2n^4 + n^3}$.

4.3 Critère de Cauchy

Théorème 4.15. Une série converge $\sum a_n$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$ et tout p , on a $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$.

Démonstration. On applique le théorème 3.38 à S_n . La somme dans l'énoncé est $S_{n+p} - S_n$. $\square$

Montrons avec ce théorème que la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge. On a $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+p)}\right) \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{2}{(n+1)!}$. Donc le théorème s'applique, car la suite $1/(n+1)!$ tend vers 0. On peut montrer que la somme de cette série est le nombre e , déjà rencontré au Corollaire 3.26.

4.4 Opérations sur les séries

Théorème 4.16. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries convergentes, de sommes A et B , alors pour tous réels a, b , la série $\sum (aa_n + bb_n)$ converge vers $aA + bB$.

Démonstration. Soit A_n, B_n, S_n les somme partielles de rang n de ces trois séries. Alors $S_n = aA_n + bB_n$. On applique le théorème 3.8 (i) et (ii). $\square$

Exercice 76. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa somme sachant que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Exercice 77. On sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$. En déduire la somme des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

4.5 Associativité de la somme infinie

Théorème 4.17. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série convergente. Soit $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. On définit $b_n = \sum_{k_n \leq i < k_{n+1}} a_i$. Alors la série $\sum b_n$ est convergente, avec la même limite.

Par exemple, on pourrait avoir $b_0 = a_0 + a_1 + a_2, b_1 = a_3, b_2 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \dots$

Démonstration. On note S_n les sommes partielles de $\sum a_n$. Alors $S_{k_{n+1}-1}$ est une sous-suite de la suite (S_n) . Cette sous-suite est convergente (théorème 3.29). Or $b_0 + b_1 + \cdots + b_n = S_{k_{n+1}-1}$. La série $\sum b_n$ est donc convergente. $\square$

Sous une condition supplémentaire, on a une réciproque.

Théorème 4.18. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série. Soit $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. On définit $b_n = \sum_{k_n \leq i < k_{n+1}} a_i$. On suppose que a_n tend vers 0, et qu'il existe K tel que pour tout i , $k_{i+1} - k_i \leq K$. Alors la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum b_n$ est convergente.

Démonstration. Par le théorème 4.17, il suffit de prouver que : $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Supposons que donc $\sum b_n$ converge. Notons $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$.

Soit $\epsilon > 0$.

- On a $n < p \Leftrightarrow k_n < k_p$, car la suite k_n est strictement croissante.
- Il existe K tel que pour tout n , $k_{n+1} - k_n < K$.
- Il existe M tel que pour tout $i > M$, $|a_i| < \epsilon/2K$.
- Comme la série $\sum b_n$ converge, il existe S et L tel que pour tout $n \geq L$, $|\sum_{0 \leq i \leq n} b_i - S| = |S_{k_{n+1}-1} - S| < \epsilon/2$.
- On peut supposer $k_L \geq M$, quitte à remplacer L par un nombre plus grand, puisque la suite k_n tend vers l'infini par le lemme 3.30.

Soit $m > k_{L+1}$. Il existe n tel que $k_n \leq m < k_{n+1}$. Alors $k_{L+1} < m < k_{n+1}$, donc $n + 1 > L + 1$, et $n > L$. Donc $n - 1 \geq L$ et par suite $|S_{k_n-1} - S| < \epsilon/2$. De plus, si $i \geq k_n > k_L \geq M$, alors $|a_i| < \epsilon/2K$. Donc $|S_m - S| \leq |S_m - S_{k_n-1}| + |S_{k_n-1} - S| \leq |\sum_{k_n \leq i \leq m} a_i| + \epsilon/2 \leq \sum_{k_n \leq i \leq m} |a_i| + \epsilon/2 \leq K\epsilon/2K + \epsilon/2$ (car $m - k_n < k_{n+1} - k_n < K$) $= \epsilon$. $\square$

4.6 Convergences absolue et conditionnelle

Définition 4.19. Une série $\sum a_n$ converge absolument si la série $\sum |a_n|$ converge. Une série $\sum a_n$ converge conditionnellement si elle converge et si la série $\sum |a_n|$ ne converge pas.

Une série qui converge conditionnellement est aussi appelée une *série semi-convergente*.

Théorème 4.20. Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; comme $\sum |a_n|$ converge, il existe par le théorème 4.15 N tel que pour tout $n > N$ et tout p , on a $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \epsilon$. On a alors, par l'inégalité triangulaire, $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \epsilon$. Donc $\sum a_n$ satisfait le critère du théorème 4.15, et par suite, converge. $\square$

On a une caractérisation de la convergence absolue, et une condition nécessaire pour la convergence conditionnelle.

Soit a_n une suite et posons $p_n = a_n$ si $a_n > 0$ et $p_n = 0$ si $a_n \leq 0$; de plus $q_n = 0$ si $a_n \geq 0$ et $q_n = -a_n$ si $a_n < 0$. En examinant les trois cas $a_n > 0$, $a_n = 0$, $a_n < 0$, on établit que

$$a_n = p_n - q_n, |a_n| = p_n + q_n.$$

Théorème 4.21. a) $\sum a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum p_n$ et $\sum q_n$ convergent. Dans ce cas, $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$.

b) Si $\sum a_n$ converge conditionnellement, alors $\sum p_n$ et $\sum q_n$ divergent.

Démonstration. a) Si les deux séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$ convergent, alors la série $\sum |a_n|$ aussi, car $|a_n| = p_n + q_n$.

Si $\sum |a_n|$ converge, alors, comme $|p_n| \leq |a_n|$ et $|q_n| \leq |a_n|$ (vérifier), les deux séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$ convergent absolument, donc convergent.

La dernière égalité vient de $a_n = p_n - q_n$.

b) Par a), les deux séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$ ne peuvent pas être toutes deux convergentes. Supposons que $\sum p_n$ converge; alors, comme $q_n = -a_n - p_n$, $\sum q_n$ converge aussi : contradiction par a). De même, si $\sum q_n$ converge, alors $\sum p_n$ aussi : contradiction par a). En conclusion, aucune des deux ne converge. $\square$

Exercice 78. Montrer que dans le cas b) du théorème 4.21, on a $\sum p_n = \infty$ et $\sum q_n = -\infty$.

Exercice 79. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente et $\{b_n\}$ une suite bornée. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ converge absolument.

Exercice 80. En justifiant pleinement chacune de vos réponses, déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1} \right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+n^2}{\sqrt{n^5+2n^3+7}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}$

4.7 Séries alternées

Définition 4.22. Une série $\sum a_n$ est dite alternée si les a_n sont alternativement ≥ 0 et ≤ 0 .

Théorème 4.23. Soit a_n une suite décroissante de termes positifs, qui tend vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Application La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, appelée la *série harmonique alternée*, converge. Comme la série harmonique diverge, elle converge conditionnellement.

Démonstration. Considérons la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n a_n$. On a pour tout $n \geq 0$, $S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n}$, car la suite a_n décroît, donc $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$; de même, $S_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq S_{2n+1}$. Donc la sous-suite (S_{2n}) est décroissante, alors que la sous-suite (S_{2n+1}) est croissante. De plus $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$. Il s'ensuit que $S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$. Les deux sous-suites sont donc bornées, et elles convergent d'après le théorème 3.24. Soit donc $S = \lim S_{2n}$ et $S' = \lim S_{2n+1}$. Donc $S - S' = \lim(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim a_{2n+1} = 0$ (théorème 3.29). Donc $S = S'$. Comme S_{2n} et S_{2n+1} tendent toutes deux vers S , il s'ensuit que S_n tend vers S' (exercice 57). $\square$

Exercice 81. Déterminer si les séries suivantes convergent ou non, et lorsqu'elles convergent, déterminer si elles convergent absolument ou conditionnellement :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2 + \sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^4}{3^n}$

Exercice 82. Des contre-exemples : on définit, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Montrer que les deux suites sont équivalentes.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que $v_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$.

4. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ converge.
5. En déduire que $\sum v_n$ diverge.
6. Pourquoi le corollaire 4.10 ne s'applique-t-il pas ?
7. Pourquoi le théorème 4.23 ne s'applique-t-il pas à $\sum v_n$?

4.8 Réarrangements de séries

On sait bien que l'addition des nombres est commutative : $a + b = b + a$. Même, si on additionne plusieurs nombres, on peut le faire dans n'importe quel ordre, et on trouvera toujours le même résultat ; ça s'exprime formellement comme suit : étant donnés n nombres réels, et f une bijection de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même, on a $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{f(1)} + a_{f(2)} + \dots + a_{f(n)}$.

Qu'en est-il de la commutativité des sommes infinies ? Les résultats de cette section-ci et de la suivante répondent complètement à la question.

Définition 4.24. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. La série $\sum a_{f(n)}$ est appelée un réarrangement de la série $\sum a_n$.

Théorème 4.25. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Tout réarrangement de cette série est convergente, avec la même limite.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Posons $b_i = a_{f(i)}$. Alors $\sum_{0 \leq i \leq m} |b_i| = \sum_{0 \leq i \leq m} |a_{f(i)}| \leq \sum_{0 \leq i \leq M} |a_i|$, où $M = \max\{f(0), f(1), \dots, f(m)\}$. Par le lemme 4.8, cette dernière somme est $\leq \sum |a_i|$, car cette série converge. Donc les sommes partielles de la série $\sum |b_n|$ sont bornées, et il s'ensuit que la série $\sum b_n$ converge absolument, donc elle converge (théorème 4.20).

Notons B_n, T_n, S_n les sommes partielles des séries $\sum b_n, \sum |a_n|, \sum a_n$, et T, S les somme des séries $\sum |a_n|, \sum a_n$. Il reste à montrer que $\sum b_n = S$. Soit $\epsilon > 0$. Par le critère de Cauchy (théorème 4.15), il existe N_1 tel que : (*) pour tout $n \geq N_1$ et tout k , on a $T_{n+k} - T_n = \sum_{n+1 \leq i \leq n+k} |a_i| < \epsilon/2$. Il existe aussi N_2 tel que : (**) pour tout $n \geq N_2$, $|S_n - S| < \epsilon/2$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Comme f est une bijection, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1, \dots, N\} \subset \{f(0), f(1), \dots, f(M)\}$.

Alors pour tout $m > M$, on a $|B_m - S| = |B_m - S_N + S_N - S| \leq |B_m - S_N| + |S_N - S|$. La deuxième valeur absolue est bornée par $\epsilon/2$, par (**). La première est égale à $|\sum_{0 \leq i \leq m} a_{f(i)} - \sum_{0 \leq i \leq N} a_i|$. A cause de l'inclusion ci-dessus, la somme $\sum_{0 \leq i \leq N} a_i$ est incluse dans la somme $\sum_{0 \leq i \leq m} a_{f(i)}$. La différence est donc égale à $\sum_{j \in J} a_j$, où J est l'ensemble des $j > N$ de la forme $j = f(i), i = 0, \dots, m$. Sa valeur absolue est, par l'inégalité du triangle, $\leq \sum_{j \in J} |a_j|$, et ceci est $\leq \sum |a_j|$, où la somme est sur les j tels que

$N + 1 \leq j \leq \max\{f(i), i = 0, \dots, m\}$. Par (*), c'est $\leq \epsilon/2$, puisque $N \geq N_2$. Finalement, on obtient que $|B_m - S| < \epsilon$. $\square$

Finissons cette partie sur les séries par un théorème de Riemann, a priori surprenant.

Théorème 4.26. *Soit $\sum a_n$ une série convergente conditionnellement. Pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, il existe un réarrangement de cette série qui tend vers ℓ .*

Démonstration. Avec les notations précédant le théorème 4.21, on a : $\sum p_n = \infty, \sum q_n = -\infty$. Soit (a_{k_n}) la sous-suite des termes strictement positifs de la suite (a_n) , et (b_{h_n}) la sous-suite de ses termes négatifs. On a donc $\sum_n a_{k_n} = \infty$ et $\sum_n a_{h_n} = -\infty$. De plus, comme $\sum a_n$ converge, on a $\lim a_n = 0$ et par suite, a_{k_n} et a_{h_n} tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

1) Prenons $\ell = \infty$. La sous-suite (a_{k_n}) tend vers l'infini. On peut donc trouver $k_0, k_1, \dots, k_{n_0}$ tels que $a_{k_0} + a_{k_1} + \dots + a_{k_{n_0}} + a_{h_0} \geq 1$. On choisit ensuite $k_{n_0+1}, k_{n_0+1}, \dots, k_{n_1}$ tels que $a_{k_0} + a_{k_1} + \dots + a_{k_{n_0}} + a_{h_0} + a_{k_{n_0+1}} + a_{k_{n_0+2}} + \dots + a_{k_{n_1}} + a_{h_1} \geq 2$. On continue ainsi, et cela définit un réarrangement tel que la série réarrangée tend vers l'infini.

2) Le cas $\ell = -\infty$ est analogue.

3) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On choisit $k_0, k_1, \dots, k_{n_0}$ tels que $\alpha_0 := a_{k_0} + a_{k_1} + \dots + a_{k_{n_0}} > \ell$, et que $a_{k_0} + a_{k_1} + \dots + a_{k_{n_0-1}} \leq \ell$. $|\alpha_0 - \ell| \leq a_{k_{n_0}}$.

On choisit ensuite $h_0, h_1, \dots, h_{m_0}$ tels que $\beta_0 := a_{k_0} + a_{k_1} + \dots + a_{k_{n_0}} + a_{h_0} + a_{h_1} + \dots + a_{h_{m_0}} < \ell$ et que $a_{h_0} + a_{h_1} + \dots + a_{h_{m_0-1}} \geq \ell$.

On construit ainsi un réarrangement de la série $\sum a_n$, qui tend vers ℓ . $\square$

Exercice 83. * On sait que la série $S = \sum_{n \geq 0} (-1)^n / (n+1)$ est conditionnellement convergente. Soit ℓ sa limite. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} (1/(2k+1) - 1/(4k+2) - 1/(4k+4))$ converge vers $\ell/2$. Montrer que cette série est un réarrangement de S .

Exercice 84. On dit qu'une série est commutativement convergente si et seulement si tous les réarrangements de cette série ont la même limite finie. Montrer qu'une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

5 Limites de fonctions et continuité

5.1 Fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a un *domaine de définition* D_f , qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; elle associe à tout $x \in D_f$ un nombre réel y , noté $f(x)$: $y = f(x)$. On écrit

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x).$$

Dans la plupart des cas étudiés ici, le domaine de f est un intervalle, ou une réunion finie d'intervalles.

5.2 Limite d'une fonction en un point

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on note

$$V(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a + \epsilon), V'(a, \epsilon) = V(a, \epsilon) \setminus \{a\}.$$

La notation V peut se comprendre avec le mot “voisinage”, utilisé en topologie : $V(a, \epsilon)$ est l'ensemble des réels qui sont “voisins” de a , en ce sens qu'ils sont à une distance de a inférieure à ϵ . Et $V'(a, \epsilon)$ est l'ensemble de ces réels, sauf a lui-même.

Définition 5.1. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a la limite ℓ en x_0 , ou que f tend vers x_0 quand x tend vers x_0 , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V'(x_0, \eta), x \in D_f \Rightarrow f(x) \in V(\ell, \epsilon).$$

Notation : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. On dit aussi “en a ” au lieu de “quand x tend vers a ”.

Ça s'écrit aussi comme suit : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Notez qu'on ne demande pas que la fonction soit définie en x_0 ; on peut avoir $x_0 \notin D_f$ ou $x_0 \in D_f$.

Cette définition ne prend du sens que lorsque x_0 est un point d'accumulation de D_f , dont la définition suit.

Définition 5.2. Soit $D \subset \mathbb{R}$. Un point d'accumulation de D est un réel a tel que pour tout $\epsilon > 0$, $V'(a, \epsilon)$ rencontre D .

Si x_0 n'est pas un point d'accumulation de D_f , alors n'importe quel nombre réel est limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 : voir exercice 91 ; en particulier le théorème qui suit n'est pas vrai si x_0 n'est pas un point d'accumulation du domaine de la fonction.

Théorème 5.3. *La limite d'une fonction en un point d'accumulation de son domaine est unique.*

La preuve est très semblable à celle de l'unicité de la limite d'une suite (théorème 3.3), par l'application du corollaire 2.10. On remarquera où intervient l'hypothèse que x_0 est un point d'accumulation.

Démonstration. Soit ℓ_1, ℓ_2 deux nombres réels, tous deux limite de $f(x)$ en x_0 , point d'accumulation de D_f . Nous montrons que pour tout $\epsilon > 0$, $|\ell_1 - \ell_2| < \epsilon$; le corollaire 2.10 implique alors que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit donc $\epsilon > 0$; alors $\epsilon/2 > 0$. Donc, pour $i = 1, 2$, il existe δ_i tel que pour tout $x \in D_f \cap V'(x_0, \delta_i)$, on a $f(x) \in V(\ell_i, \epsilon/2)$. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Il existe $x \in D_f \cap V'(x_0, \delta)$. Alors $x \in V'(x_0, \delta_i)$ pour $i = 1$ et pour $i = 2$. Donc $f(x) \in V(\ell_i, \epsilon/2)$. On a donc $|f(x) - \ell_i| < \epsilon/2$, et enfin $|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \epsilon$. $\square$

La notion de limite d'une fonction se ramène à celle de limite d'une suite.

Théorème 5.4. *Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point d'accumulation de D_f . Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de $D_f \setminus \{a\}$ qui tend vers a , la suite $f(a_n)$ tend vers ℓ .*

Démonstration. 1) Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Soit (a_n) une suite d'éléments de $D_f \setminus \{a\}$ qui tend vers a . Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que pour tout $x \in V'(a, \delta)$, on a $f(x) \in V(\ell, \epsilon)$. Il existe N tel que pour tout $n > N$, $a_n \in V(a, \delta)$, et par suite, $a_n \in V'(a, \delta)$. En conséquence, $f(a_n) \in V(\ell, \epsilon)$.

2) Démontrons la contraposée : l'hypothèse que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a n'est pas ℓ , implique qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $D_f \setminus \{a\}$ qui tend vers a , et que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ .

L'hypothèse ci-dessus implique qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in D_f \cap V'(a, \delta)$ tel que $f(x) \notin V(\ell, \epsilon)$. On applique cette propriété à chaque $\delta = 1/n$, pour chaque entier naturel non nul n . Il existe donc $x_n \in D_f \cap V'(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin V(\ell, \epsilon)$. On a alors $|x_n - a| < 1/n$, et la suite x_n tend donc vers a . De plus, $|f(x_n) - \ell| \geq \epsilon$, et la suite $f(x_n)$ ne tend donc pas vers ℓ . $\square$

Exercice 85. *Montrer que $V'(a, \epsilon)$ est réunion disjointe de deux intervalles ouverts.*

Exercice 86. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit x un point d'accumulation de A ; montrer que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $V'(x, \delta) \cap A$ possède une infinité d'éléments.*

Exercice 87. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On suppose que x n'est pas un point d'accumulation de A ; montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $V'(x, \delta) \cap A = \emptyset$.

Exercice 88. Montrer que tout nombre réel est un point d'accumulation de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Exercice 89. Déterminer quels sont les points d'accumulation de l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 90. Montrer que si D est une réunion d'intervalles de longueur positive, alors tout point de D est un point d'accumulation de D .

Exercice 91. Avec les notations de la définition 5.1, supposons que x_0 n'est pas un point d'accumulation de D_f . Montrer que n'importe quel réel ℓ est limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 .

5.3 Limite à gauche et à droite

Définition 5.5. On suppose que a est un point d'accumulation de $D_f \cap (a, \infty)$ (resp. de $D_f \cap (-\infty, a)$), et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est limite à droite (resp. à gauche) de $f(x)$ quand x tend vers a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap (a, a + \delta)$ (resp. $x \in D_f \cap (a - \delta, a)$), on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Notations : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$.

Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La limite à gauche en 0 est -1 , et à droite c'est $+1$; la valeur en 0 de f (qui est b) ne joue pas de rôle pour ces limites.

Théorème 5.6. La limite de $f(x)$ en a est ℓ si et seulement si les limites de $f(x)$ à droite et à gauche en a existent, et sont toutes deux égales à ℓ .

La preuve est laissée en exercice. On laisse aussi en exercice l'énoncé d'un théorème pour les limites à droite, et pour les limites à gauche, d'un théorème analogue au théorème 5.4.

5.4 Limites en l'infini

Définition 5.7. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dont le domaine de définition n'est pas borné supérieurement (resp. inférieurement). On dit que $f(x)$ a la limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe A tel que pour tout $x > A$ (resp. $x < A$), $x \in D_f$ implique que $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Notations : $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$; $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

La restriction que le domaine n'est pas borné est l'analogue de la restriction que x_0 est un point d'accumulation du domaine (voir les définitions 5.1 et 5.2).

Théorème 5.8. Dans les conditions de la définition 5.7, la limite est unique.

5.5 Limites infinies

Les notations sont $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, ainsi que quelque autres variantes, incluant les limites à gauche et à droite en un point. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire tous les cas.

On a, par exemple

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall A, \exists \delta, \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A).$$

Proposition 5.9. Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair,} \\ +\infty & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

5.6 Opérations sur les limites

Théorème 5.10. Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et a un point d'accumulation de D . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$. Alors

a) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = F + G$;

b) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = FG$;

c) $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = F/G$, sous l'hypothèse que g ne s'annule pas sur D et que $G \neq 0$.

Démonstration. On se ramène au théorème analogue sur les suites, en appliquant les théorèmes 5.4 et 3.8. $\square$

5.7 Théorème des gendarmes

Théorème 5.11. Soient trois fonction réelles f, g, h de domaine commun D . Soit a un point d'accumulation de D . On suppose que $\forall x \in D$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ existent et sont égales. Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe aussi et elle est égale à cette limite.

Démonstration. C'est une conséquence des théorèmes 5.4 et 3.11. $\square$

Exercice 92. Évaluer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$.

5.8 Continuité

Définition 5.12. Soit une fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D_f$. On dit que f est continue en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

De manière équivalente, la définition se réécrit en : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(D_f \cap V(a, \delta)) \subset V(f(a), \epsilon)$.

Si f n'est pas continue en $a \in D_f$, on dit que f est *discontinue* en a .

Définition 5.13. Une fonction est dite continue si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Théorème 5.14. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$, qui est point d'accumulation de D_f . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est continue en a ;
- b) la limite $f(x)$ en a est $f(a)$;
- c) pour toute suite (a_n) , d'éléments de D_f , qui tend vers a , la suite $(f(a_n))$ tend vers $f(a)$.

Démonstration. L'équivalence de a) et b), facile, est laissée au lecteur. L'équivalence de b) et c) se prouve de manière analogue au théorème 5.4. $\square$

Exercice 93. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(D_f \cap V(a, \delta)) \subset V(f(a), \epsilon)$.

Exercice 94. Soit $\eta > 0$. Montrer que dans la définition 5.12, on peut remplacer “pour tout $\epsilon > 0$ ” par “pour tout $\epsilon \in (0, \eta)$ ”.

Exercice 95. * On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ suivante, due à Dirichlet :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible avec } q \text{ positif.} \end{cases}$$

On veut montrer que f est continue aux points irrationnels, et discontinue aux points rationnels.

1) Soit a irrationnel dans $[0, 1]$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il n’y a qu’un nombre fini de $\frac{p}{q} \in [0, 1]$ tels que $q \leq \frac{1}{\epsilon}$. En déduire qu’il existe $\delta > 0$ tel que $V(a, \delta)$ ne contient aucune de ces fractions. En déduire que pour tout $x \in V(a, \delta) \cap [0, 1]$, $|f(x)| < \epsilon$, et que f est continue en a .

2) Soit $a = \frac{p}{q}$ rationnel. Alors $f(a) = \frac{1}{q}$. Soit $\epsilon = \frac{1}{q}$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe x irrationnel dans $D_f \cap (a - \delta, a + \delta)$. En déduire que $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.

Exercice 96. * (forme indéterminée 1^∞) On sait que $(1 + 1/n)^n$ tend vers e (corollaire 3.26). Montrer que $(1 + 1/n)^{n \ln(a)}$ tend vers a , $a > 0$. Montrer que $(1 + 1/n)^{n^2}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $(1 + 1/n)^{\sqrt{n}}$ tend vers 0. Indication : prendre le logarithme. On admettra les propriétés usuelles des fonctions $\ln(x)$ et e^x .

5.9 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 5.15. Soient f, g des fonctions, de même domaine et continues en a . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$, αf et fg sont continues en a . Si g ne s’annule pas sur D , alors f/g est continue en a .

Démonstration. Ceci se déduit des théorèmes analogue sur les suites, et de la caractérisation de la continuité par les suites. $\square$

Théorème 5.16. Soit f, g des fonctions réelles. On suppose que $f(D_f) \subset D_g$, et on peut donc définir $g \circ f$. On suppose que f est continue en a , et que g est continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration. Soit $b = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en b , il existe $\delta > 0$ tel que $g(D_g \cap V(b, \delta)) \subset V(g(b), \epsilon)$. Comme f est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que $f(D_f \cap V(a, \eta)) \subset V(f(a), \delta)$. Donc $f(D_f \cap V(a, \eta)) \subset f(D_f) \cap f(D_f \cap V(a, \eta)) \subset D_g \cap V(b, \delta)$. Alors $g \circ f(D_f \cap V(a, \eta)) = g(f(D_f \cap V(a, \eta))) \subset g(D_g \cap V(b, \delta)) \subset V(g(f(a)), \epsilon)$. $\square$

Exercice 97. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Est-ce que la fonction f est nécessairement continue ?

Exercice 98. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0.

Exercice 99. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ n'est continue qu'en 0.

Exercice 100. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.

Exercice 101. Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions.

1. Montrer que $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ et que $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.
2. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D$; montrer que $\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$ sont aussi continues en x_0 .

5.10 Maximum et minimum

Théorème 5.17. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors $c, d \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

On dit que f atteint son minimum et atteint son maximum. L'hypothèse que f est défini sur un intervalle fermé est importante. Pour tous autres intervalles, le théorème n'est pas vrai en général; par exemple, la fonction $1/x$, définie sur $(0, \infty)$.

Démonstration. On considère $E = f([a, b])$, l'image de f . Alors E est non vide. Nous montrons que E est borné supérieurement. Par l'absurde : si ce n'est pas vrai, il existe pour tout n un $a_n \in [a, b]$ tel que $f(a_n) > n$: donc la suite $(f(a_n))$ tend vers l'infini. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass

(théorème 3.34), il existe une sous-suite (b_n) , de la suite (a_n) , qui converge vers une limite $\ell \in [a, b]$. La suite $(f(b_n))$ est une sous-suite de la suite $(f(a_n))$. Donc, par le théorème 3.29, $(f(b_n))$ tend vers l'infini : on obtient une contradiction avec la continuité de f en ℓ , puisque la suite $(f(b_n))$ doit tendre vers $f(\ell)$ par le théorème 5.14.

Comme E est borné supérieurement, il a un supremum, soit M . Celui-ci est la plus petite borne supérieure de E . Donc, pour tout n , il existe un élément de E qui est plus grand que $M - 1/n$; il existe donc $x_n \in [a, b]$ tel que $M - 1/n < f(x_n)$, et on a aussi $f(x_n) \leq M$: donc la suite $(f(x_n))$ tend vers M . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite (y_n) , de la suite (x_n) , qui tend vers une limite $d \in [a, b]$. Alors $f(y_n)$ tend vers $f(d)$ (théorème 5.14). Mais $(f(y_n))$ est une sous-suite de la suite $(f(x_n))$; donc $(f(y_n))$ tend vers M (théorème 3.29). Par unicité de la limite, $f(d) = M$. Donc $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(d)$.

Pour le minimum, le raisonnement est analogue. $\square$

5.11 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.18. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et y un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f(a) < f(b)$. On considère l'ensemble E des x dans $[a, b]$ tels que $f(x) \leq y$. Alors E est non vide, car a est dans E . De plus, E est borné, car $E \subset [a, b]$ donc b est une borne supérieure de E . Soit $c = \sup(E)$. Alors $c \leq b$, car c est la plus petite borne supérieure de E . De plus $a \leq c$ car $a \in E$. Donc $c \in [a, b]$.

Nous montrons que $f(c) = y$. Pour tout n , $c - 1/n$ n'est pas une borne supérieure de E , donc il existe $x_n \in E$ tel que $c - 1/n < x_n$; comme $x_n \in E$, on a $x_n \leq c$. Alors x_n tend vers c , donc $f(x_n)$ tend vers $f(c)$, et comme $f(x_n) \leq y$, par passage à la limite, $f(c) \leq y$.

Par l'absurde, supposons que $f(c) < y$; posons $\epsilon = y - f(c)$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $f([a, b] \cap V(c, \delta)) \subset V(f(c), \epsilon)$. Comme $a \leq c < b$, il existe $x \in [a, b] \cap V(c, \delta)$ tel que $c < x$ (faire un dessin). On a alors $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, donc $f(x) - f(c) < \epsilon = y - f(c)$, donc $f(x) < y$, d'où $x \in E$, par définition de E . Mais $c < x$: contradiction, car c est une borne supérieure de E . $\square$

Corollaire 5.19. 1) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

2) *L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.*

Démonstration. 1) Cela découle de l'exercice 27 et du théorème des valeurs intermédiaires.

2) On utilise 1) et le théorème 5.17. □

Exercice 102. Montrer que le polynôme $x^3 - 2x^2 + 1$ a une racine dans l'intervalle $(-1, 0)$.

Exercice 103. Montrer qu'un polynôme de degré impair a une racine dans $\mathbb{R}$. Utiliser la proposition 5.9 et le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 104. Soit $a > 0$ et n un entier naturel non nul. Montrer que la fonction $f(x) = x^n - a$, de domaine $[0, \infty)$, satisfait $f(0) < 0$ et $f(c) > 0$ pour $c > 0$ bien choisi. En déduire que a a une racine n -ème dans $[0, \infty)$.

Exercice 105. Donner un exemple de fonction continue définie sur un intervalle ouvert, dont l'image est un intervalle fermé.

5.12 Continuité uniforme

Définition 5.20. Une fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in D_f$, $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Ici, δ ne dépend ni de x ni de y , contrairement à la définition de continuité en un point.

Exemple La fonction $x \mapsto |x|$ est uniformément continue, car $||x| - |y|| \leq |x - y|$, et on peut donc prendre $\delta = \epsilon$.

Théorème 5.21. Une fonction uniformément continue est continue.

Démonstration. Laissez au lecteur. □

La réciproque n'est pas vraie, sauf avec une hypothèse supplémentaire.

Théorème 5.22. Toute fonction continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Par l'absurde : supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$ tels que $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. En choisissant $\delta = 1/n$, on trouve x_n, y_n tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (plus précisément l'exercice 62), il existe une suite (k_n) strictement croissante d'entiers naturels telle que les deux suites (x_{k_n}) et

(y_{k_n}) convergent, vers x et y respectivement. On a $|x_{k_n} - y_{k_n}| < 1/k_n$, donc par passage à la limite, $x = y$. Comme f est continue, les suites $(f(x_{k_n}))$ et $(f(y_{k_n}))$ convergent, vers $f(x) = f(y)$. Mais l'inégalité $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \epsilon$ donne, par passage à la limite, que $|x - y| \geq \epsilon$: contradiction. $\square$

Théorème 5.23. *Soit f une fonction uniformément continue et a un point d'accumulation de son domaine D , avec $a \notin D$. Alors la limite ℓ de f en a existe, et on peut prolonger f en a en une fonction continue en posant $f(a) = \ell$.*

Démonstration. Nous montrons l'existence de ℓ tel que pour toute suite (x_n) d'éléments de D , qui tend vers a , la suite $f(x_n)$ tend vers ℓ . Le théorème découle alors du théorème 5.14.

Soit donc (x_n) une telle suite. Soit $\epsilon > 0$, et δ comme dans la définition 5.20. Comme la suite est une suite de Cauchy, il existe N tel que pour tout $n, p > N$, on ait $|x_n - x_p| < \delta$. Alors $|f(x_n) - f(x_p)| < \epsilon$. Donc $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc, vers une limite que nous notons ℓ .

Soit (y_n) une autre suite qui tend vers a . Il existe donc ℓ' , qui est la limite de la suite $(f(y_n))$. Montrons que $\ell = \ell'$, en utilisant le corollaire 2.10. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/3$. Comme x_n et y_n tendent tous deux vers a , que $f(x_n)$ tend vers ℓ et que $f(y_n)$ tend vers ℓ' , il existe N tel que : $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \delta/2$, $|y_n - a| < \delta/2$, $|f(x_n) - \ell| < \epsilon/3$, et $|f(y_n) - \ell'| < \epsilon/3$. Pour un tel n , on a $|x_n - y_n| = |x_n - a + a - y_n| \leq |x_n - a| + |a - y_n| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$, d'où $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon/3$; donc $|\ell - \ell'| = |\ell - f(x_n) + f(x_n) - f(y_n) + f(y_n) - \ell'| \leq |\ell - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - \ell'| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$. $\square$

Exercice 106. *Une fonction est lipschitzienne de rapport k si pour tous x, y dans son domaine, on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Montrer qu'une telle fonction est uniformément continue.*

Exercice 107. *Montrer que la fonction $f(x) = \sin x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 108. *Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 109. *Montrer que la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$, mais qu'elle est uniformément continue sur $[1, \infty)$.*

Exercice 110. *Montrer que la fonction $\cos(\frac{1}{x})$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $(0, 1)$.*

5.13 Fonction réciproque

Une fonction f est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si pour tous x, y dans son domaine de définition, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). Elle est dite *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si pour tous x, y dans son domaine de définition, on a $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$). Elle est dite *monotone* si elle est croissante, ou si elle est décroissante ; enfin, elle est dite *strictement monotone* si elle est strictement croissante, ou si elle est strictement décroissante.

Théorème 5.24. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone, où I est un intervalle fermé (resp. ouvert non vide) de $\mathbb{R}$. Alors*

- a) f est une bijection de I vers $f(I)$, $f(I)$ est un intervalle fermé (resp. ouvert), et la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ existe.*
- b) f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) si f l'est.*
- c) f^{-1} est continue.*

Il existe une extension de ce théorème aux intervalles semi-ouverts ; nous laissons au lecteur le soin de la formuler.

Démonstration. a) f est injective car elle est strictement monotone. Elle est aussi surjective de I vers $f(I)$. Donc f est une bijection de I vers $f(I)$, et la fonction réciproque $f(I) \rightarrow I$ existe.

L'ensemble $f(I)$ est un intervalle, par le corollaire 5.19

1) Si I est fermé, $f(I)$ est un intervalle fermé par le corollaire 5.19.

2) Si $I = (a, b)$ est ouvert, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, posons $c = \inf(f(I))$ si cet infimum existe, sinon $c = -\infty$; et $d = \sup(f(I))$ si ce supremum existe, sinon $d = \infty$. Montrons que $f(I) = (c, d)$, et supposons f strictement croissante, sans perte de généralité (on peut remplacer f par $-f$). On ne peut avoir $c \in f(I)$, sinon $c \in \mathbb{R}$, $c = f(u)$, $u \in (a, b)$, et il existe alors $v \in (a, b)$, tel que $v < u$ et $f(v) < f(u) = c$, contredisant que c est une borne inférieure de $f(I)$. De même, $d \notin f(I)$. Il s'ensuit que $f(I) = (c, d)$.

b) Nous pouvons supposer que f est croissante et $y < y'$, $y, y' \in f(I)$. Il existe x, x' tels que $f(x) = y$, $f(x') = y'$. On ne peut pas avoir $x \geq x'$ car, f étant croissante, cela impliquerait $y = f(x) \geq f(x') = y'$. Donc $x < x'$, c'est-à-dire $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Donc f^{-1} est strictement croissante.

c) Nous pouvons supposer que f est croissante. Supposons que I est ouvert (le cas I fermé est omis). Donc $I = (a, b)$, $f(I) = (c, d)$, avec a, b, c, d comme expliqué en a). Soit $y_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$, autrement dit, $y_0 = f(x_0)$. Notons $\eta = \min(x_0 - a, b - x_0) > 0$. Soit $\epsilon > 0$. Par l'exercice 94, on peut supposer $\epsilon < \eta$. Alors $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$. D'après a),

$f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))$ est un intervalle ouvert ; il contient $y_0 = f(x_0)$, donc il est de la forme $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$; on a donc $f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)) = (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, et comme f est bijective, $f^{-1}((y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, donc $f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset f^{-1}((y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Donc f^{-1} est continue en y_0 . $\square$

Exercice 111. Montrer que si une fonction f est croissante, alors $-f$ est décroissante.

Exercice 112. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, est continue.

Exercice 113. 1) Sachant que $|\sin \theta| \leq |\theta|$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (ce qu'on peut montrer géométriquement), montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0. Indication : pour le cosinus, utiliser la formule $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ valable au voisinage de $x = 0$.

2) En utilisant le numéro précédent et les identités trigonométriques $\sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi$ et $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$, ainsi que $\cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta)$, montrer que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 114. * On veut montrer qu'une fonction continue injective est strictement monotone. Soit donc $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le domaine de définition est un intervalle I .

1) Montrer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que si $x < y < z$ et, soit $f(x) < f(y) > f(z)$, soit $f(x) > f(y) < f(z)$, alors f n'est pas injective.

2) On suppose f injective. Dédire de 1) que si $a < b < c < d$ et $f(b) < f(c)$, alors $f(a) < f(b)$ et $f(c) < f(d)$.

3) En déduire que s'il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) < f(y)$, alors f est strictement croissante.

4) Que se passe-t-il lorsque D_f est la réunion de plusieurs intervalles ? Exemple : la fonction $1/x^2$.

6 La dérivée

6.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 6.1. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$ un point d'accumulation de son domaine D_f . On dit que f est dérivable au point a si

la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On note $f'(a)$ cette limite, et on l'appelle la dérivée de f en a .

Si tout point du domaine en est un point d'accumulation, et si f est dérivable en tout point de son domaine, on dit que f est dérivable. Dans ce cas, la dérivée est une fonction $f' : D_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Notez que si D est une réunion d'intervalles, alors l'hypothèse sur les points d'accumulation est satisfaite (exercice 90).

On dit aussi *différentiable* au lieu de dérivable.

Exercice 115. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver $f'(0)$.

Exercice 116. Trouver une fonction continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable partout sauf aux points $0, 1, 2, \dots, n$.

6.2 Tangente

Supposons que $x \neq a$. La quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite qui passe par les deux points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ sur la courbe représentant la fonction f . Une telle droite s'appelle une *sécante* à la courbe. Lorsque x s'approche de a , on “voit” que la sécante “s'approche” de la tangente à la courbe au point $(a, f(a))$. C'est pourquoi on dit que $f'(a)$ est la *pente de la tangente* à la courbe au point $(a, f(a))$.

6.3 La dérivabilité implique la continuité

Théorème 6.2. Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Démonstration. On a $f(x) = f(a) + (x - a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si $f'(a)$ existe, on déduit que la limite de $f(x)$, quand x tend vers a , est $f(a)$. Donc f est continue en a (theorem 5.14). $\square$

6.4 Opération sur les fonctions dérivables

Théorème 6.3. Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables en a , point d'accumulation de D , et α un réel.

a) αf et $f + g$ sont dérivables en a , et $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$, $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

b) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (formule de Leibniz);

c) si g ne s'annule pas sur D , f/g est dérivable en a est $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. b) On a $\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Comme g est continue en a , et que f, g sont dérivables en a , la limite quand x tend vers a de cette quantité est $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

c) Supposons d'abord que $f(x) = 1$, et il s'agit donc de calculer la dérivée en a de $1/g$. On a $\frac{(1/g)(x) - (1/g)(a)}{x - a} = \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$, dont la limite est $\frac{-g'(a)}{g(a)^2}$, quand x tend vers a .

Le cas général se déduit facilement de ce cas particulier et de la formule de Leibniz. $\square$

Corollaire 6.4. Si f ne s'annule pas sur D_f et si elle est dérivable en a , alors $1/f$ est dérivable en a et $(1/f)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$.

Théorème 6.5. (règle de la chaîne) Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable en a , point d'accumulation de D_f , et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(D_f) \subset D_g$ (donc $g \circ f$ est définie); on suppose que $f(a)$ est un point d'accumulation de D_g , et que g est dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = (g' \circ f)(a)f'(a)$.

Démonstration. On définit $h : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} - g'(f(a)) & \text{si } y \neq f(a) \\ 0 & \text{si } y = f(a) \end{cases}$$

Comme g est dérivable en $f(a)$, on a $\lim_{y \rightarrow f(a)} h(y) = 0$, donc h est continue en $f(a)$. Par suite $h \circ f$ est continue en a (théorème 5.16), et $\lim_{x \rightarrow a} h \circ f(x) = 0$. On a $h(y)(y - f(a)) = g(y) - g(f(a)) - g'(f(a))(y - f(a))$. Avec $y = f(x)$, ça nous donne $h(f(x))(f(x) - f(a)) = g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x) - f(a))$. Par suite $\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = h(f(x))\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + g'(f(a))\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Quand x tend vers a , le membre droit tend vers $g'(f(a))f'(a)$, et on obtient le théorème. $\square$

Exercice 117. Sachant que les fonctions constantes, et la fonction x , sont dérivables (ce qu'on démontrera), montrer que tout polynôme est une fonction dérivable, ainsi que toute fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) sur son domaine de définition.

Exercice 118. Montrer que f^n est dérivable, si f est dérivable, et calculer la formule (récurrence sur n) ; même chose pour $n < 0$, en supposant que f ne s'annule pas.

Exercice 119. Montrer que la composée de n fonctions dérivables est une fonction dérivable, et calculer la formule de dérivation (récurrence sur n).

Exercice 120. Montrer que si f, g sont deux fois dérivables (c'est-à-dire, leurs dérivées sont dérivables), alors leur composée aussi, et calculer la formule.

Exercice 121. On définit par récurrence $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = e^{f_n(x)}$. Calculer la dérivée des f_n . Indication : la dérivée de e^x est e^x .

6.5 Fonction réciproque

Théorème 6.6. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone (donc $f(a, b)$ est un intervalle ouvert et la fonction réciproque $f^{-1} : f((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, théorème 5.24). Si $y_0 = f(x_0) \in f((a, b))$ est tel que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$.

Démonstration. Posons $F(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ si $x \neq x_0$, et $F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. On a alors $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Donc F est continue en x_0 . Donc $F \circ f^{-1}$ est continue en y_0 , ce qui implique que $\lim_{y \rightarrow y_0} F \circ f^{-1}(y) = F \circ f^{-1}(y_0) = F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, car $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Mais $F \circ f^{-1}(y) = \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$, d'où le théorème. $\square$

Exemple La fonction $x \mapsto y = x^n$ ($n > 0$ entier naturel), de $(0, \infty)$ dans lui-même, satisfait aux hypothèses. La fonction réciproque est $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{1/n} = x$, dont la dérivée en y est $\frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}(\frac{1}{y^{1/n}})^{n-1} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}$.

Exercice 122.

Montrer que la fonction $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \tan x$ est bijective. Montrer de plus que sa réciproque $\arctan x := f^{-1}(x)$ est dérivable, et qu'elle vaut $\frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 123. 1) Sachant que $|\theta| \leq |\tan \theta|$ pour $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (ce qu'on peut montrer par un argument géométrique), montrer, en utilisant le théorème des gendarmes et l'exercice 113, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

En déduire que la dérivée de $\sin(x)$ en 0 existe et vaut 1. Puis que celle de $\cos(x)$ en 0 est 0. Indications : utiliser les théorèmes 6.5 et 6.6.

2) À l'aide des identités trigonométriques (voir l'exercice 113), montrer que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont dérivables.

6.6 Extrema

Définition 6.7. Un maximum (resp. minimum) local d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est un point $a \in D$ tel qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Un extremum local de f est un maximum local, ou un minimum local, de f .

Théorème 6.8. (Fermat) Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f a un extremum local $x_0 \in (a, b)$, et si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que l'extremum soit un maximum. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) \leq f(x_0)$. On en déduit que pour $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, on a $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Il s'ensuit que la limite à gauche, quand x tend vers x_0 , de cette quantité, est ≥ 0 . De manière analogue, la limite à droite est ≤ 0 . Donc, par le théorème 5.6, la limite est nulle ; c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$.

Pour un minimum, c'est analogue, ou alors on utilise $-f$. □

L'interprétation géométrique, avec la sécante, de ce résultat, est particulièrement frappant.

Exercice 124. * Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si $f'(a) < 0 < f'(b)$ (resp. $f'(a) > 0 > f'(b)$), montrer qu'il existe $x \in (a, b)$ tel que $f'(x) = 0$. Indications : f possède un minimum (resp. un maximum) dans $[a, b]$. Montrer que si $f'(a) < 0 < f'(b)$, alors le minimum doit être dans (a, b) : s'il est en a , il y a d'après l'hypothèse des x proches de a tels que $f(x) < f(a)$, contradiction. Utiliser le théorème 6.8.

6.7 Théorème de Rolle

Théorème 6.9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$, dérivable en tout point de (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Par le corollaire 5.19, $f([a, b]) = [m, M]$. Si $m = M$, alors f est constante, et par suite $f'(c) = 0$ pour tout c dans (a, b) . Sinon, on

a $m < M$, et on doit avoir soit $m < f(a)$, soit $f(a) < M$. Supposons qu'on ait le deuxième cas. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $M = f(c)$. Comme $f(a) = f(b) < f(c)$, on a $c \in (a, b)$. Comme $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in (a, b)$, c est un maximum local. Par le théorème 6.8, $f'(c) = 0$. Le premier cas est analogue. $\square$

Exercice 125. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, avec $a < b$, dérivable en tout point de (a, b) . On suppose qu'il y a deux racines $r < s$ de l'équation $f'(x) = 0$, mais qu'il n'y en a pas dans l'intervalle (r, s) . Montrer que dans l'intervalle (r, s) , il y a au plus une solution de l'équation $f(x) = 0$.

En déduire que l'équation $2x^4 - 3x^2 + k = 0$ a au plus une solution dans l'intervalle $(0, \sqrt{3}/2)$.

6.8 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.10. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$, dérivable en tout point de (a, b) . Il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou, de manière équivalente $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Ce théorème a aussi une interprétation géométrique, ainsi que le théorème de Rolle, qu'il généralise, et utilise dans sa preuve.

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. $\square$

Corollaire 6.11. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable en tout point de (a, b) . Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in (a, b)$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Démonstration. Si $x, y \in [a, b]$, $x < y$, alors il existe $c \in (x, y) \subset (a, b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Si $f'(c) > 0$, alors $f(x) < f(y)$. $\square$

Corollaire 6.12. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, dérivable en tout point de (a, b) . Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors f est constante.

Démonstration. Si $x, y \in [a, b]$, $x < y$, alors il existe $c \in (x, y) \subset (a, b)$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Donc $f(x) = f(y)$. $\square$

Exercice 126. Montrer que si deux fonctions ont même dérivée, alors leur différence est une fonction constante.

Exercice 127. Montrer que l'équation $\cos x = x^2$ possède exactement deux solutions.

Exercice 128. * Montrer qu'une fonction dérivée satisfait au théorème des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux). Indication : utiliser l'exercice 124.

Exercice 129. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) . Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$, montrer que soit f' prend seulement des valeurs strictement positives dans (a, b) , soit elle prend seulement des valeurs strictement négatives dans (a, b) . En conclure que f est strictement monotone. Indication : utiliser l'exercice 124 et appliquer le corollaire 6.11.

6.9 Théorème de la moyenne de Cauchy

Théorème 6.13. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions, avec $a < b$, dérivables en tout point de (a, b) , avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Il existe $c \in (a, b)$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration. D'après le théorème de Rolle, $g(a) \neq g(b)$. On applique le théorème de Rolle à $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. $\square$

6.10 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Lorsqu'une fonction est dérivable sur son domaine de définition, on obtient la fonction dérivée f' de même domaine. On peut continuer ainsi, et on définit la *dérivée seconde* f'' , ..., la *dérivée n -ème*. Notation : $f^{(n)}$. Si celle-ci existe, on dit que f est n fois dérivable. Notez que $f^{(0)}$ signifie f .

Théorème 6.14. Soit $n \geq 1$, deux nombre réels $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $n - 1$ fois dérivable sur $[a, b]$, et n fois dérivable sur (a, b) . Il existe alors $c \in (a, b)$ tel que

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} = f^{(n)}(c) \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Notez que pour $n = 1$, c'est le théorème des accroissements finis (théorème 6.10).

Démonstration. Définissons $h \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(b-a)^n}{n!}h = f(b) - \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}. \quad (4)$$

Considérons la fonction de la variable $x \in [a, b]$: $F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - \frac{(b-x)^n}{n!}h$.

La fonction F est continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) , et on a $F(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} - \frac{(b-a)^n}{n!}h = 0$, et $F(b) = f(b) - \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k)}(b) \frac{(b-b)^k}{k!} - \frac{(b-b)^n}{n!}h = 0$, en tenant compte du fait que le terme pour $k = 0$ dans F est $f(x)$.

On peut donc appliquer le théorème de Rolle (théorème 6.9) : il existe $c \in (a, b)$ tel que $F'(c) = 0$. On a $F'(x) = - \sum_{k=0}^{k=n-1} f^{(k+1)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{k=n-1} f^{(k)}(x) \left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \left(-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}h \right) = -f^{(n)}(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}h$. Comme $F'(c) = 0$, on obtient que $f^{(n)}(c) = h$. En remplaçant h par $f^{(n)}(c)$ dans (4), on obtient le théorème. $\square$

Exercice 130. Ecrire la formule de Taylor pour la fonction $\sin(x)$, avec $n = 6$, $a = 0$ et $b > 0$. En déduire que $\sin(b) < b - \frac{b^3}{6} + \frac{b^5}{120}$ si $b \in (0, \pi]$.

Exercice 131. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Exercice 132.

Donner une formule pour la dérivée n -ème de la fonction $f(x) = x \sin x$.

6.11 Règle de l'Hôpital

Théorème 6.15. Soient f, g deux fonctions dérivables sur (a, b) , où $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \infty$. Soit $x_0 = a$ ou b , ou $x_0 \in (a, b)$. On suppose que :

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (resp. $= \infty$);
 b) $g(x), g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$;
 c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
 Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Démonstration.

□

7 Topologie de $\mathbb{R}$

7.1 Ouverts

Définition 7.1. Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un point x de E est appelé point intérieur de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $(x - \delta, x + \delta) \subset E$. On note $\text{int}(E)$ l'ensemble des points intérieurs de E , et on l'appelle l'intérieur de E . Un ensemble est dit ouvert s'il est égal à son intérieur; autrement si tous ses points sont intérieurs.

Théorème 7.2. (i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts.

(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration. (i) Tous les points de l'ensemble vide sont des points intérieurs (car $\emptyset$ n'a pas de points).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - 1, x + 1) \subset \mathbb{R}$, donc x est un point intérieur de $\mathbb{R}$.

(ii) Soient $\{E_i, i \in I\}$ un ensemble d'ouverts de $\mathbb{R}$. Posons $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Soit $x \in E$. Il existe alors $i \in I$ tel que $x \in E_i$. Alors x est un point intérieur de E_i . Il existe donc $\delta > 0$ tel que $(x - \delta, x + \delta) \subset E_i$. Donc $(x - \delta, x + \delta) \subset E$, et x est un point intérieur de E .

(iii) Une récurrence facile permet de se ramener à l'intersection de deux ouverts. Soit donc E, E' deux ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in E \cap E'$. Alors $x \in E$ et $x \in E'$. Donc x est un point intérieur de E , et de E' . Il existe donc $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que $(x - \delta, x + \delta) \subset E$ et $(x - \delta', x + \delta') \subset E'$. Alors $(x - \Delta, x + \Delta) \subset E \cap E'$, si on pose $\Delta = \min(\delta, \delta')$. □

Exercice 133. Montrer que x est un point intérieur de E si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que $[x - \delta, x + \delta] \subset E$.

Exercice 134. Montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert.

Exercice 135. Faire le raisonnement par récurrence de la partie (iii) de la preuve du théorème 7.2.

7.2 Fermés

Définition 7.3. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un fermé si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert.*

Théorème 7.4. (i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés.

(ii) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

(iii) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Démonstration. (i) Leurs complémentaires sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$, qui sont ouverts.

(ii) Pour un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$, notons $\tilde{E}$ son complémentaire. Soient $E_i, i \in I$ des fermés de $\mathbb{R}$. Comme $\tilde{E}_i$ est ouvert, $\bigcup_{i \in I} \tilde{E}_i$ est ouvert (théorème 7.2 (ii)). Mais on a

$$\widetilde{\bigcap_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \tilde{E}_i.$$

Donc $\widetilde{\bigcap_{i \in I} E_i}$ est ouvert. Donc $\bigcap_{i \in I} E_i$ est fermé.

(iii) On peut se ramener à deux fermés, par une récurrence facile. Soient donc E, F des fermés. Donc $\tilde{E}, \tilde{F}$ sont ouverts. Donc $\tilde{E} \cap \tilde{F}$ est ouvert (théorème 7.2 (iii)). Comme $\widetilde{(E \cup F)} = \tilde{E} \cap \tilde{F}$, $\widetilde{(E \cup F)}$ est ouvert. Donc $E \cup F$ est fermé. $\square$

Théorème 7.5. *Un ensemble est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.*

Démonstration. Supposons que E soit fermé. On sait que $F = \mathbb{R} \setminus E$ est ouvert. Soit x un élément de F . Il existe $\delta > 0$ tel que $(x - \delta, x + \delta) \subset F$, et par suite $(x - \delta, x + \delta)$ ne rencontre pas E ; donc x n'est pas un point d'accumulation de E . Donc tout point d'accumulation de E est dans E .

Réciproquement, supposons que E contienne tous ses points d'accumulation. Donc pour tout $x \in F$, x n'est pas un point d'accumulation de E ; il existe donc $\delta > 0$ tel que E ne rencontre pas $V'(x, \delta)$; comme $x \in F$, E ne rencontre pas $V(x, \delta)$, et donc $V(x, \delta) \subset F$; F est donc ouvert. $\square$

Corollaire 7.6. *Un ensemble E est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de E est dans E .*

Démonstration. Supposons que la limite de toute suite convergente d'éléments de e est dans E . Tout point d'accumulation de E est la limite d'une suite dont tous les termes sont dans E . Donc la condition du corollaire implique, avec le théorème, que E est fermé.

Réciproquement, supposons E fermé. Soit (x_n) convergeant vers x , $x_n \in E$ pour tout n . Si $x \notin E$, alors x n'est pas un point d'accumulation de E , par le théorème. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ne rencontre pas E . Or il existe n tel que $|x - x_n| < \epsilon$. Comme $x_n \in E$, on a une contradiction. On doit donc avoir $x \in E$. $\square$

Exercice 136. *Montrer qu'un intervalle fermé est un fermé. Montrer que $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ sont fermés ($a, b \in \mathbb{R}$).*

Exercice 137. *On considère le sous-ensemble $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il est fermé.*

Exercice 138. *Montrer que si F est fermé et borné, alors son supremum est dans F .*

Exercice 139. ** Soit (a_n) une suite. Soit L l'ensemble des limites des sous-suites convergentes de la suite (a_n) . Montrer que L est fermé.*

7.3 Adhérence et frontière

Définition 7.7. *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un point d'adhérence de E si pour tout $\delta > 0$, $V(x, \delta)$ rencontre E .*

On appelle adhérence de E l'ensemble de ses points d'adhérence. Notation : $\bar{E}$.

Théorème 7.8. *Un point d'adhérence de E soit est dans E , soit est un point d'accumulation de E , et vice-versa. Autrement dit : $\bar{E} = E \cup E'$, où E' est l'ensemble des points d'accumulation de E .*

Notez que la réunion n'est pas disjointe en général : il peut y avoir des points de E qui sont des points d'accumulation de E .

Démonstration. Si x est un point d'adhérence, alors pour tout $\delta > 0$, $V(x, \delta)$ rencontre E . Si x n'est pas un point d'accumulation, il existe $\delta > 0$ tel que E ne rencontre pas $V'(x, \delta)$; dans ce cas on doit avoir $x \in E$.

Réciproquement, tout élément de E est un point d'adhérence. Et tout point d'accumulation de E est aussi un point d'adhérence. $\square$

Théorème 7.9. $\mathbb{R} \setminus \bar{E} = \text{int}(\mathbb{R} \setminus E)$.

Démonstration. $\subset$: soit $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{E}$; alors x n'est pas adhérent à E , donc il existe $\delta > 0$ tel que E ne rencontre pas $V(x, \delta)$; donc $V(x, \delta) \subset \mathbb{R} \setminus E$, et par suite $x \in \text{int}(\mathbb{R} \setminus E)$.

$\supset$: soit $x \in \text{int}(\mathbb{R} \setminus E)$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $V(x, \delta) \subset \mathbb{R} \setminus E$; donc E ne rencontre pas $V(x, \delta)$, et x n'est pas un point d'adhérence de E . $\square$

Corollaire 7.10. $\bar{E}$ est fermé et $\text{int}(E)$ est ouvert.

Démonstration. Il suffit de prouver la deuxième assertion, par le théorème 7.9.

Si $x \in \text{int}(E)$, il existe $\delta > 0$ tel que $V(x, \delta) \subset E$. Alors, pour tout $y \in V(x, \delta/2)$, $V(y, \delta/2) \subset V(x, \delta) \subset E$, donc $y \in \text{int}(E)$. Donc $V(x, \delta/2) \subset \text{int}(E)$, ce qui prouve que $\text{int}(E)$ est ouvert. $\square$

Définition 7.11. La frontière de E est $\partial(E) = \bar{E} \setminus \text{int}(E)$.

Proposition 7.12. $\partial(E) = \bar{E} \cap \bar{F}$, où F est le complément de E .

Démonstration. Il suffit de montrer que $\bar{F} = \mathbb{R} \setminus \text{int}(E)$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \text{int}(E)$, alors $x \notin \text{int}(E)$. Soit $\delta > 0$ quelconque. Alors $V(x, \delta)$ n'est pas contenu dans E . Donc $V(x, \delta)$ rencontre F . Par suite, $x \in \bar{F}$.

Réciproquement, si $x \in \bar{F}$, alors pour tout $\delta > 0$, $V(x, \delta)$ rencontre F . Donc aucun $V(x, \delta)$ n'est pas contenu dans E . Donc $x \notin \text{int}(E)$. Par suite $x \in \mathbb{R} \setminus \text{int}(E)$. $\square$

Exercice 140. Montrer que l'adhérence de E est égal à l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de E .

Exercice 141. Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son adhérence est égale à $\mathbb{R}$.

7.4 Compacts

Définition 7.13. Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est dit compact si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une suite convergente vers un élément de E .

Théorème 7.14. K est compact si et seulement si K est fermé et borné.

Démonstration. Supposons K fermé et borné. Soit (a_n) une suite telle que $\forall n, a_n \in K$. Comme K est borné, la suite est bornée. D'après le théorème 3.34, elle possède une sous-suite convergente. La limite de celle-ci est dans K car K est fermé (corollaire 7.6). Donc K est compact.

Supposons que K ne soit pas borné. Il existe alors une suite qui tend vers $\pm\infty$. Donc toute sous-suite tend aussi vers $\pm\infty$. Donc K n'est pas compact.

Supposons que K ne soit pas fermé. Il existe alors une suite convergente d'éléments de K dont la limite n'est pas dans K (corollaire 7.6). Donc toute sous-suite tend aussi vers cette limite. Donc K n'est pas compact. $\square$

Exercice 142. *Quels sont les intervalles compacts ?*

Exercice 143. *Montrer que l'ensemble des termes d'une suite convergente, auquel on ajoute sa limite, est compact.*

7.5 Théorème de Heine-Borel

Définition 7.15. *Un recouvrement d'un ensemble K est une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ensembles telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. On dit qu'il est fini si I est fini. Un recouvrement extrait (ou un sous-recouvrement) du précédent est un recouvrement de la forme $(U_j)_{j \in J}$, où $J \subset I$.*

Un recouvrement par des ouverts de E est un recouvrement tel que chaque U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 7.16. *Un ensemble K est compact si et seulement si de tout recouvrement par des ouverts de K , on peut extraire un recouvrement fini.*

Démonstration. Si K n'est pas borné, alors $((-n, n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement par des ouverts de K , dont on ne peut extraire aucun recouvrement fini.

Si K n'est pas fermé, il a un point d'accumulation $x \notin K$ (théorème 7.5). Alors $(\mathbb{R} \setminus [x - \delta, x + \delta])_{\delta > 0}$ est un recouvrement de K par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un recouvrement fini.

Supposons maintenant que K est compact ; donc K est fermé et borné (théorème 7.14). Soit $\mathcal{O} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. Par l'absurde supposons qu'il n'ait pas de sous-recouvrement fini. Comme K est borné, il existe un intervalle fermé $[a, b]$ qui contient K . Soit m le milieu de cet intervalle. Clairement $\mathcal{O}$ est aussi un recouvrement de $K \cap [a, m]$ et de $K \cap [m, b]$. Comme K est la réunion de ces deux ensembles, l'un au moins n'a pas de sous-recouvrement fini. On répète cette dichotomie, et on trouve donc une suite croissante a_n et une suite décroissante b_n telle que : 1) $a_0 = a, b_0 = b$; 2) $b_n - a_n = (b - a)/2^n$; 3) $\mathcal{O}$ est un recouvrement de $E \cap [a_n, b_n]$ qui n'a pas de sous-recouvrement fini.

Comme a_n et b_n sont des suites monotones bornées, elles ont chacune une limite, et par 2), c'est la même limite, soit ℓ . Par 3), qui implique que

$E \cap [a_n, b_n]$ est non vide, il existe $e_n \in E \cap [a_n, b_n]$; par le théorème des gendarmes, e_n tend aussi vers ℓ . Comme E est fermé, $\ell \in E$ (grâce au corollaire 7.6). Comme $\mathcal{O}$ est un recouvrement de E , il existe $i \in I$ tel que $U = U_i$ contient ℓ . Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $V(\ell, \delta) \subset U$. Choisissons n tel que $b_n - a_n = (b - a)/2^n < \delta$. Puisque $\ell \in [a_n, b_n]$ (parce que pour tous $p \geq n$, $e_p \in [a_p, b_p] \subset [a_n, b_n]$, cette dernière inclusion découlant de $a_p \geq a_n, b_p \leq b_n$, et en utilisant le passage à la limite quand $p \rightarrow \infty$), on a $|\ell - a_n| = \ell - a_n < b_n - a_n < \delta$ et de même, $|b_n - \ell| < \delta$. Donc $[a_n, b_n] \subset V(\ell, \delta) \subset U$. Donc $E \cap [a_n, b_n] \subset U$, et cela contredit 3). $\square$

8 Solutionnaire (esquisses)

1 Non, non, non.

2 Montrons d'abord que $a > b \Leftrightarrow -a < -b$. En effet, $a > b$ implique par (1) que $a + (-a) > b + (-a)$, donc $0 > b - a$. Par (1) encore, on obtient $0 + (-b) > b - a + (-b)$, donc $-b > -a$. L'implication inverse se démontre de manière analogue.

Supposons maintenant que $x, y, a \in \mathbb{R}, x < y, a < 0$. Alors $(-a) > 0$, ce qui par (2) implique que $(-a)x < (-a)y$. Par la règle des signes on obtient, $-ax < -ay$. Donc par ce qui précède, $ax > ay$.

3

- On remplace dans (2) x, y, a par $0, x, x$.
- Dans ce qui précède, on remplace x par 1.
- Si on avait $x^{-1} < 0$, on obtiendrait par (3) que $1 = xx^{-1} < 0x^{-1} = 0$.
- Si $x < y$, cela découle de (1) : on a $xa < ya$ donc $xa \leq ya$. Si $x = y$, on a $xa = ya$ donc $x \leq ya$.
- Si $a = 0$, on a $xa = ya$, donc $xa \leq ya$. Supposons maintenant $a > 0$. Si $x < y$, cela découle de (2). Si $x = y$, on a $xa = ya$, donc $xa \leq ya$.
- Si $a = 0$, on a $xa = ya$, donc $xa \geq ya$. Supposons maintenant $a < 0$. Si $x < y$, cela découle de (3). Si $x = y$, on a $xa = ya$, donc $xa \geq ya$.

4

- Par transitivité de l'inégalité, on a $a \leq c$. Si on avait $a = c$, alors $a \leq b$ et $b \leq a$, donc $a = b$, ce qui n'est pas.
- Par (1), on a $x + x' < y + x'$. Si $x' < y'$, on a par (1), $y + x' < y + y'$, donc $x + x' < y + y'$ par ce qui précède. Si par contre $x' = y'$, alors $x + x' < y + x' = y + y'$.
- Si $x < y$, on vient de le voir. On peut donc supposer $x = y$; par l'exercice 3, $x + x' \leq x + y' = y + y'$.
- Remarquons qu'il découle de (2) que le produit de deux réels stric-

tement positifs est strictement positif. Ceci prouve ce qu'il faut démontrer dans le cas où $a = 0$ et dans le cas où $c = 0$. Nous pouvons donc supposer que $a, c > 0$. Alors par (2), on a $ac < ad < bd$.

— Supposons que $a < b$ et $c < d$; ce cas découle de ce qu'on a vu plus haut. Si $a = b$, alors par l'exercice 3, $ac \leq ad = bd$. Si $c = d$, alors de même, $ac \leq bc = bd$.

5 Récurrence sur n . Cas de base $n = 1$: évident. Si $x_1 + \dots + x_{n+1} = 0$, alors soit $a = x_1 + \dots + x_n$ et $b = x_{n+1}$; on a alors $a + b = 0$. Si $a > 0$, alors en ajoutant b , on trouve $a + b > b \geq 0$, donc $a + b > 0$: contradiction. Donc $a = 0$. Par hypothèse de récurrence, les x_i sont nuls, pour $i = 1, \dots, n$; donc $x_{n+1} = 0$ aussi.

7 Faux.

8 $(0, 1)$.

9 Infimum : 0; supremum et maximum : 1; pas de minimum.

10 A : l'infimum est 0, le supremum est 1. B : l'infimum est 0, le supremum est $3/2$.

11 Par hypothèse, il existe $x \in A \cap B$. Comme $\inf(A)$ est une borne inférieure de A , et que $x \in A$, on a $\inf(A) \leq x$. Symétriquement, $x \leq \sup(B)$. Donc $\inf(A) \leq x \leq \sup(B)$.

12 1. $\inf(A)$ est une borne inférieure de A , donc de $A \cap B$; celui-ci étant non vide, a un infimum, qui est $\geq \inf(A)$; de même il est $\geq \inf(B)$.

2. $A = \{0, 2\}, B = \{1, 2\}$.

13 1. Tout $y \in B$ est une borne supérieure de A ; donc, A, B étant non vides, A a un supremum, qui est le minimum de ses bornes supérieures, et donc $\sup(A) \leq y, \forall y \in B$.

2. Donc $\sup(A)$ est une borne inférieure de B , et par suite, $\inf(B)$ existe et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

14 Soit $x \in A \cap B$; alors $\inf(A) \leq x \leq \sup(B)$.

15 $E = (-1, 3)$, donc $\inf(E) = -1, \sup(E) = 3$.

16 C'est parce que $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ n'est pas rationnelle, et que la somme de deux rationnels est rationnelle.

17 Aucune somme de 1 plusieurs fois avec lui-même n'est nulle (exercice 5). Maintenant, si deux sommes distinctes donnaient le même résultat, on trouverait que leur différence est nulle, et ça contredirait ce qu'on vient de voir. Donc $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.

2. Supposons $i(n) = i(p), n, p \in \mathbb{Z}$. On peut supposer $n \leq p$. On a $i(p - n) = 0$, donc par la première partie, $n - p = 0$, car $p - n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour tous $a, b \in \mathbb{Z}, i(a + b) = i(a) + i(b)$ et $i(ab) = i(a)i(b)$. Cela se prouve d'abord pour $a, b \in \mathbb{N}$ par récurrence, Puis on l'étend à tout $\mathbb{Z}$ en utilisant la règle des signes. On en déduit $i(a - b) = i(a) - i(b)$.

4. Supposons que $i(p/q) = i(p'/q')$. Alors $i(p)i(q)^{-1} = i(p')i(q')^{-1}$, donc $i(p)i(q') = i(p')i(q)$. Donc par 3, $i(pq' - p'q) = i(pq') - i(p'q) = i(p)i(q') - i(p')i(q) = 0$; donc par 2, $pq' - p'q = 0$; par suite, dans $\mathbb{Q}$ on a $pq' = p'q$ et $p/q = p'/q'$.

18 Si $x \geq 0$, alors $x + (-x) \geq 0 + (-x)$ (par l'exercice 3), donc $-x \leq 0$, donc $-x \leq x$, et $|x| = x = \max(x, -x)$. L'autre cas est analogue.

19 Si $x \geq y$, alors $x + y + |x - y| = x + y + x - y = 2x$, dont la moitié vaut $x = \max(x, y)$. L'autre cas est symétrique.

20 Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons que c'est vrai pour $n \geq 1$, et montrons-le pour $n + 1$: on a $|x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}| = |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}|$ (par l'inégalité du triangle) $\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|$ par hypothèse de récurrence.

21 Supposons que $E' = \{|x|, x \in E\}$ soit borné. Il existe alors M tels que $\forall x \in E, |x| \leq M$; on a $-M \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq M$; donc E a la borne inférieure $-M$ et la borne supérieure M : E est borné.

Réciproquement, si E est borné, il existe a, b tels que $\forall x \in E, a \leq x \leq b$; alors $|x| = \max(x, -x)$, et donc $|x| \leq \max(b, -a)$, qui est une borne supérieure de E' , lequel a 0 pour borne inférieure.

22 On a, pour tout entier naturel n : $|\frac{2n}{2n+3} - 1| < \frac{1}{327} \Leftrightarrow -\frac{1}{327} < \frac{2n}{2n+3} - 1 < \frac{1}{327} \Leftrightarrow -\frac{2n+3}{327} < -3 < \frac{2n+3}{327} \Leftrightarrow -2n - 3 < -981 < 2n + 3 \Leftrightarrow 2n > -984 \text{ et } -2n < -978 \Leftrightarrow 2n > 978 \Leftrightarrow n > 489$. On peut prendre $N = 489$, ou n'importe quel nombre plus grand que 489.

23 Il existe n entier plus grand que $1/\epsilon$.

24 Si $z = 0$, on obtient le résultat par anti-symétrie de l'égalité. Si $z > 0$, il existe pour tout $\epsilon > 0$ un entier n tel que $z/n < \epsilon$ (variante de l'exercice 23). Alors l'hypothèse implique que $0 \leq y - x \leq z/n < \epsilon$, donc le corollaire 2.10 implique que $y - x = 0$.

25 Si $k = 0$, alors $p = m$, $p \leq x$ et $x \leq p$, donc $x = p$ est entier, et on prend $n = x$.

Supposons que le résultat est vrai pour $k \geq 0$, et prouvons-le pour $k + 1$. Supposons donc $p - m = k + 1$. Si $x \geq m + 1$, alors $m + 1 \leq x \leq p$ et $p - (m + 1) = k$, d'où l'existence de n par hypothèse de récurrence. Si $x < m + 1$, on prend $n = m$.

26 On a $q = \lfloor a/b \rfloor \leq a/b < q + 1$, donc, en multipliant par b (qui est > 0), que $bq \leq a < bq + b$. Ceci implique $0 \leq a - bq$ et $a - bq < b$. On pose $r = a - bq$.

Si a, b sont entiers, alors $a - bq$ aussi.

27 Si $I = [a, b]$, alors $I = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$. Donc, si $x, z \in I$ et $x \leq y \leq z$, alors $a \leq x \leq y \leq z \leq b$, d'où $a \leq y \leq b$ et enfin $y \in I$. Les huit

autres cas d'intervalles sont analogues.

Réciproquement, supposons que $I \subset \mathbb{R}$ et que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x < y < z$ et $x, z \in I$, on a $y \in I$. Si I est vide, on a $I = (0, 0)$, qui par définition est un intervalle. Supposons donc I non vide. Par le théorème 2.4, $b = \sup(I)$ existe si I a une borne supérieure; si I n'en a pas, posons $b = \infty$. Par le théorème 2.5, $a = \inf(I)$ existe si I a une borne inférieure; si I n'en a pas, posons $a = -\infty$.

Montrons d'abord que $(a, b) \subset I$. Soit $y \in (a, b)$. Si $a = -\infty$, I n'est pas borné inférieurement et il existe $x \in I$ tel que $x \leq y$; si a est réel, alors $a = \inf(I)$, donc comme $a < y$, y n'est pas une borne inférieure de I et il existe aussi un tel x . Symétriquement, il existe $z \in I$ tel que $y \leq z$. Alors, par hypothèse sur I , $y \in I$.

Notons aussi $[a, b]$ l'intervalle quand $a = -\infty$ ou $b = \infty$; par exemple $[-\infty, 1]$ désignera $(-\infty, 1]$. Avec ces notations, montrons que $I \subset [a, b]$. Soit $y \in I$. Alors, par construction de a et b , $a \leq y \leq b$. Donc $y \in [a, b]$.

On a donc $(a, b) \subset I \subset [a, b]$. On en déduit que I est un des neuf intervalles décrit dans la section 2.9.

28 Le premier ensemble est $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ et le second est $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

29 Il suffit de vérifier que le formule finale est correcte pour $n = 0$ et $n = 1$, et qu'elle est compatible avec le formule de récurrence.

30 Récurrence sur n .

31 Supposons (a_n) satisfait l'hypothèse

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, |a_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors $\epsilon/2 > 0$. Il existe donc par l'hypothèse ci-dessus un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, |a_n - \ell| \leq \epsilon/2$. Comme $\epsilon/2 < \epsilon$, on a donc $\forall n > N, |a_n - \ell| < \epsilon$. Donc la suite (a_n) tend, par définition, vers ℓ .

Réciproquement, si (a_n) tend vers ℓ , alors, puisque $x < \epsilon$ implique $x \leq \epsilon$, (a_n) satisfait l'hypothèse ci-dessus.

Les deux autres cas sont analogues.

32 On peut bien appliquer les théorèmes sur les opérations de suites. Mais on peut le faire à la main comme suit. On sait que $\forall \epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, |x_n - h| \leq \epsilon$. On a alors $\forall n > N, |y_n - (h + 1)| = |x_n + 1 - h - 1| = |x_n - h| < \epsilon$.

33 1. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'exercice 23, il existe N tel que $1/n < \epsilon$. Alors, pour tout $n > N$, on a $|x_n| \leq 1/n < 1/N < \epsilon$, donc $|x_n - 0| < \epsilon$.

2. Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, |x_n - \ell| < \epsilon$; donc $|(x_n - \ell) - 0| < \epsilon$, et il s'ensuit que la suite $(x_n - \ell)$ tend vers 0. La réciproque est analogue.

34 Soit $\epsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier N tel que $N > 1/\epsilon^2$. Donc, pour tout entier $n \geq N$, on a $n > 1/\epsilon^2$. Alors $1/\sqrt{n} < \epsilon$ (pourquoi?).

35 On a $\sqrt[n]{2} > 1$, donc $\sqrt[n]{2} = 1 + h_n$, $h_n > 0$. La formule du binôme implique pour $n \geq 2$, $2 = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \dots$; donc $2 > 1 + nh_n$, $h_n < 1/n$ et $h_n \rightarrow 0$. Donc $1 + h_n \rightarrow 1$.

36 Si on prend " $\forall \epsilon \geq 0$ " dans la définition, ou dans une des trois conditions de l'exercice **31**, on obtient les suites ultimement constantes.

37 Supposons que l'ensemble $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit fini. Soit ℓ la limite de la suite. Supposons par l'absurde que $\ell \notin X$. Posons $\epsilon = \min\{|x - \ell| \mid x \in X\}$; alors $\epsilon > 0$. Il existe donc N tel que $\forall n > N$, $|x_n - \ell| < \epsilon$. Prenons $n = N + 1$. On a $x_n \in X$, donc $|x_n - \ell| < \epsilon \leq |x_n - \ell|$: une contradiction.

Par suite, $\ell \in X$. Posons $\epsilon' = \min\{|x - \ell|, x \in X \setminus \{\ell\}\}$. Alors $\epsilon' > 0$. Il existe N' tel que $\forall n > N'$, $|x_n - \ell| < \epsilon'$. On doit alors avoir $x_n = \ell$. En effet, dans le cas contraire, comme $x_n \in X \setminus \{\ell\}$, on obtient $\epsilon' \leq |x_n - \ell| < \epsilon'$, une contradiction.

38 Si la suite (a_n) est bornée, il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$. Alors $-M \leq a_n \leq M$, donc on peut prendre $A = -M, B = M$.

Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $A \leq a_n \leq B$, alors soit $a_n \geq 0$ et alors $|a_n| = a_n \leq B$, soit $a_n < 0$ et alors $|a_n| = -a_n \leq -A$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on $|a_n| \leq M$, avec $M = \max(B, -A)$.

39 Cela découle de l'exercice **38**.

40 1. S'il y a une limite, c'est aussi la limite de la suite décalée (x_{n+1}) . De l'égalité $x_{n+1} = 2x_n^2$ on déduit que la limite x doit satisfaire $x = 2x^2$. Donc $x = 0$ ou $x = 1/2$.

2. Une récurrence immédiate montre que $x_n \geq 2$. Donc la limite devrait satisfaire $x \geq 2$: contradiction. On peut montrer que $x_n = 2^{2^{n+1}-1}$, qui tend donc vers l'infini.

41 On a $x_n = \frac{3}{1 + \sqrt{1+3/n}}$, qui tend vers $3/2$.

42 Pour n assez grand, on a $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$, car $1 \leq a \leq n$. Donc par le théorème des gendarmes et le corollaire **3.13**, la limite cherchée est 1. On peut aussi raisonner comme dans l'exercice **35**.

43 Suivre les indications.

44 On a $|a^n/n!| = |a|^n/n!$ et on peut donc supposer que $a \geq 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $a < N$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $a^n/n! = a^N a^{n-N}/N!(N+1) \cdots n \leq (a^N/N!)(a/N)^{n-N} = (a^N/N!)(a/N)^{-N}(a/N)^n$. La suite $((a/N)^n)$ tend vers 0 (Proposition **3.19**). Donc notre suite tend vers 0.

45 1. $a_n = n^2, b_n = -n$; 2. $a_n = n, b_n = -n^2$; 3. $a_n = n, b_n = -n$; 4. $a_n = n + (-1)^n, b_n = -n$.

46 Ecrivant $x_n = i + j(-1/2)^n$ pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve $i + j = a$ et $i - (1/2)j = b$. On peut résoudre ce système et on trouve que x_n défini par $x_n = i + j(-1/2)^n$ satisfait bien la récurrence de l'énoncé. Comme $(-1/2)^n$ tend vers 0 (proposition 3.19), on en déduit que x_n tend vers i .

47 Les arguments sont semblables à ceux de l'exercice 46.

48 $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$.

49 Suivre les indications et appliquer la proposition 3.20.

50 Pour $n = 1$, c'est facile. Supposons que $(1+a)^n \geq 1+an$; alors, $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+an)(1+a)$ (puisque $1+a \geq 0$) $= 1+a(n+1)+a^2n \geq 1+an$, puisque $a^2n \geq 0$.

51 1. Une récurrence immédiate montre que $x_n \geq 0$; on en déduit que $x_{n+1} \leq 1$.

2. Calculer $x_{n+1} - 1$.

52 Suivre les indications.

53 Suivre les indications.

54 Suivre les indications.

55 1. $x_1 - x_0 = 3$; $x_{n+1} - x_n = 3 + \sqrt{x_n} - (3 + \sqrt{x_{n-1}}) \geq 0$ par hypothèse de récurrence : la suite est croissante. Si $x_n \leq 6$, alors $x_{n+1}^2 = 9 + x_n + 6\sqrt{x_n} \leq 9 + 6 + 6 \cdot 3 \leq 36$, donc $x_{n+1} \leq 6$. La suite converge vers x et on a $x = 3 + \sqrt{x}$, donc $x = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, $x^2 - 7x + 9 = 0$; $\Delta = 49 - 36 = 13$, $x = (1/2)(7 \pm \sqrt{13})$, et comme $x \geq x_1 = 4$, $x = (1/2)(7 + \sqrt{13})$.

2. Une récurrence immédiate montre que $x_n \geq 0$. Par suite, $x_{n+1} \geq x_n$: la suite est croissante. Aussi, $3(1+3x_n) \geq 1+7x_n$; donc $x_{n+1} - x_n \geq 1/3$. Il s'ensuit par récurrence que $x_n - x_0 \geq n/3$. La suite n'est donc pas bornée. Elle vers l'infini.

3. La suite (a_n) prend alternativement deux valeurs distinctes; elle ne converge donc pas, et la suite (x_n) non plus.

56 Suivre la progression des questions.

57 Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n > N_0, |a_{2n} - \ell| < \epsilon$ et que $\forall n \geq N_1, |a_{2n+1} - \ell| < \epsilon$. Soit P tel que $P/2 \geq N_0$ et que $P/2 - 1/2 \geq N_1$. Soit $p > P$; si p est pair, $p = 2n$, alors $n = p/2 > P/2 \geq N_0$, donc $|a_p - \ell| = |a_{2n} - \ell| < \epsilon$; si p impair, $p = 2n+1$, alors $n = (p-1)/2 > P/2 - 1/2 \geq N_1$, donc $|a_p - \ell| = |a_{2n+1} - \ell| < \epsilon$.

58 La suite $(1 + \frac{1}{2n})^{2n}$ est une sous-suite de la suite $(1 + \frac{1}{n})^n$; elle tend donc vers e (corollaire 3.26 et théorème 3.29). Posons $u_n = (1 + \frac{1}{2n})^n$; alors (u_n^2) est la suite précédente. Comme $|u_n - \sqrt{e}| = \frac{|u_n^2 - e|}{|u_n + \sqrt{e}|}$, et que $u_n \geq 1$, on a $\frac{|u_n^2 - e|}{|u_n + \sqrt{e}|} \leq |u_n^2 - e|$. Donc $u_n - \sqrt{e}$ tend vers 0.

La suite $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ tend vers e , car c'est un sous-suite de la suite du

corollaire 3.26. On a $(1 + \frac{1}{n+1})^n = (1 + \frac{1}{n+1})^{-1} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$. Comme la suite $1 + \frac{1}{n+1}$ tend vers 1, la suite $(1 + \frac{1}{n+1})^n$ tend vers e.

59 Une suite périodique, dont l'ensemble des termes est de cardinalité ≥ 2 , ne converge pas ; en effet on peut trouver deux sous-suites constantes distinctes.

60 Posons $x_n = \frac{a^n}{n^k}$. On a $x_{n+1}/x_n = an^k/(n+1)^k = a/(1+1/n)^k$. Ceci tend vers $a > 1$, donc la suite x_n tend vers ∞ (Théorème 3.33).

61 1. Pour $a_n \geq 1$, la récurrence est immédiate. On vérifie que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Il s'ensuit que si $a_n \leq \sqrt{2}$ (resp. $\geq \sqrt{2}$), alors $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} \geq$ (resp. $\leq$) $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Comme a_n est rationnel, on n'a pas $a_n = \sqrt{2}$. Par suite les a_n sont alternativement $<$ et $>$ que $\sqrt{2}$.

2. En appliquant deux fois la formule récurrence, on trouve que (*) $a_{n+2} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n}$. D'où $a_{n+2} - a_n = \frac{2(2-a_n^2)}{3+2a_n}$. La sous-suite des termes pairs est donc croissante, et l'autre décroissante. Étant bornées, elles convergent donc toutes les deux.

3. La formule (*), par passage à la limite, montre que la limite a des termes pairs (resp. des impairs) satisfait $a = \frac{4+3a}{3+2a}$, donc $a^2 = 2$. Comme la limite est ≥ 1 (car tous les a_n sont ≥ 1), $a = \sqrt{2}$. Comme les deux sous-suites ont la même limite, la suite elle-même tend vers elle.

En appliquant itérativement n fois la formule de récurrence $a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$, on trouve

$$a_n = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots + \frac{1}{2}}}}$$

62 On va appliquer le résultat simple suivant : une sous-suite d'une sous-suite d'une suite est une sous-suite de cette suite.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on trouve d'abord une sous-suite $a'_n = a_{h_n}$ de la suite a_n qui converge dans $[a, b]$. On considère alors la suite $b'_n = b_{h_n}$, et on lui applique le même théorème : elle possède la sous-suite b'_{k_n} convergente dans $[a, b]$. La suite a'_{k_n} est convergente dans $[a, b]$, elle est une sous-suite de a_n , et b'_{k_n} est une sous-suite de b_n .

63 Toute suite possède soit une sous-suite strictement décroissante, soit une sous-suite croissante.

64 Soit $a < b$. Dans l'intervalle (a, b) , il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de F . Soit c le plus petit d'entre eux. Alors $a < c$. Alors l'intervalle (a, c) ne rencontre pas F . Mais il rencontre E , car celui-ci est dense. Donc (a, c) rencontre $E \setminus F$. Donc ce dernier rencontre (a, b) .

65 Suivre les indications.

66 C'est une série géométrique. La somme partielle est $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1/2)^i = \frac{1 - (-1/2)^{n+1}}{1 - (-1/2)}$. Lorsque n tend vers l'infini, le numérateur tend vers 1, et le dénominateur est constamment égal à $3/2$. Donc la limite est $2/3$.

67 On a $\frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+1+a}$. Les sommes partielles de la série sont des sommes télescopiques, qui se réduisent à deux termes.

68 a_n tend vers 0, donc $1/(1 + a_n^2)$ ne tend pas vers 0 : la série diverge.

69 Suivre les indications, en tenant compte du fait que tout nombre entier compris entre 0 et $2^{n+1} - 1$ est de manière unique somme de puissances de 2 distinctes, avec exposant compris entre 0 et n (système binaire).

70 Critère de d'Alembert.

71 Suivre les indications.

72 Par hypothèse, il existe M tel que pour tout n , $|S_{k_n}| \leq M$. Soit maintenant k entier naturel quelconque. Comme k_n tend vers l'infini avec n , il existe n tel que $k_n \geq k$. Alors $S_k \leq S_{k_n} \leq M$.

73 Soit $a_n = 1/n \ln(n)$. On a $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n n \ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge, et on applique la condensation.

74 Par le critère de condensation de Cauchy, $2^n a_{2^n} \rightarrow 0$. D'autre part, pour un entier k , soit n tel que

$$2^n \leq k < 2^{n+1}$$

Alors $0 \leq ka_k \leq 2(2^n a_{2^n})$ puisque la suite a_k est décroissante. Comme le terme de droite converge vers zéro lorsque k (et donc n) tend vers l'infini, le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure.

75 1. Appliquer deux fois de suite le critère de condensation.

2. Le terme général est positif et borné par $(1/3)^n$: converge.

3. Critère de d'Alembert, avec la proposition 3.26 : diverge.

4. Le terme général est équivalent à $(3/7)^n$: converge.

5. Comme 3., mais ça converge.

6. Si $a > 0$: critère de d'Alembert : converge.

7. Terme général équivalent à $3/\sqrt{n}$: diverge.

8. Terme général équivalent à $2^n/n!$ (utiliser l'exercice 60 pour le prouver) ; appliquer 6 : converge.

9. Terme général équivalent à $1/2n$: diverge.

76 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e$.

77 On a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$. Si $\sum a_n$ est une série convergente, sa limite est la somme des limites de la séries de ses termes de rang

pair, et de la série de ses termes de rang impair (prouver). On en déduit que $\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$, donc cette dernière est égale à $\frac{\pi^2}{8}$.

78 $\sum p_n = \infty$ car ses sommes partielles sont positives et non bornées (proposition 3.27). Le même argument s'applique à $\sum (-q_n)$.

79 Il existe M tel que $b_n \leq M$ pour tout M . La série $\sum M|a_n|$ converge. On a $|a_n b_n| \leq M|a_n|$. On applique le corollaire 4.7.

80 1. Terme général > 1 : diverge.

2. Terme général positif et équivalent à $1/n^{1/2}$: diverge.

3. Appliquer le critère de d'Alembert à la valeur absolue du terme général : converge absolument.

4. Critère de d'Alembert.

81 1. Le terme général est > 1 : diverge.

2. Théorème 4.23 : converge. Corollaires 4.10 et 4.14 : ne converge pas absolument.

3. Converge absolument car $n^4/3^n \leq 1/n^2$ pour n assez grand, car $n^6/3^n$ tend vers 0 (exercice 60).

82 1. $u_n/v_n = 1 + (-1)^n/\sqrt{n}$ tend vers 1.

2. Théorème 4.23.

4. Théorème 4.23, après vérification que $\sqrt{n}/(n-1) > \sqrt{n+1}/n$.

5. D'après 3, v_n est la somme de deux termes, dont l'un correspond à une série convergente, et l'autre à une série divergente.

6. Les suites ne sont pas positives.

7. la suite v_n n'est pas décroissante.

83 On vérifie que $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}$. Donc la somme de la série $\sum_{k \geq 0} (1/(2k+1) - 1/(4k+2) - 1/(4k+4))$ est égale à celle de $\sum_{k \geq 0} (\frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)})$. Par le théorème d'associativité 4.17, c'est donc aussi la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$, c'est à dire $\frac{\ell}{2}$.

84 Appliquer les théorèmes 4.25 et 4.26.

85 $V'(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)$.

86 On construit une suite infinie de nombres distincts x_n , et une suite strictement décroissante δ_n de nombres strictement positifs : $\delta_0 = \delta$, $x_0 \in V'(x, \delta_0)$; et récursivement, pour tout $n \geq 1$, $\delta_n = |x - x_{n-1}|$, $x_n \in V'(x, \delta_n)$ (x_n existe).

On a alors $\delta_n < \delta_{n-1}$, car $x_{n-1} \in V'(x, \delta_{n-1})$, donc $|x - x_{n-1}| < \delta_{n-1}$. Alors x_n est différent de $x_0, \dots, x_{n-1}$, car il est plus proche de x que ceux-ci. Et x_n est dans $V'(x, \delta_n) \subset V'(x, \delta)$.

87 x est un point d'accumulation de A si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, V'(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

La négation de ceci est

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } V'(x, \epsilon) \cap A = \emptyset.$$

88 Soit x un réel et $\delta > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ rencontre l'intervalle $(x, x + \delta)$; donc $\mathbb{Q}$ rencontre $V'(x, \delta)$.

89 Ce sont tous les points de $[0, 1]$.

90 Soit $x \in D$. Il existe alors un intervalle I tel que $x \in I \subset D$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $[x, x + h] \subset D$, avec $h > 0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, $V'(x, \epsilon)$ rencontre $[x, x + h]$, donc rencontre I .

91 Il existe η tel que D_f ne rencontre pas $V'(x_0, \eta)$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $x \in V'(x_0, \eta) \cap D_f$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$; en effet, $V'(x_0, \eta) \cap D_f$ est vide, donc aucun tel x n'existe.

92 1. Multiplier en haut et en bas par $\sqrt{2+x} + \sqrt{2}$. La limite est $\sqrt{2}/4$.

2. On suppose $x > 1$. Comme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, on a $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}$, donc $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x + 1}$ qui tend vers $\sqrt{2}$ lorsque x tend vers 1.

1. De plus, $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x - 1}} = \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x - 1}} = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x} + 1}$ (car $x - 1 = (\sqrt{x - 1})^2$), qui tend vers 0. Donc la limite cherchée est $\sqrt{2}$.

3. $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$.

94 Faisons l'hypothèse qu'on ait : pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon < \eta$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Nous montrons qu'alors f est continue en a . Soit donc $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \min(\eta/2, \epsilon)$. Alors $0 < \epsilon' < \eta$; il existe donc par hypothèse $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon'$. Mais $\epsilon' \leq \epsilon$, donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

95 Suivre les indications.

96 On a $\ln((1 + 1/n)^n) = n \ln(1 + 1/n)$. Par le corollaire 3.26 et le théorème 5.14 (puisque la fonction $\ln$ est continue), la limite de la suite $(n \ln(1 + 1/n))$ est $\ln(e) = 1$.

On a $\ln((1 + 1/n)^{n \ln(a)}) = n \ln(a) \ln(1 + 1/n)$. Donc la suite $(\ln((1 + 1/n)^{n \ln(a)}))$ tend vers $\ln(a)$. Donc par le théorème 5.14 (puisque la fonction e^x est continue), la suite $((1 + 1/n)^{n \ln(a)})$ tend vers $e^{\ln(a)} = a$.

On a $\ln((1 + 1/n)^{n^2}) = n^2 \ln(1 + 1/n)$. Donc la suite $(\ln((1 + 1/n)^{n^2}))$ tend vers ∞ . Donc par le théorème 5.14, la suite $((1 + 1/n)^{n^2})$ tend vers ∞ .

On a $\ln((1 + 1/n)^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n} \ln(1 + 1/n) = (1/\sqrt{n})n \ln(1 + 1/n)$. Donc la suite $(\ln((1 + 1/n)^{\sqrt{n}}))$ tend vers 0. Donc par le théorème 5.14, la suite $((1 + 1/n)^{\sqrt{n}})$ tend vers 1.

97 Non : un contre-exemple est la fonction $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$. Elle est

continue partout, sauf en $x = 0$, mais $f(h) + f(-h) = 0$ pour tout h , et la limite quand h tend vers 0 existe donc.

98 Elle prend la valeur 1 pour des x aussi proches qu'on veut de 0 : en effet, c'est le cas pour $x = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$, n entier naturel.

99 On a $|f(x)| \leq |x|$, donc f est continue en 0, car $f(0) = 0$. Soit a rationnel non nul ; comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ prend la valeur 0 pour des x aussi proches qu'on veut de a , mais $f(a) = a \neq 0$; donc f n'est pas continue en a . Soit a irrationnel ; comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ prend des valeurs $\geq |a|/2$ pour des x aussi proches qu'on veut de a , mais $f(a) = 0$; donc f n'est pas continue en a .

100 On a $|f(x)| \leq |x|$.

101 1. Utiliser l'exercice **19**.

2. La fonction valeur absolue est continue ; utiliser les théorèmes **5.15** et **5.16**.

102 Ce polynôme représente une fonction continue, qui prend les valeurs -2 et 1 en -1 et 0 . On applique le théorème des valeurs intermédiaires.

103 La fonction $f(x)$ associée au polynôme tend vers $-\infty$ (resp. ∞) avec x . Il existe donc $a < b$ tel $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

104 Cette fonction tend vers l'infini avec x .

105 La fonction sinus de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$. Ou la même fonction, restreinte à l'intervalle $(-\pi, \pi)$.

106 On pose $\delta = \epsilon/k$ pour se conformer à la définition **5.20**.

107 La fonction $\sin : [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue par le théorème **5.22**. Soit $\epsilon > 0$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout a, b dans $[-2\pi, 2\pi]$, $|a - b| < \delta \Rightarrow |\sin(a) - \sin(b)| < \epsilon$; on peut supposer $\delta \leq 2\pi$. Soient x, y dans $\mathbb{R}$ avec $|x - y| < \delta$. Il existe alors $a, b \in [-2\pi, 2\pi]$ tels que $|a - b| < \delta$ et que $x - a, y - b$ sont des multiples entiers de 2π . Alors $|\sin(x) - \sin(y)| = |\sin(a) - \sin(b)| < \epsilon$.

108 On a pour tout réel x , $|x| < 1 + x^2$. Donc pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y| < 2(1 + x^2)(1 + y^2)$. Par suite, $|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}| = |\frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}| < 2|x - y|$, puisque $|\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}| < 2$. La fonction est donc lipschitzienne de rapport 2, donc uniformément continue (exercice **106**).

109 On a $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$. Si $x, y \geq 1$, alors cette différence est en valeur absolue $\leq |x - y|$; donc la fonction $1/x$ sur $[1, \infty)$ est uniformément continue, même lipschitzienne de rapport 1 (exercice **106**).

Soit $n \geq 1$, et prenons $y = \frac{1}{n}$, $x = \frac{1}{n+1} \in (0, 1]$, et posons $f(t) = \frac{1}{t}$. On a $y - x = \frac{1}{n(n+1)}$. Pour n assez grand, cette dernière différence est aussi petite qu'on veut, mais $f(x) - f(y) = 1$. Donc f n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.

110 Prenons $x =$ l'inverse de $2k\pi$, et $y =$ l'inverse de $2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$. Pour k grand, $x - y$ est très petit, mais $\cos(1/x) - \cos(1/y) = 1$. La fonction $\cos(1/x)$ n'est pas uniformément continue.

111 Evident.

112 La fonction $x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante.

113 1. Le théorème 5.11 implique que $|\sin(x)|$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc $\sin(x)$ aussi.

2. La question précédente montre que les limites, quand ϕ tend vers 0, de $\sin \phi$ et $\cos \phi$, sont respectivement 0 et 1. Donc, la formule $\sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \cos \phi \sin \theta$, pour θ fixé, montre que la limite, quand ϕ tend vers 0, de $\sin(\theta + \phi)$, est $\cos \theta \sin(0) + \cos(0) \sin \theta = \sin \theta$. Donc la fonction $\sin$ est continue en θ .

114 Suivre les indications.

115 $f'(0) = 0$.

116 On définit $f(x) = 1$ pour $x < 0$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour $x \in [0, n)$, $f(x) = n$ pour $x \geq n$.

117 Appliquer le théorème 6.3.

118 $(f^n)' = n f^{n-1} f'$.

119 $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)' = (f_1' \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)(f_2' \circ f_3 \circ \dots \circ f_n) \dots f_n'$.

120 On a $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$, donc $(g \circ f)'' = (g'' \circ f)f'^2 + (g' \circ f)f''$.

121 $f_n' = f_1 f_2 \dots f_n$.

122 La dérivée de $\tan$ est $1/\cos^2(x)$. Donc la fonction $\tan(x)$ est strictement croissante, de $(-\pi/2, \pi/2)$ sur $\mathbb{R}$.

123 1) En utilisant l'inégalité avec la fonction tangente, on obtient $|\cos x| \leq |\sin x/x|$, et en utilisant l'exercice 113, on obtient $|\sin x/x| \leq 1$. Donc par le théorème des gendarmes, la limite de $|\sin x/x|$ est 1 quand x tend vers 0.

124 Suivre les indications.

125 Théorème de Rolle. Les racines de la dérivée de $2x^4 - 3x^2 + k = 0$, qui est $8x^3 - 6x$ sont $-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2$.

126 Par hypothèse, $f - g$ est de dérivée nulle. Donc $f - g$ est constante (corollaire 6.12).

127 Soit $f(x) = x^2 - \cos(x)$. La fonction f est *paire*, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$; il suffit donc de montrer que f a un seul zéro pour $x > 0$, sachant que $f(0) \neq 0$. Sa dérivée est $2x + \sin(x)$, qui est > 0 sur l'intervalle $(0, 1)$

($1 < \pi/2$). Par le corollaire 6.11, f est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc injective. Comme $f(0) = -1$, $f(1) = 1 - \cos(1) > 0$, il existe par le théorème des valeurs intermédiaire un $x \in (0, 1)$ tel que $f(x) = 0$; il est unique car f est injective. Pour $x > 1$, on a $f(x) > 0$.

128 Si $a < b$ et $f'(a) < f'(b)$, soit h une valeur strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Soit $g(x) = f(x) - hx$. Alors $g'(x) = f'(x) - h$. Donc $g'(a) < 0 < g'(b)$. Il existe d'après l'exercice 124 un $c \in (a, b)$ tel que $g'(c) = 0$. Donc $f'(c) = h$.

129 Suivre les indications.

130 Les dérivées successives de la fonction $\sin$, en commençant par celle d'ordre 0, sont $\sin$, $\cos$, $-\sin$, $-\cos$, $\sin$, $\cos$, $-\sin$. En appliquant le théorème 6.14 avec $a = 0$ et $n = 6$, on trouve $\sin(b) - (b - \frac{b^3}{6} + \frac{b^5}{120}) = -\sin(c) \frac{b^6}{720}$, avec $c \in (0, b)$. Si $b \in [0, \pi]$, on a $c \in (0, \pi)$, donc $\sin(c) > 0$, et par suite $\sin(b) - (b - \frac{b^3}{6} + \frac{b^5}{120}) < 0$.

131 1. La dérivée de $\tan(x)$ est $\tan(x)^2 + 1$; donc la limite de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ est 1. Donc la limite demandée est 1.

2. La fonction $f(x) = \cos^2 x - 1$ a pour dérivée $f'(x) = -2 \sin x \cos x$; la dérivée seconde est $-2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2 - 4 \cos^2 x = -2 - 4f(x)$; la dérivée tierce est $8 \sin x \cos x$. La formule de Taylor pour $n = 3$ nous donne, pour $x > 0$, $f(x) = -x^2 + (8/6)c^3$, avec $c \in (0, x)$. Comme $c^3/x^2 < x$, la limite demandée est -1 .

132 La formule dépend de la valeur de n modulo 4.

133 On utilise $[x - \delta/2, x + \delta/2] \subset (x - \delta, x + \delta) \subset [x - \delta, x + \delta]$.

134 Pour tout $x \in (a, b)$, on a $(x - \delta, x + \delta) \subset (a, b)$, où $\delta = \min(x - a, b - x)$.

135 Montrons que $O_1 \cap \dots \cap O_n$ est un ouvert pour tout $n \geq 1$ et pour tous les ouverts O_i . Si $n = 2$, c'est prouvé dans la preuve du théorème. Supposons que ça soit vrai pour $n \geq 2$. Alors $O_1 \cap \dots \cap O_{n+1} = (O_1 \cap \dots \cap O_n) \cap O_{n+1}$. L'ensemble entre parenthèses est un ouvert par hypothèse de récurrence. Donc le cas $n = 2$ permet de conclure.

136 On a $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, \infty)$.

137 Son complémentaire est $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{1 \leq n} (1/(n+1), 1/n)$.

138 Le supremum est la limite d'une suite.

139 Soit (ℓ_n) une suite, où chaque ℓ_n est la limite d'une sous-suite de la suite (a_n) , qui converge vers ℓ . Pour tout $n \geq 1$, il existe une infinité de k tels que $|a_k - \ell_n| < 1/n$. On peut donc construire une suite strictement croissante $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|a_{k_n} - \ell_n| < 1/n$. Soit $\epsilon > 0$; il existe N tel que $\forall n > N$, $|\ell_n - \ell| < \epsilon$. On peut supposer N tel que $1/N < \epsilon$. Alors, pour tout $n > N$, on a $1/n < 1/N < \epsilon$. Donc $|a_{k_n} - \ell| = |a_{k_n} - \ell_n + \ell_n - \ell| < |a_{k_n} - \ell_n| + |\ell_n - \ell| < 2\epsilon$.

140 Soit x dans l'adhérence de E . Pour $n \geq 1$, il existe x_n dans $E \cap V(x, 1/n)$. Clairement, la suite (x_n) tend vers x .

Réciproquement, soit (x_n) une suite d'éléments de E qui tend vers x . Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $x_n \in V(x, \delta) \cap E$. Donc x est dans $\bar{E}$.

141 Utiliser la définition de la densité dans la section **3.16**.

142 Ce sont les intervalles $[a, b]$.

143 Soit a_n la suite convergente, de limite a . Soit $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$. L'ensemble A est borné (théorème **3.6**), et il suffit donc de montrer qu'il est fermé. Soit x_n une suite convergente telle que $x_n \in A$ pour tout n , de limite x . Il suffit de montrer que $x \in A$. On peut supposer que x_n prend une infinité de valeurs : en effet, on utilise l'exercice **37**. On peut supposer que pour tout M , il existe $n \geq M$ et $p \geq M$ tel que $x_p = a_n$; en effet, autrement x_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe P tel que $\forall p \geq P, |x - x_p| < \epsilon$. Il existe aussi N tel que $\forall n \geq N, |a - a_n| < \epsilon$. Mais il existe $n, p \geq M = \max(N, P)$ tel que $x_p = a_n$. Alors $|\ell - x| \leq |\ell - a_n| + |x_p - x| < 2\epsilon$. Donc $x = \ell$ par le corollaire **2.10**.

Références

- [1] [LM] J. Labelle et Armel Mercier, Introduction à l'analyse réelle, Modulo, 1993.
- [2] [R] F. Rochon, Cours d'analyse 1, manuscrit 2015.